FÉLIX KLEIN

Sur la géométrie dite non euclidienne

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 341-351
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__341_1>

MÉLANGES.

SUR LA GÉOMÉTRIE DITE NON EUCLIDIENNE;

PAR FÉLIX KLEIN (1).

Les développements suivants sont relatifs à la Géométrie dite ***non euclidienne*** de Gauss, de Lobatchefsky, de J. Bolyai, et aux considérations qui s'y rattachent, présentées par Riemann et par Helmholtz sur les fondements de notre Géométrie. Nous ne poursuivrons pas toutefois les spéculations philosophiques qui ont conduit aux travaux en question; notre but est surtout de présenter les résultats mathématiques de ces recherches, en tant qu'ils se rapportent à la théorie des parallèles, sous une forme nouvelle et intuitive, et de rendre claire et accessible à tous l'intelligence de cet ensemble de vérités. La voie qui nous y conduira est la *Géométrie projective*, dont nous établirons l'indépendance par rapport à la question de la théorie des parallèles. On peut maintenant, à l'exemple de Cayley, construire une détermination métrique projective générale, relative à une surface du second degré choisie à volonté, comme *surface fondamentale*. Cette détermination métrique projective fournit, suivant l'espèce de la surface du second degré employée, une image pour les différentes théories des

(1) Extrait des *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, année 1871, n° 17, 30 août.

parallèles établies dans les travaux dont nous parlons. Mais elle n'est pas seulement une image de ces théories, elle en révèle, en outre, la nature intime.

I. — *Les différentes théories des parallèles.*

L'axiome XI d'Euclide est, comme on sait, équivalent à ce théorème, que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits. Or Legendre a réussi à démontrer ([1]) que la somme des angles d'un triangle ne peut être plus grande que deux droits; il a fait voir, de plus, que, si dans un seul triangle la somme des angles vaut deux droits, il en sera de même pour la somme des angles de tout triangle. Mais il n'a pas pu prouver que la somme des angles ne saurait être moindre que deux droits.

Une série d'idées analogue semble avoir servi de point de départ aux recherches de Gauss sur le même objet. Gauss avait bien compris qu'il était réellement impossible de démontrer le théorème de l'égalité de la somme des angles d'un triangle à deux angles droits; que l'on pouvait, au contraire, construire une géométrie conséquente avec elle-même, et dans laquelle cette somme serait moindre. Il appelait cette géométrie la *Géométrie non euclidienne* ([2]); il s'est beaucoup occupé de ce sujet; mais malheureusement, sauf quelques simples indications, il n'a rien publié là-dessus. Dans cette Géométrie non euclidienne, on rencontre une certaine constante, caractéristique pour la détermination métrique de l'espace. En attribuant à cette constante une valeur infinie, on obtient la Géométrie euclidienne ordinaire. Mais si la constante a une valeur finie, on trouve une Géométrie différente, dans laquelle ont lieu, par exemple, les lois suivantes : La somme des angles d'un triangle est moindre que deux droits, et d'autant moindre que l'aire du triangle est plus grande. Dans un triangle dont les sommets sont à une distance infinie, la somme des angles est égale à zéro.

([1]) Cette démonstration, comme celle que Lobatchesfky a donnée de la même proposition, suppose que la longueur de la droite est infinie. Si l'on renonce à admettre cette hypothèse (*voir* le texte ci-après), alors les démonstrations cessent aussi de subsister, comme on peut le voir clairement, en remarquant que, sans cela, elles devraient avoir également lieu dans la Géométrie de la sphère.

([2]) *Voy.* Sartorius von Waltershausen, *Gauss zum Gedächtniss*, p. 81, ainsi que quelques Lettres de la *Correspondance* de Gauss et de Schumacher.

Par un point hors d'une droite, on peut mener deux parallèles à cette droite, c'est-à-dire deux lignes qui coupent cette droite d'un côté ou de l'autre en des points infiniment éloignés. Les droites, passant par le même point extérieur et situées entre les deux parallèles, ne coupent nulle part la droite donnée.

