Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

G. Darboux

Sur une nouvelle méthode pour l'étude des courbes tracées sur les surfaces algébriques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 314-319

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__314_1>

SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE POUR L'ÉTUDE DES COURBES TRACÉES SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES.

Le premier Mémoire de M. Clebsch, traitant de la représent
des surfaces sur un plan double, a été inséré dans les Mémoir

(1) Je dois signaler, en terminant, une remarquable Note de M. Lie, dans les *richten* de l'Université de Gœttingue, où se trouvent d'importantes propositions courbes et les surfaces tétraédrales les plus générales, propositions qui seront ana à leur place dans le *Bulletin*.

la Société de Gœttingue, t. XV [1]. Les études générales de l'auteur, dont nous avons rendu compte, permettaient de prévoir que toute surface du 5e ordre ayant une ligne double du 4e ordre peut être représentée sur un plan simple (c'est-à-dire de manière qu'à un point du plan corresponde un seul point de la surface). Mais pour obtenir la représentation la plus simple de la surface, il était indispensable de commencer par établir l'existence de certaines coniques, en nombre limité et ne formant pas une série, qui se trouvent sur la surface. M. Clebsch montre que les difficultés que présente la recherche de ces coniques peuvent être facilement surmontées, quand on commence par rechercher (ce qui n'offre aucune difficulté) la représentation de la surface sur un plan double. Disons d'abord quelques mots de la génération et des propriétés de cette surface.

On reconnaît, d'abord, que la courbe double du 4e ordre ne peut être que de la *première espèce;* car toute courbe double du 4e ordre et de deuxième espèce possédant une infinité de cordes qui la coupent en trois points et qui forment un hyperboloïde, ces cordes coupant la surface en trois points doubles en feraient partie tout entières, et la surface du 5e ordre se décomposerait en un hyperboloïde et une surface du 3e ordre. On trouve facilement l'équation de la surface; elle peut s'écrire :

$$C\varphi^2 - 2B\varphi\psi + A\psi^2 = 0, \tag{1}$$

où A, B, C désignent des fonctions linéaires, φ, ψ des fonctions du second degré des coordonnées. D'après cela, la surface est le lieu des coniques qui sont déterminées par les plans

$$A + 2\lambda B + \lambda^2 C = 0$$

et les surfaces

$$\varphi + \lambda\psi = 0.$$

Les plans des coniques enveloppent le cône

$$AC - B^2 = 0$$

dont le sommet défini par les équations

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

(1) Clebsch (A.), *Ueber die Abbildung einer Classe von Flächen 5 Ordnung*. Göttingen, in der Dieterichschen Buchhandlung, 1870. Ce Mémoire se vend séparément.

se trouve évidemment sur la surface. Ce point est d'ailleurs très-remarquable. Toute droite qui le contient coupe la surface en quatre autres points, qui se décomposent en deux groupes déterminés chacun par une équation du second degré. Le lieu des polaires de ce point, par rapport à chaque conique, forme une surface réglée du 4^e ordre, ayant une courbe double du 3^e ordre. Le cône enveloppe des plans des coniques est tangent doublement à la surface. Mais il y a un autre cône du 6^e ordre, enveloppe des plans tangents simples de la surface, et ayant son sommet au même point que le cône des plans tangents doubles. Si l'on projette la surface du sommet commun de ces deux cônes, on obtient la représentation annoncée, et la *courbe de passage* est l'intersection du cône tangent simple par le plan de projection. Les formules de représentation sont de la forme

$$\rho x = \lambda\mu \mathrm{W}, \quad \rho y = -\frac{\lambda+\mu}{2}\mathrm{W}, \quad \rho z = \mathrm{W},$$

$$\rho t = -\mathrm{V} + \sqrt{\mathrm{V}^2 - \mathrm{UW}},$$

où U, V, W désignent des fonctions du 4^e, du 3^e, du 1^{er} degré d'une forme particulière des coordonnées λ, μ d'un point du plan. La courbe

$$\mathrm{R} = \mathrm{V}^2 - \mathrm{UW} = 0$$

est la courbe de passage. Elle est du 6^e degré, contient λ à la 4^e puissance et μ à la 2^e. En d'autres termes, elle a un point double et un point quadruple. M. Clebsch montre que ces propriétés suffisent à la définir et qu'elle est la courbe la plus générale satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer.

