BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 129-138

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__129_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

JAHRBUCH ÜBER DIE GESAMMTEN FORTSCHRITTE DER MATHEMATIK, im Verein mit andern Mathematikern herausgegeben von Dr. Carl OHRTMANN und Dr. Felix MÜLLER. — Berlin, Druck und Verlag von Georg Reimer (¹).

T. I; année 1868. Publié en 1871, en 3 fascicules. (426 p.)

Cette publication, rédigée sur le modèle des Recueils analogues relatifs aux Sciences physiques que l'Allemagne possède depuis longtemps, est appelée à rendre de grands services à tous ceux qui s'occupent de recherches mathématiques. Le talent des rédacteurs, l'abondance des ressources bibliographiques dont ils disposent, les nombreux correspondants qu'ils ont dans toute l'Europe assurent aux lecteurs du *Jahrbuch* le double avantage d'y rencontrer des renseignements exacts et complets.

La forme adoptée par ce Recueil présente, il est vrai, l'inconvénient de ne pouvoir signaler les travaux au moment de leur apparition; mais cet inconvénient est compensé par la possibilité de classer les matières dans un ordre méthodique et d'offrir un tableau plus complet et plus clair des progrès de la Science.

L'Ouvrage est divisé en douze Sections, dont voici les titres généraux :

1. Histoire et Philosophie. — 2. Algèbre. — 3. Théorie des nombres. — 4. Calcul des probabilités. — 5. Séries. — 6. Calcul différentiel et intégral. — 7. Théorie des fonctions. — 8. Géométrie analytique. — 9. Géométrie synthétique. — 10. Mécanique. — 11. Physique mathématique. — 12. Géodésie et Astronomie.

Chaque Section se subdivise en plusieurs Chapitres. Les Articles consacrés à chaque Ouvrage ou Mémoire sont de longueur variable, suivant l'importance que leur attribuent les rédacteurs. Souvent les titres sont seuls indiqués; d'autres fois ils sont suivis d'analyses ou

(¹) *Annuaire des progrès généraux des Mathématiques,* publié en collaboration avec d'autres Mathematiciens, par MM. C. OHRTMANN et F. MULLER. Berlin, G. Reimer. Il paraît un volume chaque annee en un ou plusieurs fascicules in-8°.

d'extraits de plusieurs pages. Ces titres sont transcrits dans la langue originale, avec l'indication exacte du Recueil où se trouve le travail, et les numéros de la première et de la dernière page.

Le Volume est accompagné de deux Tables détaillées, l'une par ordre de matières, l'autre par noms d'auteurs.

Ce court aperçu suffira pour faire apprécier la haute utilité de cette publication, qui poursuit par une voie différente le même but que le *Bulletin*, et à laquelle nous souhaitons vivement, dans l'intérêt de la Science, le succès que méritent les consciencieux efforts des rédacteurs. J. H.

Nous avons reçu de M. C. Ohrtmann un travail historique intéressant, intitulé : *Das Problem der Tautochronen. Ein historischer Versuch* (Essai historique sur le problème des tautochrones.). L'Auteur y analyse les travaux des géomètres suivants :

Abel (N). — Auflösung eines mechanischen Problems. (Crelle, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, T. 1, p. 157 ; et Abel, *Œuvres complètes*, T. I, p. 27.)

D'Alembert. — Sur les tautochrones. (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1765, p. 351-413.) — Extrait d'une Lettre à M. de Lagrange. (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1763, p. 260-266.)

Bernoulli (J.). — Méthode pour trouver les tautochrones dans des milieux résistants comme le carré des vitesses. (*Mémoires de l'Académie de Paris*, 1730, p. 78-101.)

Bertrand (J.). — Note sur le problème des tautochrones. (Liouville, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re Série, T. XII, 1847.)

Brioschi. — Sulle linee tautocrone. (Tortolini, *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, T. III e IV, 1852 e 1853.)

Duhamel. — Cours de Mécanique. 3e édit. T. I, p. 430.

Euler (L.). — De innumerabilibus curvis tautochronis in vacuo. (*Commentarii Acad. Petropolitanae*. T. IV, 49-66, 1729.)

— Curva tautochrona in fluido resistentiam faciente secundum quadrata celeritatum. (*Ibidem*, p. 67-89. *Mechanik*, Prop. 46.)

— Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente. (*Acta Erudit.* Lipsiae, 1726, p. 361-363.)

Fontaine. — Sur les courbes tautochrones. (*Mémoires de l'Académie de Paris*, 1734.)

