Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Painvin

Étude d'un complexe du second ordre

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 368-382

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__368_1>

MÉLANGES.

ÉTUDE D'UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE;

PAR M. PAINVIN.

1. Proposons-nous la question suivante :

On donne un ellipsoïde; étudier la position des droites par lesquelles on peut mener à cet ellipsoïde des plans tangents rectangulaires.

Si (D) est une des droites par laquelle on peut mener deux plans tangents rectangulaires, un troisième plan tangent, perpendiculaire à cette droite, la rencontrera en un point situé sur la sphère (S), lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde donné; de sorte que, si S est le point de rencontre et que D soit le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde donné sur la droite (D), on aura $\overline{OS}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DS}^2$. Mais la distance $\overline{DS}$ est visiblement égale à la distance du centre O au plan tangent perpendiculaire à la droite; par conséquent, si α, β, γ sont les angles de la droite (D) avec les axes Ox, Oy, Oz de l'ellipsoïde, et si

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

est l'équation de cet ellipsoïde, on a

$$\overline{OS}^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad \overline{DS}^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma;$$

par suite, en désignant par δ la distance du centre à la droite (D), on a la relation caractéristique

$$(1^\circ) \qquad \delta^2 = a^2 + b^2 + c^2 - (a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma).$$

Il résulte de là que δ^2 doit être inférieure à $(a^2 + b^2 + c^2)$; donc :

Théorème I. — *Les droites réelles, satisfaisant à la question, doivent toutes pénétrer dans l'intérieur de la sphère (S), lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde donné.*

2. Si maintenant nous représentons la droite (D) par des équations de la forme

$$(2^\circ) \qquad \begin{cases} x = mz + p, \\ y = nz + q, \\ nx - my = r, \end{cases}$$

où

$$r = np - mq,$$

on a

$$\frac{\cos\alpha}{m} = \frac{\cos\beta}{n} = \frac{\cos\gamma}{1} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}, \quad \delta^2 = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{m^2 + n^2 + 1}.$$

En substituant ces valeurs dans l'égalité (1°), mise d'abord sous la forme

$$\delta^2 = (b^2+c^2)\cos^2\alpha + (c^2+a^2)\cos^2\beta + (a^2+b^2)\cos^2\gamma,$$

il vient

$$(3^\circ) \qquad p^2+q^2+r^2 = (b^2+c^2)m^2 + (c^2+a^2)n^2 + (a^2+b^2).$$

L'assemblage des droites (D) constitue un *complexe* défini par l'équation (3°); ce complexe est du second ordre; je me propose d'en indiquer ici les propriétés.

La théorie des complexes généraux du second ordre, abordée pour la première fois par Plücker (*Neue Geometrie*), a été complétée par MM. Klein et Lie (*Mathematische Annalen*); voir le *Bulletin des sciences mathématiques*, t. II, p. 72.

L'étude actuelle a pour objet un complexe particulier du second ordre; mais il importe de remarquer que ce complexe, qui a son point de départ dans une définition géométrique bien précise, présente les rapports les plus intimes soit avec les surfaces homofocales, soit avec la surface des ondes, et apporte aux propriétés déjà si nombreuses de ces surfaces un contingent assez considérable de propriétés nouvelles. Dans cette recherche, j'ai principalement en vue la situation des droites *réelles* du complexe; c'est là ce qui spécialise et caractérise cette nouvelle étude. J'ai abordé cette question de plusieurs manières; la méthode purement analytique se trouve développée dans un Mémoire qui sera inséré dans un autre recueil.

