G. Darboux

Sur une classe particulière de surfaces réglées

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 301-314

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__301_1>

MÉLANGES.

SUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE SURFACES RÉGLÉES;

Par M. G. DARBOUX.

Les recherches sur les *axes* que j'ai publiées dans ce ***Bulletin*** m'ont conduit à l'étude de surfaces réglées remarquables formées de ces droites. Ces surfaces offrent une grande variété; mais leur étude est simple; elles comprennent comme cas particulier les surfaces ***tétraédrales symétriques***, la ***quadrispinale*** et la ***quadricuspinale*** de M. de la Gournerie. Les propriétés des axes, c'est-à-dire des normales à un système de quadriques homofocales, expliquent les propositions si remarquables qu'a données M. de la Gournerie (²).

Dans la Note dont j'ai parlé plus haut, j'ai indiqué, d'après M. Chasles, quelles sont les propriétés caractéristiques des droites nommées *axes* par M. Reye (³). Si on les définit au moyen d'une seule surface du second degré, ce sont les droites perpendiculaires à

(¹) *Voir* une analyse de ce travail, *Bulletin*, t. I, p. 289.

(²) *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques*, avec des Notes de M. Cayley. Paris, 1867, Gauthier-Villars.

(³) *Geometrie der Lage*, Hanovre, Carl Rumpler.

leur polaire. Si l'on emploie un système de surfaces homofocales, ce sont les normales à toutes ces surfaces. Enfin, on peut les définir, indépendamment de toute quadrique, par cette propriété qu'elles coupent les quatre faces d'un tétraèdre en quatre points, dont le rapport anharmonique est constant.

Si l'on considère un *axe* R et un système de quadriques homofocales, l'axe sera normal à l'une des surfaces; soit r le pied de cette normale. Il y aura à considérer, en même temps que le rayon R, le pied r et le plan P, mené par r perpendiculairement au rayon. Une propriété fondamentale des surfaces homofocales doit être rappelée ici : L'axe R est le lieu des pôles du plan P par rapport à toutes les surfaces homofocales. Ainsi, les axes sont aussi les droites lieux des pôles d'un plan par rapport à toutes les quadriques homofocales.

On peut se proposer des questions très-variées sur le système géométrique formé des éléments P, R, r.

1° Les plans P enveloppent une surface : quel est le lieu des points de contact de ces plans avec la quadrique du système homofocal qui leur est tangente, c'est-à-dire le lieu du point de rencontre r du plan avec son axe?

On résout cette question au moyen des théorèmes suivants :

« Si, par les différents points d'un plan, on mène les trois plans tangents aux surfaces homofocales passant en chacun de ces points, l'enveloppe de ces plans tangents est une surface de troisième classe, tangente aux quatre plans du tétraèdre conjugué aux quadriques et inscrite dans la développable Π enveloppe de toutes les quadriques.

» Si, par les différents points d'une droite, on mène les différents plans tangents aux surfaces homofocales passant en chacun de ces points, l'enveloppe de ces plans est une développable de la 5^e^ classe, tangente à huit plans tangents de la développable Π, et aux quatre faces du tétraèdre conjugué. Cette développable est, d'ailleurs, circonscrite au paraboloïde, lieu des axes des plans passant par la droite, et elle admet cette droite comme tangente double. »

Ces propositions conduisent à la solution suivante de la question proposée :

Soit une surface S, de classe q, et n'étant ni tangente aux faces du tétraèdre, ni inscrite dans la développable Π. Ses plans tangents touchent chacun une des quadriques homofocales, et une seule. Le lieu des points de contact de ces plans tangents de la surface S avec la quadrique correspondante est une surface Σ, d'ordre $5q$, ayant les quatre focales des quadriques pour lignes multiples d'ordre q, contenant au moins $4q$ droites situées sur la développable Π. Les surfaces Σ et S se correspondent point par point; elles sont du même genre.

C'est ainsi que, dans un travail précédent, j'ai montré (¹) qu'à un point qui peut être considéré comme une surface de 1^{re} classe, correspond une surface du 5^e ordre qui peut être représentée sur le plan.

Si la surface S est inscrite m fois dans la développable Π, l'ordre de la surface correspondante Σ diminue de $8m$, et l'ordre de multiplicité de chaque focale de $2m$.

Si la surface S devient tangente aux faces du tétraèdre, chaque contact diminue l'ordre de Σ d'une unité, et d'une unité aussi l'ordre de multiplicité de la focale située dans la face considérée.

Il faut cependant indiquer, non pas un cas d'exception, mais plutôt un fait singulier qui se présente dans l'application des propositions précédentes. Si l'on se donne *à priori* la surface Σ et que l'on mène les plans tangents aux quadriques passant en chacun des points de Σ, ces plans enveloppent une surface S; si l'on applique à la surface S les propositions précédentes, on trouvera pour Σ un ordre triple de l'ordre de cette surface. Cela tient à ce que chacun des points de Σ est donné par trois plans tangents de S; la surface tout entière sera, en quelque manière, obtenue trois fois (²).