— Addition au Mémoire imprimé en 1734 sur les courbes tautochrones. (*Mémoires de l'Académie de Paris*, 1768, p. 460-470.)

Haton de la Goupillière. — Sur le tautochronisme des épicycloïdes, quand on a égard au frottement. (LIOUVILLE, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e Série, T. XIII.)

HERRMANN (J.). — Acta Erudit. Lipsiae, 1737, p. 222; 1738, p. 272.

HOPPE (R.). — Tautochronische Curven bei Reibungswiderstand. (SCHLÖMILCH, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. T. XIV, p. 382-387, 1869.)

HUYGHENS (C.). — De horologio oscillatorio. T. II, Prop. 25.

JULLIEN (M.). — Problèmes de Mécanique rationnelle. T. I, p. 392, 1855.

LAGRANGE. — Sur les courbes tautochrones. (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1765, p. 364-380.)

— Nouvelles réflexions sur les courbes tautochrones. (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1770, p. 97-122.)

LAPLACE. — Mécanique céleste. T. I, Livre I, Chap. II, § 12, 1792.

MEISSEL (E.). — Zur Theorie der Tautochronen. (CRELLE, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. T. 48, 317-324.)

NECKER (L.). — Solutions de quelques problèmes de Mécanique. (*Mémoires de Mathématiques et de Physique* présentés à l'Académie de Paris par divers savants étrangers. T. IV, p. 96, 1743.)

NEWTON (I.). — Philosophiæ naturalis principia mathematica. Lib. I, Prop. LI; Lib. II, Prop. XXVI. 1714.

POISSON. — Traité de Mécanique. T. I, p. 368 (2e édit.), 1833.

PUISEUX (V.). — Sur les courbes tautochrones. (LIOUVILLE, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re Série, T. IX, p. 409-421, 1844.)

SCHELL (W.). — Theorie der Bewegung und Kräfte, p. 330, 1870.

SOMOFF (J.). — Note sur la solution, donnée par Abel, d'un problème de Mécanique. (*Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*. T. XIII, p. 469, 1869.)

G. D.

FLYE SAINTE-MARIE (C.), capitaine d'artillerie, ancien élève de l'École Polytechnique, chevalier de la Légion d'honneur. — ÉTUDES ANALYTIQUES SUR LA THÉORIE DES PARALLÈLES. — Paris, Gauthier-Villars, 1871; 1 vol. grand in-8°, 154 p., 8 pl. Prix : 5 fr.

L'Auteur de ce Livre remarquable a repris, sous un point de vue nouveau, une question déjà traitée par plusieurs géomètres. Lobatchefsky, Bolyai et d'autres ont examiné ce que deviendrait la Géométrie si l'on écartait l'axiome XI ou *postulatum* d'Euclide. M. Flye Sainte-Marie recherche, dans cette hypothèse, les formules d'une Géométrie analytique indépendante de la théorie des parallèles.

De même que la Géométrie analytique ordinaire, si on la supposait connue *a priori*, pourrait servir à démontrer toutes les propositions de la Géométrie usitée, la Géométrie analytique de M. Flye Sainte-Marie conduit aisément à toutes les propriétés que ses devanciers ont démontrées par d'autres méthodes.

L'Auteur, admettant toutes les propositions qui précèdent la théorie des parallèles, établit d'abord, dans son premier Chapitre, quelques propriétés des figures infinitésimales, nécessaires pour la suite, et identiques, du reste, avec celles de la Géométrie usitée.

Dans le Chapitre II, après avoir considéré l'arc de rayon infini ou horicycle et recherché la relation très-simple qui existe entre deux arcs de rayon infini, terminés à deux normales communes, et la longueur de ces normales, il adopte, comme coordonnées paramétrales d'un point dans un plan, la longueur de la normale abaissée de ce point sur un horicycle fixe et la distance comptée sur cet horicycle d'un point fixe au pied de la normale. Il détermine en fonction de ces coordonnées la valeur de l'élément linéaire, et en déduit, par le calcul des variations, l'équation paramétrale de la ligne droite. Une fois en possession de ce résultat important, il cherche successivement la distance de deux points, les équations paramétrales de la circonférence et de l'horicycle, puis les formules de la transformation des coordonnées. Il vérifie que cette transformation ne peut jamais modifier l'expression d'un élément linéaire, ni par suite d'aucune grandeur géométrique, de quelque nature qu'elle soit.