3. Si x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées de deux points de la droite (D), on a

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & p = \frac{x_0 z_1 - z_0 x_1}{z_1 - z_0}, \quad q = \frac{y_0 z_1 - z_0 x_1}{z_1 - z_0}, \quad r = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{z_1 - z_0}; \\ & m = \frac{x_1 - x_0}{z_1 - z_0}, \quad n = \frac{y_1 - y_0}{z_1 - z_0}; \end{aligned} \right.$$

si u_0, v_0, w_0 et u_1, v_1, w_1 sont les coordonnées de deux plans passant par la même droite (D), on a

$$(1\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} & p = \frac{v_0 - v_1}{v_0 u_1 - v_1 u_0}, \quad q = \frac{u_1 - u_0}{v_0 u_1 - v_1 u_0}, \quad r = \frac{w_0 - w_1}{v_0 u_1 - v_1 u_0}; \\ & m = \frac{v_0 w_1 - w_0 v_1}{v_0 u_1 - v_1 u_0}, \quad n = \frac{u_1 w_0 - u_0 w_1}{v_0 u_1 - v_1 u_0}. \end{aligned} \right.$$

Eu égard à ces valeurs, l'équation (3°) prend l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} (y_0 z_1 - z_0 y_1)^2 + (z_0 x_1 - z_1 x_0)^2 + (x_0 y_1 - x_1 y_0)^2 \\ \quad = (b^2 + c^2)(x_1 - x_0)^2 + (c^2 + a^2)(y_1 - y_0)^2 + (a^2 + b^2)(z_1 - z_0)^2 ; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} (b^2 + c^2)(v_0 w_1 - v_1 w_0)^2 + (c^2 + a^2)(w_0 u_1 - w_1 u_0)^2 \\ \quad + (a^2 + b^2)(u_0 v_1 - u_1 v_0)^2 = (u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 + (w_1 - w_0)^2 . \end{cases}$$

4. Lorsque, dans l'équation (2), on regarde x_1, y_1, z_1 comme des coordonnées variables et qu'on supprime les indices, on a l'équation suivante :

$$(4)(\mathrm{C})\quad \begin{cases} (z_0 y - y_0 z)^2 + (x_0 z - z_0 x)^2 + (y_0 x - x_0 y)^2 \\ \quad = (b^2 + c^2)(x - x_0)^2 + (c^2 + a^2)(y - y_0)^2 + (a^2 + b^2)(z - z_0)^2 , \end{cases}$$

laquelle représente un cône du second ordre, lieu des droites du complexe passant par le point fixe P (x_0, y_0, z_0) ; nous dirons que c'est un cône du complexe, et nous le désignerons par (C).

5. Si, dans l'équation (3), on regarde u, v, w comme des coordonnées variables et qu'on supprime les indices, on a l'équation suivante :

$$(5)(\Gamma)\quad \begin{cases} (b^2 + c^2)(w_0 v - v_0 w)^2 + (c^2 + a^2)(u_0 w - w_0 u)^2 \\ \quad + (a^2 + b^2)(v_0 u - u_0 v)^2 = (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 + (w - w_0)^2 , \end{cases}$$

laquelle représente une conique, enveloppe des droites du complexe situées dans le plan Π (u_0, v_0, w_0) ; nous dirons que c'est une conique du complexe, et nous la désignerons par (Γ).

6. Nous ferons de suite les remarques suivantes :

1° Si, d'un point P, on circonscrit un cône à l'ellipsoïde donné, le cône (C) du complexe sera évidemment le lieu des droites par lesquelles on peut mener des plans tangents rectangulaires au cône circonscrit ; et, lorsque

$$\mathrm{M}x^2 + \mathrm{N}y^2 + \mathrm{P}z^2 = 0$$

est l'équation du premier cône rapporté à ses plans principaux, on sait que l'équation du second est

$$\mathrm{M}(\mathrm{N} + \mathrm{P})x^2 + \mathrm{N}(\mathrm{P} + \mathrm{M})y^2 + \mathrm{P}(\mathrm{M} + \mathrm{N})z^2 = 0.$$

2° Si P_0 est un des points pour lesquels le cône du complexe se réduit à deux plans, et si Π_0 est un des plans du système, la conique (Γ) située dans le plan Π_0 se réduira à deux points, dont un est le point P_0; car il y a une infinité de droites du complexe situées dans le plan Π_0 et passant par le point P_0.

3° Si Π_0 est un des plans pour lesquels la conique (Γ) se réduit à deux points, et que P_0 soit un de ces points, le cône du complexe, ayant son sommet en P_0, se réduira à un système de deux plans, dont un sera le plan Π_0.