Ces propriétés la rangent d'ailleurs dans la classe des courbes hyperelliptiques dont le genre est 3, et si l'on désigne par u_1, u_2, u_3 les trois intégrales de première espèce correspondant à chaque point de la courbe, on aura, d'après le théorème d'Abel présenté sous la forme que lui ont donnée Riemann et M. Clebsch (*Journal de Borchardt,* t. LXIII, p. 197),

$$\Sigma u_1 = 0, \quad \Sigma u_2 = 0, \quad \Sigma u_3 = 0,$$

les intégrales étant prises avec des limites inférieures convenables, les sommes s'étendant à tous les points d'intersection de la courbe R avec une courbe algébrique donnée. N'oublions pas que les intégrales ne sont déterminées qu'à des multiples près des six modules de périodicité. Cela posé, pour toute conique passant par les deux points multiples, on aura, comme le démontre M. Clebsch,

$$\sum_{k=1}^{k=6} u_i^{(k)} = 0,$$

la somme s'étendant aux six points où la conique vient couper la courbe (en laissant de côté les deux points multiples), et si la conique doit être tangente en deux points, les intégrales précédentes sont égales deux à deux, et l'on a, pour les trois points de contact,

$$u_i + u'_i + u''_i = \frac{Q_i}{2},$$

où les Q_i indiquent un système de périodes.

Comme les quantités Q_i contiennent six nombres entiers, on aura $2^6 = 64$, équations distinctes, et, par conséquent, 64 coniques. Ces coniques se détermineront donc par une équation du 7^e degré, celle dont dépend la bissection des fonctions hyperelliptiques de genre $p = 3$, et l'on aura ensuite à résoudre plusieurs équations du 2^e degré.

L'auteur démontre maintenant que ces coniques sont chacune la projection de deux courbes de la surface : 1° d'*une conique;* 2° d'une courbe du 3^e ordre. On voit donc que la surface contient 64 coniques isolées, et l'existence de telles coniques une fois établie, on peut représenter la surface sur un plan simple de la manière suivante :

La série de coniques qui engendre la surface coupe l'une quelconque des coniques isolées que nous appellerons C en un seul point. Or, dès qu'on connaît un point d'une conique, toutes les autres peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre. On pourra donc exprimer rationnellement les coordonnées de la surface en fonction : 1° d'un paramètre fixant la position du plan de chaque conique; 2° et d'un autre paramètre déterminant un point sur cette conique. Mais nous renvoyons à l'important Mémoire de M. Clebsch, qui contient bien des questions dont nous ne pouvons guère donner une idée ici : représentation de la courbe double, des coniques, etc., etc. Bornons-nous à dire que, dans la représentation du degré le moins élevé sur un plan simple, les sections planes de la surface sont représentées par des courbes du 4^e ordre, ayant en commun un point double et sept points simples. Notre seul but était d'indiquer ici le point essentiel du Mémoire, la relation entre toutes les équations déterminant des éléments géométriques remarquables d'une surface, et celles qui se rapportent à la bissection des fonctions hyperelliptiques et abéliennes.