Dans le Chapitre III, l'Auteur applique des méthodes analogues à la Géométrie des trois dimensions ; adoptant, comme coordonnées d'un point dans l'espace, d'abord la longueur de la normale abaissée de ce point sur une horisphère fixe, puis les deux coordonnées du pied de cette normale par rapport à deux horicycles rectangulaires tracés sur l'horisphère, il détermine successivement : l'expression de l'élément linéaire, les équations de la ligne droite, la distance de deux points, les équations de la sphère, de l'horisphère et du plan. Il s'occupe enfin des sections normales de l'horisphère et de la transformation des coordonnées.

Le Chapitre IV est consacré à la Trigonométrie. L'Auteur fait remarquer avec raison que l'identité de la Trigonométrie sphérique abstraite et de la Trigonométrie sphérique usitée pouvait se déduire immédiatement de la Géométrie des figures infinitésimales; car un trièdre considéré dans le voisinage de son sommet contient déjà les six éléments entre lesquels on demande des relations. Avant de passer à la Trigonométrie rectiligne, il recherche les formules relatives à la mesure de la circonférence du cercle, du secteur et du triangle. C'est en combinant ces résultats avec les propriétés des figures infinitésimales qu'il démontre les formules connues de la Trigonométrie imaginaire.

Enfin, on trouve encore dans ce Chapitre les solutions d'un grand nombre de questions intéressantes : Géométrie des figures tracées sur une surface équidistante d'un plan; surface et volume de la sphère; angle de deux droites, d'un plan et d'une droite, de deux plans; tangente à une courbe, plan tangent à une surface; aire d'une courbe plane; éléments différentiels d'une surface et d'un solide.

En raison de la grande généralité de la méthode de M. Flye Sainte-Marie, qui permet, comme la Géométrie analytique ordinaire, de suivre pour toutes les questions une marche uniforme ; en raison surtout de la simplicité inespérée des résultats, déduits de calculs fort compliqués et présentés avec le plus grand ordre, la partie analytique de ces *Études* nous paraît tout à fait digne d'éloges.

Après cette déclaration bien sincère, nous osons espérer que l'on ne nous accusera pas de vouloir diminuer le mérite du travail que nous analysons, si nous nous montrons plus réservé en ce qui concerne l'appréciation de la partie philosophique de ce travail, et si nous nous permettons de proposer à l'Auteur une légère modification.

Il croit déduire rigoureusement de ses résultats que le *postulatum* d'Euclide ne peut être démontré par le raisonnement, aidé des axiomes antérieurs, et sans appel nouveau à l'expérience.

Sans vouloir contester d'une manière absolue l'exactitude des raisonnements qu'il fait dans ce but et sur lesquels il revient en plusieurs endroits de son Livre, tout en admettant qu'ils puissent porter la conviction dans l'esprit de leur auteur, nous devons déclarer qu'ils laissent le doute dans le nôtre.

Pour faire disparaître ce doute, il nous semble qu'au lieu de transformer les opérations géométriques en simples opérations de calcul, ce qui paraît être l'idéal de l'Auteur, il faut, au contraire, chercher une interprétation réelle et concrète de tous les résultats trouvés dans la Géométrie imaginaire, afin qu'à toute contradiction dans cette dernière corresponde une contradiction dans la Géométrie euclidienne elle-même.

C'est en vertu d'une interprétation semblable que nous ne conservons aucun doute sur l'impossibilité de démontrer le *postulatum* par la Géométrie plane, MM. Beltrami et Hoüel ayant fait voir qu'à toute contradiction dans la Géométrie imaginaire du plan en correspondrait une autre dans la Géométrie réelle des pseudo-sphères.

Voici comment nous pensons pouvoir présenter l'interprétation réelle de tous les résultats de la Géométrie abstraite, en nous servant des calculs de M. Flye Sainte-Marie :

Plaçons-nous dans la Géométrie ordinaire, et rapportons tous les points de l'espace à un système de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. La distance de deux points infiniment voisins

$$(x, y, z), \quad (x + dx, y + dy, z + dz)$$

étant alors

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

appelons *pseudo-distance* de ces deux mêmes points la quantité

$$d\sigma = \sqrt{(dx^2 + dy^2)e^{\frac{2z}{k}} + dz^2},$$

k étant un paramètre arbitraire. De même que la longueur d'une ligne entre deux points est l'intégrale de ds entre des limites déterminées par les coordonnées de ces points, la pseudo-longueur de cette même ligne sera l'intégrale de $d\sigma$ entre les mêmes limites.