7. Si, d'un point P, on mène le cône circonscrit à l'ellipsoïde, le cône (C) du complexe aura les mêmes plans principaux que le cône circonscrit [6]; on sait d'ailleurs que les plans principaux de ce dernier cône sont les plans tangents aux trois surfaces homofocales qui passent par son sommet; donc :

Théorème II. — *Les droites du complexe, passant par un même point* P, *forment un cône* (C) *du second ordre; les plans principaux du cône* (C) *sont les plans tangents, en son sommet, aux trois surfaces homofocales de l'ellipsoïde donné qui passent par ce sommet.*

Le centre de la conique, définie par l'équation (5), est :

$$u_0 u + v_0 v + w_0 w - (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) = 0,$$

ou

$$\frac{x_1}{u_0} = \frac{y_1}{v_0} = \frac{z_1}{w_0} = \frac{1}{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2};$$

on voit que ce point est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde sur le plan Π; donc :

Théorème III. — *Les droites du complexe, situées dans un plan* Π, *enveloppent une conique* (Γ) *dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre* O *de l'ellipsoïde sur le plan* Π.

8. L'équation (5) de la conique (Γ) peut s'écrire :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1) \\ &\quad + (a^2u_0^2 + b^2v_0^2 + c^2w_0^2 - 1)(u^2 + v^2 + w^2) \\ &\quad - 2(u_0 u + v_0 v + w_0 w)(a^2 u u_0 + b^2 v_0 v + c^2 w w_0 - 1) = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation nous montre que :

Théorème IV. — *La conique* (Γ) *du complexe, située dans un plan*

Π, *est inscrite dans un cône ayant pour sommet le pôle du plan Π par rapport à l'ellipsoïde donné, et circonscrit à une certaine surface homofocale de cet ellipsoïde; elle est également inscrite dans un cylindre perpendiculaire au plan Π_0 et circonscrit à la même surface homofocale que le cône précédent.*

9. Si l'on forme, relativement au cône défini par l'équation (4), l'équation en s, savoir

$$s^3-(A+A'+A'')s^2+(A'A''-B^2+A''A-B'^2+AA'-B''^2)s \\ +AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B''=0,$$

on trouve ici

$$s^3-2S_0s^2+(S_0^2-G_0)s+(H_0+S_0G_0)=0, \tag{7}$$

après avoir posé

$$\left\{\begin{aligned} S&=x^2+y^2+z^2-(a^2+b^2+c^2),\\ G&=(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2-(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2),\\ H&=b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2-a^2b^2c^2.\end{aligned}\right. \tag{8}$$

On conclut immédiatement de là que :

THÉORÈME V. — *Le lieu des points pour lesquels le cône (C) se réduit à un système de deux plans est la surface*

$$SG+H=0; \tag{9}(\Delta)$$

les plans tangents à cette surface sont les plans Π_0 pour lesquels la conique (Γ) se réduit à un système de deux points.

Cette proposition est un cas particulier du théorème analogue démontré par Plücker (*Neue Geometrie*) pour les complexes généraux du second ordre.

Ajoutons de suite que :

THÉORÈME VI. — *Les plans auxquels se réduisent les cônes du complexe touchent la surface Δ; et les deux points auxquels se réduisent les coniques du complexe appartiennent également à la surface Δ; les réciproques sont vraies.*

Cette proposition est une conséquence immédiate de la remarque 3° [n° 6] et du théorème précédent.

10. Si l'on pose

$$A = b^2 + c^2, \quad B = c^2 + a^2, \quad C = a^2 + b^2,$$

la surface Δ pourra être représentée par l'une ou l'autre des équations

$$(10)\qquad \left\{ \begin{array}{l} (x^2+y^2+z^2)(Ax^2+By^2+C^2z) \\ \quad -[A(B+C)x^2+B(C+A)y^2+C(A+B)z^2] \\ \quad +ABC = 0 \quad \text{(équation ponctuelle)}, \end{array} \right.$$

$$(11)\qquad \left\{ \begin{array}{l} (u^2+v^2+w^2)(BCu^2+CAv^2+ABw^2) \\ \quad -[(B+C)u^2+(C+A)v^2+(A+B)w^2] \\ \quad +1 = 0 \quad \text{(équation tangentielle)}. \end{array} \right.$$