Lobatchefsky, professeur de Mathématiques à l'Université de Kazan (1), et, quelques années plus tard, le mathématicien hongrois J. Bolyai (2), ont été conduits, chacun de leur côté, à la même Géométrie non euclidienne, et ont traité le même objet dans des écrits développés. Cependant ces travaux étaient restés à peu près ignorés, jusqu'au moment où la publication, faite en 1862, de la *Correspondance de Gauss et de Schumacher*, attira sur eux l'attention des géomètres. Depuis lors, la conviction s'est répandue que, dès à présent, la théorie des parallèles est complète, c'est-à-dire qu'elle est acceptée avec son indétermination réelle.

Mais cette conception a dû subir une modification essentielle depuis qu'a paru, en 1867, après la mort de Riemann, sa leçon inaugurale *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie*, et que, peu de temps après, dans le présent Recueil (3), Helmholtz a publié ses recherches *sur les faits qui servent de base à la Géométrie*.

Dans son écrit, Riemann fait observer que, de ce que l'espace est illimité, il ne s'ensuit pas forcément qu'il soit infini. Au contraire, on pourrait concevoir, sans tomber en contradiction avec notre intuition, qui ne s'applique jamais qu'à une portion finie de l'espace, que l'espace fût fini et rentrant sur lui-même; la Géométrie de notre espace se présenterait alors comme la Géométrie sur une sphère de

(1) *Messager de Kazan* (*Казанскій Вѣстникъ*), 1829. — *Mémoires de l'Université de Kazan* (*Ученыя Записки*), 1836-38. — *Journal de Crelle*, t. 17 (Géométrie imaginaire). — *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, Berlin, 1840 (*). — *Pangéométrie*, Kazan, 1855. (Il en a été publié une traduction italienne dans le t. V du *Giornale di Matematiche*, 1867.)

(*) Une traduction française de cet opuscule a paru en 1866 dans *les Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. IV. Les premiers travaux de Lobatchefsky remontent à 1826. (*Note de la Redaction*)

(2) Dans un *Appendice* à l'ouvrage intitulé : *Tentamen juventutem studiosam*, etc., Maros-Vásárhely, 1833. On en trouve une traduction italienne dans le t. VI du *Giornale di Matematiche*, 1868 (*).

(*) Une traduction française de l'*Appendice* a paru au commencement de la même année, dans le t. V des *Mémoires de la Societe des Sciences physiques et naturelles*. (*Note de la Redaction.*)

(3) *Nachrichten von der K. Gesellschaft*, 1868, n° 9.

trois dimensions placée dans une *multiplicité* (¹) de quatre dimensions. Cette conception, qui se trouve aussi chez Helmholtz, entraînerait cette conséquence, que la somme des angles d'un triangle serait, comme dans le triangle sphérique ordinaire, plus grande (²) que deux angles droits, et d'autant plus grande que le triangle aurait une plus grande aire. La ligne droite n'aurait plus alors de points à une distance infinie, et l'on ne pourrait, par un point donné, mener aucune parallèle à une droite donnée.

Une Géométrie fondée sur ces conceptions occuperait, à côté de la Géométrie euclidienne ordinaire, une place toute semblable à la Géométrie de Gauss, de Lobatchefsky et de Bolyai, dont nous parlions tout à l'heure. Tandis que cette dernière attribue à la droite deux points à l'infini, l'autre Géométrie ne lui en attribue aucun (c'est-à-dire qu'elle lui attribue deux points imaginaires à l'infini). Entre les deux se place, comme transition, la Géométrie euclidienne; elle attribue à la droite deux points à l'infini qui coïncident.

Conformément à un mode de s'exprimer, en usage dans la nouvelle Géométrie, nous désignerons, dans ce qui va suivre, ces trois Géométries respectivement sous les noms de Géométrie *hyperbolique, elliptique* (³) ou *parabolique,* suivant que les deux points à l'infini de la ligne droite sont réels, ou imaginaires, ou coïncidents.