Appelons encore pseudo-droites les lignes ayant pour équations

$$y = mx + n,$$
$$(m^2 + 1)(x - P)(x - Q) = - k^2 e^{-\frac{2z}{k}};$$

pseudo-plans les surfaces ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = - k^2 e^{-\frac{2z}{k}}.$$

De ces définitions nous déduisons immédiatement par l'analyse les conséquences suivantes :

Par deux points quelconques de l'espace, on peut faire passer une, et une seule, pseudo-droite.

Par trois points quelconques de l'espace non situés sur une même pseudo-droite, on peut faire passer un, et un seul, pseudo-plan.

Toute pseudo-droite qui a deux points dans un pseudo-plan s'y trouve tout entière.

Ainsi que les théorèmes qui résultent de ces trois énoncés, considérons deux pseudo-droites partant du point A, et sur ces deux pseudo-droites deux points B et C. Menons la pseudo-droite BC et soient ka, kb, kc les pseudo-longueurs des trois côtés du triangle curviligne ABC.

Posons

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{Ch} b \operatorname{Ch} c - \operatorname{Ch} a}{\operatorname{Sh} b \operatorname{Sh} c}, \tag{1}$$

et appelons α le pseudo-angle des deux pseudo-droites données. On peut s'assurer par l'analyse que ce pseudo-angle ne change pas lorsqu'on change la position des points B et C sur les pseudo-droites AB et AC. Or, la formule (1) donne, par l'échange progressif des lettres, toutes les relations nécessaires pour calculer trois des six éléments (pseudo-côtés et pseudo-angles) d'un triangle en fonction des trois autres, et la question est déterminée dans le même cas que pour les triangles rectilignes, de sorte que les cas d'égalité des triangles pseudo-rectilignes sont les mêmes que ceux des triangles rectilignes ordinaires; mais cette égalité n'implique jusqu'ici que l'égalité respective des six éléments en question.

Lorsque, dans un pseudo-plan, l'angle de deux pseudo-droites est composé de deux angles, le pseudo-angle total vaut aussi les sommes des deux pseudo-angles partiels. — Le pseudo-angle de zéro est zéro. — Le pseudo-angle d'un angle égal à deux angles droits vaut deux angles droits.

Les considérations qui précèdent suffiraient au besoin pour établir toute la Géométrie dans ce nouvel ordre d'idées, en remplaçant les droites, plans, angles, aires, volumes par les pseudo-droites,..., pseudo-volumes ([1]).

([1]) La pseudo-aire d'un rectangle infiniment petit serait le produit des pseudo-longueurs de ses côtes; de même pour les pseudo-volumes.

En particulier, on démontrerait, d'après Euclide, que la pseudo-droite est la plus courte pseudo-longueur entre deux points, ce que l'on pourrait faire aussi par le calcul intégral, d'après M. Flye Sainte-Marie.

Mais il importe d'examiner ce que deviendrait la considération du mouvement d'un système, rigide ou solide, que l'on peut introduire dans les démonstrations géométriques.

La possibilité du mouvement d'un système solide consiste en ce que l'on peut, sans changer aucun élément linéaire et par conséquent sans qu'aucune ligne ni aucune surface change de forme, 1° faire décrire à un point A de ce système une trajectoire déterminée; 2° fixer d'avance pour tous les points de cette trajectoire la position d'une droite B passant par le point A; 3° fixer d'avance pour tous ces mêmes points la position d'un plan C contenant la droite B.

Or, on peut aussi, sans changer aucun élément pseudo-linéaire (et par conséquent en changeant la forme des lignes et des surfaces de manière que les pseudo-droites et pseudo-plans restent tels), 1° faire décrire à un point A du système une trajectoire déterminée; 2° fixer d'avance pour tous les points de cette trajectoire la position d'une pseudo-droite B passant par le point A; 3° fixer d'avance pour tous ces mêmes points la position d'un pseudo-plan C contenant la pseudo-droite B.

Pour le démontrer, on appellera m, n, p les coordonnées du point A dans sa première position; m', n', p' ses nouvelles coordonnées dans une position quelconque sur la trajectoire qu'il doit décrire; on écrira les équations des pseudo-droites B et B′, des pseudo-plans C et C′, les accents indiquant les positions nouvelles. Considérant ensuite un point quelconque XYZ dans la première position, on pourra calculer en fonction de m, n, p, et des constantes contenues dans B et C : 1° le pseudo-angle du pseudo-plan BXYZ avec le pseudo-plan C; 2° le pseudo-angle de B avec (AXYZ); 3° la pseudo-longueur (A — XYZ). On pourra, dans la position A′, chercher le point X′Y′Z′, tel que ces mêmes éléments (B′X′Y′Z′ — C′), (B′ — A′X′Y′Z′), (A′ — X′Y′Z′) soient respectivement égaux aux précédents. Alors on effectuera le mouvement de telle manière que tous les points, tels que XYZ, se transportent aux points correspondants X′Y′Z′.