Ces équations mettent en évidence les propriétés suivantes :

THÉORÈME VII. — *La surface Δ est la* SURFACE DES ONDES *relativement à l'ellipsoïde directeur*

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire qu'*on l'obtient en portant, à partir du centre, sur la perpendiculaire à chaque section centrale des distances égales aux longueurs des axes de l'ellipse qu'elle détermine.*

Cette surface passe par l'intersection (imaginaire) de l'ellipsoïde primitivement donné avec la sphère lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits; elle est aussi inscrite dans la développable circonscrite à ce dernier ellipsoïde et au cercle imaginaire de l'infini.

On sait que la surface Δ admet 16 points doubles (4 réels, 8 imaginaires, 4 à l'infini) et 16 plans tangents doubles, dont 4 réels; cette surface se compose de deux nappes distinctes, renfermées entre les deux surfaces

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 0,$$
$$(b^2+c^2)x^2 + (c^2+a^2)y^2 + (a^2+b^2)z^2 - (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 0;$$

ces deux nappes se raccordent aux 4 *points doubles coniques* réels.

Nous appellerons nappe inférieure celle qui est la plus rapprochée du centre de l'ellipsoïde.

11. Considérons un point a réel de la nappe supérieure de Δ; le cône du complexe, ayant son sommet en a, se réduit à deux plans, soit Π_0 l'un d'eux; la conique Γ_0, située dans le plan Π_0, se composera de deux points, a et a', et les deux points a et a' appartiendront à la surface Δ. Or les deux plans auxquels se réduit le cône du complexe doivent toucher la surface Δ; l'un d'eux, au moins, touchera la nappe inférieure, il sera donc réel; il en sera, par conséquent, de même de l'autre, puisque l'équation qui les donne est à coefficients réels. La conique (a, a') correspondante est alors réelle, car un de ses points, a, est réel; par suite, le plan auquel elle correspond doit toujours toucher la nappe inférieure de Δ.

Si le point réel a est sur la nappe inférieure de Δ, le cône du complexe, ayant son sommet en a, se réduit encore à deux plans; un de ces plans, au moins, devra toucher la nappe supérieure; il sera donc imaginaire, et l'autre le sera également, puisque l'équation qui les donne est à coefficients réels. La conique correspondante à l'un quelconque de ces plans se composera d'un point réel et d'un point imaginaire.

Ainsi :

THÉORÈME VIII. — *Les points de la* NAPPE SUPÉRIEURE *de Δ sont ceux pour lesquels le cône* (C) *se réduit à deux plans réels; ces deux plans touchent la nappe inférieure. Les plans tangents réels à la nappe supérieure sont ceux pour lesquels la conique* (Γ) *se réduit à deux points imaginaires.*

Les points de la NAPPE INFÉRIEURE *sont ceux pour lesquels le cône* (C) *se réduit à deux plans imaginaires; ces deux plans touchent (imaginairement) la nappe supérieure. Les plans tangents réels à la nappe inférieure sont ceux pour lesquels la conique* (Γ) *se réduit à deux points réels; ces points appartiennent à la nappe supérieure.*

12. Soit un point a de la nappe supérieure de Δ, et Π_0 un des plans du système correspondant; le plan Π_0 touche la nappe inférieure, soit C le point de contact; il coupe, en outre, la nappe supérieure suivant une courbe δ_1. Le cône du complexe, ayant son sommet en C, se réduit à deux plans imaginaires, dont les intersections par le plan Π_0 sont des droites de complexe qui doivent passer par le point C, et respectivement par les points réels a et a' de la conique correspondante au plan Π_0; ces deux droites seraient donc réelles, ce qui ne peut avoir lieu à moins que l'intersection des deux plans imaginaires ne coïncide avec la droite aa'.