II. — *Représentation sensible des trois sortes de Géométrie par la détermination métrique générale de Cayley.*

Le besoin de rendre appréciable aux sens les spéculations très-abstraites qui ont conduit à l'établissement de ces trois Géométries a fait chercher des exemples de déterminations métriques qui pussent être conçues comme des images de ces Géométries, et qui missent ainsi en évidence leur enchaînement logique intime.

La Géométrie parabolique n'a pas besoin d'une telle représentation, parce qu'elle coïncide avec la Géométrie euclidienne et qu'à ce titre elle nous est familière.

(¹) *Mannigfaltigkeit*, *varietas* (Gauss).

(²) Les démonstrations contraires de Legendre et de Lobatchefsky supposent, comme nous l'avons déjà remarqué, l'espace infini.

(³) La Géométrie sphérique ordinaire doit être appelée, d'après cela, une Géométrie *elliptique*.

On a indiqué, pour la Géométrie elliptique et la Géométrie hyperbolique, des représentations qui mettent en évidence la nature de ces Géométries au moyen d'objets mesurés dans le sens de la détermination métrique euclidienne. Ces représentations n'expliquent toutefois que la partie planimétrique de ces Géométries. Beltrami, à qui l'on doit la représentation de la Planimétrie dans la Géométrie hyperbolique ([1]), a démontré qu'il ne pouvait exister rien d'analogue pour l'espace. L'image de la partie planimétrique de la Géométrie elliptique est, comme on le voit immédiatement, la Géométrie sur la sphère ou, plus généralement, sur les surfaces de courbure constante positive. La Géométrie hyperbolique, au contraire, trouve son interprétation sur les surfaces de courbure constante négative. Cette dernière interprétation, malheureusement, semble ne pouvoir jamais fournir l'intuition du plan tout entier, les surfaces de courbure négative constante étant toujours limitées par des arêtes de rebroussement, etc.

Je vais, maintenant, commencer par établir, pour les trois Géométries, tant sur le plan que dans l'espace, des représentations qui fassent complétement apercevoir leurs caractères propres; puis je montrerai que ces représentations ne sont pas seulement des interprétations de ces Géométries, mais qu'elles expriment leur nature intime et conduisent par conséquent à leur pleine compréhension.

Les représentations en question considèrent comme objet de la détermination métrique le plan ou l'espace, et emploient seulement une détermination métrique autre que l'ordinaire, et qui, entendue dans le sens de la Géométrie projective, se présente comme une généralisation de la détermination métrique ordinaire. Cette détermination métrique généralisée a été établie dans ce qu'elle a d'essentiel par Cayley ([2]); seulement cet auteur part d'un point de vue tout différent de celui que nous adoptons ici. Cayley construit cette détermination métrique pour montrer comment la Géométrie (euclidienne) de la mesure peut être regardée comme un cas particulier de la Géo-

---

([1]) *Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea.* Giornale di Matematiche, t. VI, 1868.

([2]) Dans le *Sixth Memoir upon Quantics,* Philos. Transact., t. CXLIX. *Voy.* la traduction des *Sections coniques* de SALMON par FIEDLER, 2^e édit. (Leipzig, 1860); ou encore FIEDLER : *Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen.* (Leipzig, 1862.)

métrie projective. Il ne considère que le cas le plus simple, celui du plan. Il fait voir comment on peut, dans le plan, en se fondant sur les représentations projectives, trouver une détermination métrique qui se rapporte à une conique donnée quelconque comme à une conique *absolue*. Si cette conique dégénère en un couple imaginaire de points, on a une détermination métrique telle que celle dont nous faisons usage (dans la Géométrie euclidienne); on obtient précisément la détermination métrique ordinaire lorsqu'on fait coïncider les deux points fondamentaux imaginaires avec deux points déterminés du plan, savoir, avec les deux points circulaires.