M. Clebsch a publié un second Mémoire sur le même sujet dans les *Mathematische Annalen.* Ce Mémoire a pour titre : *Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächen-Abbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen* (1). L'auteur n'y considère que les surfaces qui peuvent être représentées à la fois sur un plan simple et sur un plan double. Alors, soient P le plan simple, Q le plan double. A tout point du plan double correspond un seul point du plan simple; mais la réciproque n'est pas vraie. A un point du plan P correspondent deux points du plan Q, un dans chaque feuillet. On est donc conduit, en définitive, à éliminer la surface représentée et à considérer des modes de transformation des figures planes, dans lesquels, à un point de l'une des figures (Q) correspondent deux points de l'autre figure (Q). Pour certains points de l'une des figures (P), les deux points de l'autre se confondent. L'ensemble de ces points confondus constitue la courbe de passage. Cela posé, on pourrait se proposer la question de la manière suivante : Trouver tous les modes de transformation plane dans lesquels, à un point de l'une des figures, correspond un point de l'autre. On reconnaît ainsi bien facilement que la question se réduit à trouver un *réseau* linéaire de courbes, tel que deux courbes appartenant à un même réseau se coupent en un certain nombre de points fixes contribuant à la définition du réseau et en deux points variables. On reconnaît encore facilement que ces courbes doivent être ou rationnelles, ou elliptiques, à moins que les points par lesquels passent toutes les courbes n'appartiennent, en totalité ou en partie, à ce qu'on appelle *des systèmes complets de points d'intersection.* Il serait possible de dresser des tables de ces réseaux pour les différents ordres, analogues à celles que MM. Cremona et Cayley ont obtenues pour les transformations bi-rationnelles. L'analogie paraît même indiquer que le nombre de tels réseaux, ne se ramenant pas les uns aux autres par des transformations linéaires, est limité, etc. Ce n'est pas ainsi que M. Clebsch pose la question.

(1) *Mathematische Annalen*, t. III, p. 45.

Il suppose, comme cela a lieu pour les exemples à traiter, que l'on connaisse la courbe de passage Ω sur le plan de la représentation double. Alors les sections planes de la surface se projettent ou se représentent par des courbes K jouissant des propriétés suivantes : elles passent par certains points fixes de Ω, et sont assujetties à être tangentes en des points variables se déplaçant sur Ω. Or M. Clebsch a déjà montré (*Journal de Borchardt*, t. LXIII) que la résolution algébrique de pareils problèmes a les rapports les plus intimes avec la bissection des fonctions abéliennes dont dépend la courbe Ω; mais nous renverrons, pour les énoncés précis, au travail de M. Clebsch.

La suite du Mémoire est consacrée à des applications. La marche suivie par l'auteur est plutôt synthétique qu'analytique. On se donne une courbe de passage, et, sans examiner d'une manière générale si toute courbe de passage peut conduire à un mode de transformation de l'espèce déjà indiquée, on la choisit parmi celles qui conviennent à certaines surfaces et qui doivent donner une solution connue à l'avance. C'est ainsi qu'avec une conique pour courbe de passage M. Clebsch retrouve l'application sur un plan double d'une surface du 2^e ordre. Avec une courbe du 4^e ordre, on obtient l'application sur le plan double de la surface générale du 3^e ordre et de la surface du 4^e ordre à conique double, etc. Ces deux dernières représentations s'effectuent en projetant : 1° la surface du 3^e ordre d'un point arbitraire de la surface; 2° la surface du 4^e ordre, à conique double, d'un point arbitraire pris sur cette ligne. Signalons encore l'étude importante des surfaces du 4^e ordre à droite double et des surfaces du 5^e ordre déjà traitées dans le Mémoire précédent, ce qui dispense l'auteur d'y insister. Enfin, M. Clebsch indique, dans une Note au bas de la page, une catégorie nouvelle de surfaces, les surfaces du 5^e ordre à ligne double du 5^e ordre, qui, elles aussi, sont susceptibles d'une représentation sur un plan double, qui ont un point triple et qui contiennent 10 droites. C'est à cette classe qu'appartient, comme exemple spécial, la surface particulière du 5^e ordre traitée dans notre Mémoire de février. G. D.

(*A suivre.*)