Si maintenant on imagine le sommet du cône se déplaçant sur la courbe δ_1, le cône se réduit à deux plans réels, dont les intersections par le plan Π_0 passent par les points a et a'; lorsque le sommet P se rapproche du point a, par exemple, la droite Pa devient tangente en a à la courbe δ_1, et elle est, en outre, l'intersection des deux plans du complexe correspondant au point a, puisque l'un d'eux est le plan Π_0.

Donc :

Théorème IX. — *Lorsque le sommet du cône du complexe est en un point de la surface Δ, ce cône se réduit à deux plans dont la droite d'intersection touche la surface Δ au point considéré; cette droite est, en outre, normale à l'une des surfaces homofocales qui passent par ce point.*

Cette seconde partie de la proposition est une conséquence évidente de la remarque 1° [n° 6]; car si le cône du complexe se réduit à deux plans, ces deux plans passent visiblement par un des axes du cône circonscrit.

Nous pouvons encore énoncer la proposition suivante, qui résulte des considérations précédentes et du théorème III :

Théorème X. — *Lorsqu'un plan est tangent à la surface Δ, la conique (Γ) se réduit à deux points a, a', situés sur la surface Δ; la droite qui les joint est tangente à une des nappes de la surface, et normale à une des surfaces homofocales qui passent par le point de contact; elle est, en outre, l'intersection des deux plans auxquels se réduit le cône du complexe ayant son sommet au point de contact. Le lieu des milieux des segments aa' est la podaire du centre de l'ellipsoïde relativement à la surface Δ.*

13. Nous préciserons encore mieux la position des droites réelles du complexe par les propositions qui suivent :

Théorème XI. — *Les droites réelles du complexe passent toutes entre les deux nappes de la surface Δ, sans jamais pénétrer dans l'intérieur de la nappe inférieure; les positions limites de ces droites sont tangentes aux nappes de Δ.*

En effet, une droite réelle (D) ne peut pas pénétrer dans la nappe intérieure; car si cela pouvait arriver, elle rencontrerait cette nappe en un certain point I; pour ce point I le cône (C) du complexe se réduit à deux plans imaginaires dont l'arête touche Δ en I; mais la droite (D), qui passe par le point I, doit alors appartenir à ce système de deux plans; et, comme elle est réelle, elle ne peut que coïncider avec leur arête; l'hypothèse faite est donc inadmissible.

Supposons maintenant la droite (D) réelle et extérieure à la surface Δ; menons alors un plan par cette droite et le centre O de l'ellipsoïde; ce plan coupera la nappe extérieure de Δ suivant une certaine courbe δ'; les cônes du complexe dont les sommets sont sur δ' se décomposent en des plans réels, dont les intersections par le plan considéré seront autant de droites réelles du complexe situées dans ce plan. La conique (Γ) correspondant à ce plan est donc réelle, et son centre est le point O [n° 7]. Or cette conique ne peut pas être une hyperbole, car on pourrait alors lui mener des tangentes des points situés dans le voisinage du point, et il y aurait ainsi des droites réelles du complexe pénétrant dans l'intérieur de la 2e nappe de Δ; ce qui est contraire à la première partie de la proposition. Cette conique, qui est une ellipse, doit toucher la droite (D); or, si cette droite (D) est extérieure à la surface Δ, et, par suite, à la courbe δ', l'ellipse interceptera sur cette courbe δ' une certaine portion d'arc; mais les divers points de cet arc donnent lieu à des droites réelles, issues de ces points, qui devraient toucher l'ellipse; ce qui est impossible. Il résulte de là que la droite (D) ne peut être supposée extérieure à la surface Δ.

M. Darboux, en appelant mon attention sur le lieu géométrique énoncé au commencement, m'avait signalé la propriété dont je viens de donner la démonstration.

Théorème XII. — *Lorsque le plan Π est extérieur à la surface Δ, la conique (Γ) correspondante est une ellipse imaginaire; quand il passe entre les deux nappes de Δ, la conique est une hyperbole; enfin, quand il pénètre dans la nappe intérieure, la conique est une ellipse réelle.*

Lorsque le plan Π est extérieur à Δ, il n'y a, dans ce plan, aucune droite réelle du complexe, puisque ces droites doivent passer entre les deux nappes de Δ; donc la conique (Γ) est une ellipse imaginaire.