Je vais ici présenter brièvement l'application de cette détermination métrique de Cayley à l'espace, en remplaçant le mode d'exposition de Cayley par des considérations plus géométriques.

Soit donnée, comme surface *fondamentale*, une surface du second degré, supposée quelconque. Deux points donnés de l'espace déterminent, par l'intersection de la ligne qui les joint et de la surface, deux points sur cette dernière. Les deux points donnés ont, avec ces deux autres points, un certain rapport anharmonique, et *le logarithme de ce rapport anharmonique, multiplié par une constante arbitraire c* (1), *sera dit la distance des deux points donnés*. Pareillement, étant donnés deux plans, on peut, par leur intersection, mener deux plans tangents à la surface fondamentale. Ceux-ci déterminent, avec les deux plans donnés, un certain rapport anharmonique. *Le logarithme de ce rapport anharmonique, multiplié par une constante arbitraire c', est ce que nous appellerons l'angle des deux plans.*

D'après ces définitions, les points de la surface fondamentale sont à une distance infinie de tous les autres points; la surface fondamentale est donc le lieu des points infiniment éloignés. Pareillement, les plans tangents à la surface fondamentale sont des plans qui forment avec un plan quelconque un angle infiniment grand. — La distance mutuelle de deux points est nulle, lorsque la ligne qui les joint est tangente à la surface. Deux plans comprennent entre eux un angle nul, lorsque leur intersection est tangente à la surface. — On

(1) Cayley définit la distance de deux points par une formule, dans laquelle on attribue à cette constante une valeur particulière $\frac{2}{\pi}\sqrt{-1}$. Il en est de même pour la constante que nous désignerons tout à l'heure par c'.

entend par sphère une surface du second degré qui touche la surface fondamentale suivant une courbe plane. Le centre de la sphère est le pôle du plan. — Au lieu des mouvements en nombre sextuplement infini, qui laissent invariable la détermination métrique ordinaire, on a maintenant un cycle d'autant de transformations linéaires. En effet, la surface fondamentale, comme toute surface du second degré en général, se reproduit elle-même après un nombre sextuplement infini de transformations linéaires. Celles-ci se partagent en deux classes sextuplement infinies, suivant que les deux systèmes de génératrices rectilignes de la surface sont ou ne sont pas échangés entre eux. C'est des transformations de cette dernière espèce qu'il s'agit ici. Les transformations de la première espèce laissent bien aussi les différences de mesure invariables, puisqu'elles n'altèrent pas plus que les autres les rapports anharmoniques dont les logarithmes sont les différences de mesure; mais elles ne correspondent pas aux mouvements de l'espace, mais aux transformations de l'espace qui changent les figures de trois dimensions en des figures égales par symétrie et placées d'une manière quelconque.

De cette détermination métrique générale résulte, en passant à la limite, une Géométrie métrique de même nature que la Géométrie *parabolique* ordinaire, lorsque la surface fondamentale du second degré se change en une section conique imaginaire. Si, en particulier, cette conique est le cercle imaginaire à l'infini, on obtient précisément la Géométrie métrique ordinaire.

Mais la détermination métrique projective générale donne aussi, pour une surface fondamentale convenablement choisie, une Géométrie métrique qui représente les conceptions de la Géométrie elliptique, et, à côté de celle-là, une autre qui représente les conceptions de la Géométrie hyperbolique; et ce sont là les images des Géométries elliptique et hyperbolique dont il a été question plus haut.

On parvient à une Géométrie métrique correspondante à la Géométrie *elliptique,* en prenant une surface fondamentale imaginaire. Alors il est clair qu'aucune ligne droite n'a de points à l'infini, de sorte que la droite est comme une courbe fermée de longueur finie. On est conduit immédiatement à des formules (trigonométriques), qui sont précisément celles que l'on doit admettre dans la Géométrie elliptique. Ce sont les formules de la trigonométrie sphérique ordinaire, dans lesquelles le rayon de la sphère est représenté par la constante $\frac{c}{\sqrt{-1}}$.