Cherchant, dans la première position, la pseudo-distance α de deux points XYZ, $X_1 Y_1 Z_1$, et dans la seconde la pseudo-distance α' des deux points correspondants $X'Y'Z'$, $X'_1 Y'_1 Z'_1$, on trouvera $\alpha = \alpha'$, ce qui prouve que le mouvement peut se faire ainsi qu'on l'a annoncé. On se trouve maintenant en possession, pour les pseudo-droites,..., des mêmes principes que l'on admettait pour les droites,..., antérieurement au *postulatum* d'Euclide. S'il existait donc une démonstration de ce *postulatum* (ou, ce qui revient au même, de la somme des angles d'un triangle rectiligne) basée uniquement sur lesdits principes, on pourrait la répéter pour un triangle pseudo-rectiligne et l'on démontrerait que dans un tel triangle la somme des trois pseudo-angles vaut deux angles droits, ce qui n'est pas exact.

Nous avons cru inutile d'allonger cette Note en développant les calculs, identiques à ceux que l'on serait obligé de faire dans la Géométrie abstraite pour vérifier les propriétés correspondantes des lignes droites et des plans. Cette interprétation toute géométrique et réelle des formules non-euclidiennes se distingue surtout de celles qui l'ont précédée par cette circonstance : que l'impossibilité de trouver une contradiction dans le système non-euclidien doit se manifester, si elle existe, après un nombre *limité* de calculs déterminés. En effet, si ceux que nous avons indiqués plus haut réussissent (et l'on n'en saurait douter après avoir lu le livre de M. Flye Sainte-Marie), à toute contradiction ultérieure dans la Géométrie imaginaire correspondrait une contradiction dans la Géométrie réelle.

On peut donc dire maintenant avec certitude que l'axiome XI d'Euclide n'est pas une conséquence des principes antérieurs de la Géométrie et ne peut être introduit que comme principe expérimental séparé.

Nous sommes loin de prétendre cependant que cette certitude résulte uniquement des explications que nous venons de donner et qui ne sont que le développement ou, si l'on veut, la matérialisation des idées de nos devanciers. Ces explications, qui étaient nécessaires pour nous, ne le sont peut-être pas pour d'autres, et nous ne les considérerions comme formant une méthode nouvelle que si nos devanciers, et en particulier M. Flye Sainte-Marie, refusaient d'y voir le complément naturel de leurs propres idées.

Dans toute la théorie de l'axiome XI d'Euclide qui précède, on admet sans discussion les principes antérieurs, mais une autre partie de la Géométrie philosophique consiste dans l'examen de ces principes, l'étude de leur origine, et leur réduction au moindre nombre possible. Cette partie, malgré de nombreux et remarquables travaux, est moins avancée que celle qui se rapporte au *postulatum*. M. Flye Sainte-Marie s'en occupe aussi dans un Chapitre complémentaire, mais il n'entre pas véritablement dans le fond de la question. Il ne cherche point à réduire le nombre des principes fondamentaux au minimum; car ceux qu'il admet et auxquels il ramène les autres sont évidemment trop nombreux.

Nous signalerons cependant :

1° Son premier principe : l'admission *a priori* de la notion du plus et du moins dans les longueurs comptées sur des lignes quelconques, principe qui nous paraît effectivement indispensable dans l'état actuel de cette partie de la Science et qui d'ordinaire n'est pas mentionné explicitement. Notons d'ailleurs que, eu égard à l'usage qu'on doit en faire, cette notion peut être remplacée par celle du plus et du moins dans la distance absolue de deux points mathématiques (abstraction faite de tout moyen de mesure).

2° Sa démonstration de l'existence du plan, qui est exacte, bien qu'elle ne soit peut-être pas complétement nouvelle.

En somme, il nous paraît incontestable que l'Ouvrage de M. Flye Sainte-Marie contribuera efficacement aux progrès ultérieurs de la Géométrie philosophique, et nous pensons que l'Auteur obtiendra des résultats importants s'il veut bien appliquer les facultés d'abstraction dont il est si remarquablement doué à l'étude plus approfondie des matières qu'il a effleurées dans son Chapitre complémentaire.

DE TILLY.