Si le plan Π pénètre dans la nappe inférieure de Δ, il coupe les deux nappes suivant les courbes δ et δ_0 respectivement, la première de ces courbes enveloppant la seconde. La conique Γ est alors une ellipse réelle renfermée entre les deux courbes δ et δ_0. En effet, la conique Γ ne peut pas être une hyperbole; car si cette hyperbole ne renferme pas intérieurement la courbe δ_0, on pourrait lui mener des tangentes des points situés dans l'intérieur de δ_0; il y aurait donc des droites réelles du complexe pénétrant dans la nappe inférieure de Δ; si cette hyperbole renferme intérieurement la courbe δ_0, elle interceptera sur la courbe δ_1 une portion d'arc, des points de laquelle on ne pourrait pas lui mener de tangentes, ce qui ne peut avoir lieu. La conique est donc une ellipse; et l'on voit, en raisonnant semblablement, que cette ellipse est réelle, et comprise entre les courbes δ_1 et δ_0.

On conclut de là que, si le plan Π vient passer entre les deux nappes de Δ, la conique Γ est une hyperbole, et cette hyperbole doit être extérieure à la section de la nappe supérieure par le plan Π (théorème VIII).

14. Théorème XIII. — *Lorsque le sommet du cône est à l'infini sur une direction* (α, β, γ), *le cône se réduit à un cylindre de révolution, dont le cercle directeur est l'intersection, avec la sphère lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde donné, du plan tangent à cet ellipsoïde mené perpendiculairement à la direction choisie.*

Lorsque le plan Π *passe par le centre de l'ellipsoïde, la conique* (Γ) *correspondante est une ellipse réelle ayant pour centre celui de l'ellipsoïde.*

En effet, le sommet P du cône étant à l'infini sur une direction (α, β, γ), imaginons le cylindre circonscrit parallèle à cette direction; le cône du complexe est alors le lieu des droites par lesquelles on peut mener des plans tangents rectangulaires à ce cylindre; or, si l'on considère la section droite passant, par exemple, par le centre O de l'ellipsoïde, la trace du cylindre du complexe sera le cercle lieu des angles droits circonscrits à l'ellipse section du cylindre circonscrit par le même plan; quant au rayon du cercle, il est donné par la formule (1°) [n° 1]; donc, etc.

La seconde partie de la proposition énoncée résulte du théorème III.

15. Les sections de la surface Δ par les plans principaux de l'el-

lipsoïde sont :

$$(12)\quad \begin{cases} x=0, \\ y^2+z^2=A, \\ By^2+Cz^2=BC, \end{cases} \quad \begin{cases} y=0, \\ x^2+z^2=B, \\ Ax^2+Cz^2=AC, \end{cases} \quad \begin{cases} z=0, \\ x^2+y^2=C, \\ Ax^2+By^2=AB. \end{cases}$$

THÉORÈME XIV. — *Lorsque le sommet du cône est à l'infini sur un des axes principaux de l'ellipsoïde donné, le cône du complexe se réduit à un cylindre ayant pour trace le cercle de la surface* Δ *situé dans le plan perpendiculaire à l'axe considéré.*

Lorsque le plan Π *se confond avec un des plans principaux de l'ellipsoïde donné, la conique* (Γ) *coïncide avec l'ellipse de la surface* Δ *située dans le plan principal considéré.*

La première partie de cette proposition résulte du théorème XIII.

Quant à la seconde partie, remarquons qu'un point du cercle de Δ, situé dans le plan principal considéré, donne lieu à un système de deux plans perpendiculaires à ce plan principal ; ceci résulte de la première partie du théorème. Un point de l'ellipse de Δ, située dans le même plan principal, donnera lieu à un système de deux plans symétriques par rapport à ce plan principal, et inclinés sur ce plan, puisque le point n'appartient pas à la trace du cylindre; l'arête de ces deux plans sera donc située dans le plan principal ; et, comme elle doit toucher la surface Δ, ce sera une tangente à l'ellipse de Δ ; donc cette ellipse est précisément la conique (Γ).