On obtient une Géométrie correspondante à la Géométrie *hyperbolique,* en prenant une surface fondamentale réelle et non réglée, et ayant égard aux points situés dans son intérieur. Cette restriction à l'intérieur de la surface est indiquée naturellement; car, en supposant que l'on se trouvât à l'intérieur de la surface, et que l'on ne pût changer son lieu dans l'espace qu'au moyen des transformations linéaires à trois dimensions qui représentent les mouvements de l'espace dans la détermination métrique obtenue, alors on ne pourrait jamais sortir de l'intérieur de la surface du second degré, située à l'infini (dans cette détermination métrique). Au delà de la surface fondamentale, il existerait alors une autre portion d'espace, sur l'existence de laquelle on ne sait rien, et qui ne se fait remarquer que parce que deux droites quelconques situées dans un même plan ne se couperaient pas toujours, si l'on ne supposait pas une telle portion d'espace. — Si l'on se borne maintenant aux constructions qui ne sortent pas de l'intérieur de la surface, alors, en faisant usage de la détermination métrique correspondante, ces constructions seront soumises absolument aux lois que la Géométrie hyperbolique établit en général pour les constructions dans l'espace. Toute droite, par exemple, a deux points réels à l'infini; car toute droite passant dans l'intérieur de la surface coupe cette surface en deux points réels. Par un point, on peut mener à une droite deux parallèles, savoir, les deux lignes qui joignent ce point avec les deux points d'intersection de la droite donnée et de la surface fondamentale. Un triangle dont les sommets sont à l'infini, c'est-à-dire dont les sommets sont situés sur la surface fondamentale, a une somme d'angles égale à zéro. Car deux lignes quelconques qui se coupent sur la surface fondamentale (deux parallèles quelconques) comprennent entre elles un angle nul, etc. Enfin, la constante c, par laquelle doit être multiplié le rapport anharmonique correspondant, pour donner la distance de deux points, représente la constante caractéristique mentionnée plus haut, qui se présente dans la Géométrie hyperbolique.

III. — *Indépendance entre la Géométrie projective et la théorie des parallèles. Établissement des trois sortes de Géométrie métrique.*

Dans ce qui précède, nous avons trouvé, pour les Géométries elliptique et hyperbolique, des images adéquates dans la détermination métrique générale de Cayley, en supposant la surface fondamentale tantôt imaginaire, tantôt réelle et non réglée. Nous avons eu pareillement une image de la Géométrie parabolique ordinaire, en concevant que la surface fondamentale dégénérait en une section conique imaginaire. Mais cette image s'est changée dans l'objet même qu'elle représentait, c'est-à-dire dans la Géométrie parabolique, lorsque nous avons fait coïncider la conique fondamentale avec une conique déterminée, qui est le cercle imaginaire à l'infini. Semblablement, les Géométries métriques, que nous avons établies comme images respectives des Géométries elliptique et hyperbolique, se changent dans ces Géométries mêmes, quand on fait coïncider leur surface fondamentale avec une surface du second degré déterminée (avec la surface à l'infini).

On s'en convainc en remarquant que la Géométrie projective est indépendante de la question de la théorie des parallèles [1]. En effet, pour développer la Géométrie projective et démontrer son application à un espace donné limité quelconque, il suffit de faire dans cet espace des constructions qui ne conduisent pas hors de cet espace, et ne concernent que ce qu'on appelle *les relations de situation*. Les rapports anharmoniques (les seuls éléments fixes de la Géométrie projective), naturellement, ne doivent pas être alors définis comme des rapports de segments, puisque cela supposerait la connaissance d'une détermination métrique. Dans les *Beiträge zur Geometrie der Lage* [2], von Staudt a donné les matériaux nécessaires pour définir un rapport anharmonique comme un nombre réel. Des rapports anharmoniques nous pouvons ensuite nous élever aux coordonnées homogènes

---

(1) C'est ce qu'il est facile de vérifier *a posteriori*. Car, en prenant pour base la Géométrie soit elliptique, soit hyperbolique, on peut établir la Géométrie projective absolument de la même manière qu'on le fait ordinairement dans la Géométrie parabolique.

(2) § XXVII, n° 393.

ponctuelles et planaires, qui ne sont autre chose que les valeurs relatives de certains rapports anharmoniques, comme von Staudt l'a également démontré (1) et comme Fiedler l'a récemment prouvé de nouveau (2). La question de savoir si, pour toutes les valeurs réelles des coordonnées, on peut trouver aussi des éléments d'espace, reste indécise. Si cela n'a pas lieu, rien n'empêche, pour répondre à ces valeurs des coordonnées, de joindre aux éléments réels de l'espace des éléments impropres. C'est ce qui se fait dans la Géométrie parabolique, quand on parle du plan à l'infini. Si l'on prenait pour base la Géométrie hyperbolique, c'est toute une portion d'espace que l'on aurait à ajouter. Au contraire, dans la Géométrie elliptique, il n'y aurait lieu à aucune adjonction d'éléments impropres.

La Géométrie projective étant ainsi développée, on pourra établir la détermination métrique générale de Cayley. Celle-ci reste sans altération, comme nous l'avons indiqué plus haut, lorsqu'on opère des transformations linéaires, en nombre sextuplement infini, que nous avons appelées *les mouvements de l'espace*.

Passons maintenant à la considération des mouvements effectifs de l'espace et de la détermination métrique fondée sur ces mouvements. On voit que les mouvements en nombre sextuplement infini sont autant de transformations linéaires. Ces mouvements laissent en outre invariable une surface, la surface des points à l'infini.

Mais comme on peut aisément le démontrer, il n'y a plus maintenant d'autres surfaces qui reviennent à leur premier état après des transformations linéaires en nombre sextuplement infini, si ce n'est les surfaces du second degré et leurs variétés. Les points à l'infini forment ainsi une surface du second degré, et les mouvements de l'espace se confondent parmi ces cycles sextuplement infinis de transformations linéaires, qui laissent invariable une surface du second degré. On voit, d'après cela, comment la détermination métrique donnée effectivement se confond dans la détermination projective générale. Tandis que celle-ci emploie une surface du second degré que l'on peut choisir à volonté, cette surface, dans la première détermination, est donnée une fois pour toutes.

L'espèce de cette surface du second degré, qui doit servir de base

---

(1) *Beiträge*, § XXIX, n° 411.

(2) *Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zurich*, XV, 2, 1871.

à la détermination métrique effective, peut être maintenant définie avec plus de précision, en remarquant qu'un plan, tournant continuellement autour d'un axe situé dans ce plan à une distance finie, revient à sa position initiale. Cela veut dire que les deux plans tangents que l'on peut mener à la surface fondamentale par une droite située à distance finie sont imaginaires; car, s'ils étaient réels, il se trouverait, dans le faisceau de plans correspondants, deux plans réels à l'infini (c'est-à-dire des plans qui forment avec tous les autres un angle infiniment grand), et alors aucune rotation continuée dans un même sens ne pourrait ramener un plan du faisceau à sa position initiale.

Or, pour que ces plans soient imaginaires, ou, ce qui est la même chose, pour que le cône tangent à la surface fondamentale qui part d'un point de l'espace (accessible pour nous par des mouvements) soit imaginaire, on ne peut imaginer que trois cas :

1. *La surface fondamentale est imaginaire,* ce qui donne la Géométrie elliptique.

2. *La surface fondamentale est réelle, non réglée, et nous environne.* C'est l'hypothèse de la Géométrie hyperbolique.

3. Cas formant la transition. — *La surface fondamentale est dégénérée en une courbe imaginaire.* C'est l'hypothèse de la Géométrie parabolique ordinaire.

Nous sommes ainsi conduits précisément aux trois sortes de Géométrie, que l'on a établies, comme nous l'avons dit dans le § I, en partant de considérations toutes différentes.