16. Les points doubles de la surface Δ, situés à distance finie, sont dans les plans principaux de la surface, et se trouvent à l'intersection de l'ellipse et du cercle situés dans le plan principal considéré.

Si l'on suppose $a > b > c$, les points doubles réels sont situés dans le plan principal zOx perpendiculaire à l'axe moyen, et sont les intersections des deux courbes

$$(13)\quad (C_0)\ x^2+z^2=B \text{ (cercle)}, \quad Ax^2+Cz^2=AC \text{ (ellipse)}. \ (E_0)$$

Par ces points passe l'hyperbole focale de l'ellipsoïde donné, laquelle hyperbole y coupe orthogonalement l'ellipse.

THÉORÈME XV. — *Le lieu des points pour lesquels les cônes du complexe sont des cônes* RÉELS *de révolution est l'hyperbole focale de l'ellip-*

soïde donné; l'axe du cône est la tangente à l'hyperbole focale au point où se trouve le sommet; les génératrices, situées dans le plan zOx, sont tangentes à l'ellipse de la surface Δ qui se trouve dans le même plan. Le cône devient imaginaire quand le sommet pénètre dans l'intérieur de cette ellipse.

En effet, si P est le sommet d'un des cônes de révolution, le cône circonscrit correspondant sera également de révolution; cela résulte de la remarque 1° [n° 6]; mais les sommets de ces derniers cônes sont sur les focales de l'ellipsoïde donné; il en est donc de même pour les cônes de révolution du complexe. D'après la nature et la position de ces focales, et le théorème XI, on conclut que l'hyperbole focale convient seule aux cônes de révolution réels. Si l'on considère un de ces cônes, les génératrices situées dans la section principale zOx devront toucher l'ellipse (E_0), (théor. VIII); et comme cette ellipse est homofocale avec l'hyperbole focale, la bissectrice de l'angle de ces deux génératrices, c'est-à-dire l'axe du cône, sera tangente à l'hyperbole focale au sommet du cône.

17. Théorème XVI. — *Les plans* réels Π, *pour lesquels les coniques* (Γ) *du complexe sont des cercles, sont des plans perpendiculaires aux asymptotes de l'hyperbole focale, et les centres des cercles sont sur ces asymptotes. Les cercles cessent d'être réels, lorsque la trace du plan* Π *se trouve au delà de la tangente commune au cercle et à l'ellipse situés dans le plan* zOx. *Lorsque le cercle est réel, son diamètre est la portion de la trace du plan* Π *interceptée par le cercle de la surface* Δ.

En effet, la conique (Γ) est la trace sur le plan auquel elle appartient d'un cylindre perpendiculaire à ce plan et circonscrit à une certaine surface homofocale de l'ellipsoïde donné (théor. IV); or, si la conique (Γ) est un cercle, le cylindre sera de révolution et, par suite, son sommet se trouvera à l'infini sur la focale de la surface homofocale en question; mais cette dernière a les mêmes focales que l'ellipsoïde donné; donc, etc. Le reste de la proposition résulte du théorème III et de cette remarque, que, pour les points où la trace du plan Π rencontre le cercle (C_0), le cône du complexe se réduit à deux plans perpendiculaires à zOx, et que l'arête de ces deux plans doit toucher la conique Γ (ou cercle) située dans le plan Π.

18. Si l'on considère un point quelconque a de la nappe supé-

rieure de Δ, et le système de plans du complexe correspondant à ce point, les deux plans toucheront la nappe inférieure de Δ; or ces deux plans resteront toujours distincts, tant que le point a n'appartiendra pas en même temps à la nappe inférieure; par conséquent les points doubles de la surface Δ seront les seuls pour lesquels le cône du complexe se réduit à deux plans coïncidents.

Si l'on imagine un plan quelconque Π_0 tangent à la nappe inférieure de Δ, la conique (Γ_0) se réduit à un système de deux points, qui sont les intersections avec la nappe supérieure de la droite joignant le point de contact au pied de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipsoïde sur le plan Π_0; les deux points qui constituent la conique (Γ) seront donc toujours distincts, tant que le plan Π_0 n'arrivera pas à toucher la nappe supérieure; par conséquent, les seuls plans pour lesquels la conique (Γ) se réduit à deux points coïncidents sont les plans tangents doubles de la surface Δ.

Ceci établi, qu'on suppose tracés l'ellipse (E_0) et le cercle (C_0) appartenant à la surface Δ et situés dans le plan zOx, et qu'on ait égard aux théorèmes VI, VIII, IX, on se rendra compte immédiatement de l'exactitude des propositions suivantes :

Théorème XVII. — *Les points pour lesquels les cônes* réels *du complexe se réduisent à deux plans coïncidents sont les quatre points doubles réels de la surface Δ, points doubles coniques qui sont les intersections du cercle (C_0) et de l'ellipse (E_0) appartenant à Δ, et situés dans le plan zOx de l'hyperbole focale de l'ellipsoïde donné.*

Si l'on considère un de ces points, D par exemple, le plan Π_d du complexe est perpendiculaire au plan zOx et touche en D l'ellipse (E_0); toutes les droites du complexe, qui passent par D, sont situées dans le plan Π_d. La conique (Γ_d) du complexe, située dans le plan Π_d, se réduit à deux points, dont un est le point D, et l'autre est le point D', intersection du cercle C_0 avec la tangente en D, à l'ellipse E_0. Le cône du complexe, dont le sommet est en D', se réduit à deux plans réels, perpendiculaires à zOx, dont les traces sont les tangentes menées du point D' à l'ellipse E_0.

Théorème XVIII. — *Les plans pour lesquels la conique du complexe se réduit à deux points coïncidents sont les quatre plans doubles* réels *de la surface Δ; ces plans doubles, curvi-tangents, sont perpendiculaires au plan zOx, et leurs traces sont les tangentes communes au cercle (C_0) et à l'ellipse (E_0).*

Si l'on considère une de ces tangentes, τ par exemple, le plan Π_δ, perpendiculaire à zOx, ayant τ pour trace et touchant le cercle (C_0) en a_0, aura sa conique (Γ) réduite à deux points confondus en a_0. Toutes les droites du complexe, situées dans le plan Π_δ, passent par le point a_0; et, par suite, les cônes du complexe dont le sommet est sur Π_δ sont tous touchés par ce plan suivant la droite qui joint le sommet au point a_0. Lorsque le sommet du cône se trouve en un des points où la droite τ touche l'ellipse ou le cercle, le cône se réduit à deux plans réels perpendiculaires à zOx; une des traces est la tangente commune, l'autre est la tangente à l'ellipse ou au cercle, suivant que le point considéré est sur le cercle ou sur l'ellipse.

19. Les propriétés caractéristiques que nous venons de signaler permettent de se faire une idée fort nette de la situation des droites réelles du complexe. Pour cela, on imaginera un plan Π dans une situation déterminée, puis on supposera le sommet P du cône du complexe se déplaçant dans ce plan.

Il sera bon, dans cette discussion, d'avoir égard à la propriété suivante :

« La conique (Γ), correspondant à un plan Π, touche en quatre » points (réels ou imaginaires) la section de la surface Δ par ce » plan. Un cône (C), ayant son sommet en un point quelconque, a » quatre de ses génératrices (réelles ou imaginaires) touchant la » surface Δ. »

20. Cette recherche n'est, pour ainsi dire, qu'une Introduction à l'étude des complexes particuliers du second ordre dérivant de la définition géométrique donnée au commencement de cet article. Il reste encore de nombreuses questions à aborder, sur lesquelles je reviendrai. Ainsi, on a à étudier la *congruence* formée par les arêtes des systèmes de plans du complexe; les propriétés des pôles et des polaires relativement à ce complexe, etc.; on a aussi à chercher quelles sont les propriétés essentielles qui caractérisent ce complexe particulier et le différentient des complexes généraux du second ordre, etc; on pourrait encore se proposer l'application de cette même définition géométrique au cas des hyperboloïdes et des paraboloïdes, en ayant toujours en vue la situation des droites réelles du complexe correspondant, etc.