2° Supposons que l'on se donne une surface Σ d'ordre m, et que par chacun de ses points on mène les plans tangents aux quadriques du système passant en ce point, quelle sera la classe de la surface S enveloppée par ces plans?

On trouve que la surface S est en général de la classe $3m$, et qu'elle

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. II, p. 40.

(²) Un fait analogue se rencontre dans la théorie des surfaces réglées. On sait que l'ordre d'une surface réglée engendrée par une droite s'appuyant sur trois directrices peut être facilement calculé par une formule due à M. Salmon. Cette formule est en défaut dans la plupart des cas où l'on doit obtenir une surface du second degré; l'ordre qu'elle indique alors est 4, à cause du double mode de génération par des droites des surfaces du second degré. Par exemple, si l'on cherche l'ordre d'une surface réglée engendrée par une droite, s'appuyant sur trois coniques se coupant deux à deux en deux points, on trouve 4 au lieu de 2 pour l'ordre de la surface. Le même fait se présentera toutes les fois que le mode de description ou de génération considéré fournira les 2 systèmes de génératrices rectilignes.

est inscrite m fois dans la développable Π. Cette classe diminue de 2 unités, toutes les fois que la surface Σ vient passer par une focale. Dans le cas général, la surface S est tangente m fois à chaque face du tétraèdre.

3° Quand un point décrit une courbe, d'ordre n, les plans tangents aux surfaces homofocales qui passent en ce point enveloppent une développable de la classe $5n$. Ce nombre doit être diminué d'une unité pour chaque point commun à la courbe et à l'une des focales ([1]). La développable générale de la classe $5n$ est tangente à $8n$ plans tangents de Π, et n fois à chaque face du tétraèdre. Ces nombres doivent être diminués, le premier de deux, le second d'une seule unité, pour chaque point commun à la courbe et à l'une des focales.

4° Enfin, prenons une développable de classe n, Δ_n. Les points de contact des plans tangents de cette développable forment, en général, une courbe d'ordre $3n$. Cet ordre sera diminué d'une unité pour tout plan tangent commun aux développables Δ_n et Π déjà considérées. C'est ainsi qu'à un cône circonscrit à l'une des quadriques correspond une courbe d'ordre 2, la courbe de contact du cône. En général, une développable circonscrite à l'une des quadriques suivant une courbe d'ordre p est de classe p et est tangente à $2p$ plans tangents de Π; la courbe correspondante, qui est précisément ici la courbe de contact de la développable, est bien de l'ordre indiqué par la formule.

5° Les axes des plans tangents d'une surface quelconque non développable forment un système de rayons rectilignes, dont j'ai dit quelques mots dans un travail précédent; mais, si l'on considère une surface développable, les axes de ses plans forment une surface réglée K. C'est précisément celle que nous nous proposons d'étudier.

Soit donc une développable Δ_n, de classe n, et cherchons l'ordre de la surface réglée formée par les axes des plans de Δ_n. D'après la réciprocité entre les plans et les axes, les axes des plans tangents à la surface réglée K seront tangents à Δ_n. Cherchons le nombre de plans tangents qu'on peut mener à K par une droite. Les axes de tous les plans tangents passant par une droite forment un paraboloïde. Nous sommes donc conduits à résoudre la question suivante :

Combien y a-t-il de génératrices, d'un même système, d'une sur-

---

([1]) Nous comptons toujours le cercle de l'infini au nombre des focales.

face réglée du second ordre, tangentes à une surface développable? En d'autres termes, combien y a-t-il de plans tangents communs à Δ_n et au paraboloïde?

Ce nombre est évidemment égal à $2n$; mais, comme le paraboloïde est tangent aux quatre faces du tétraèdre conjugué, si la surface Δ_n est tangente α fois en tout à ces faces, parmi les $2n$ plans tangents à la fois à Δ_n et au paraboloïde, il y en aura α qui seront fixes et ne devront pas être comptés. On a donc la proposition suivante :

A une surface développable de classe n, Δ_n, tangente α fois en tout aux faces du tétraèdre conjugué, correspond une surface réglée d'ordre $2n - \alpha$, formée par les axes des plans de Δ_n. Cette surface réglée peut aussi être considérée comme l'enveloppe des plans dont les axes sont tangents à Δ_n.

Les surfaces réglées K, que nous considérons, se distinguent de toutes les autres par cette propriété qu'elles sont formées d'axes, c'est-à-dire de droites coupant les quatre faces d'un tétraèdre en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Réciproquement, toute surface réglée de cette nature étant donnée, en faisant correspondre à chaque génératrice le plan dont elle est axe, l'enveloppe de ce plan sera une surface développable d'où l'on pourra déduire la surface réglée. Comme il y a une infinité de systèmes de surfaces homofocales dont les mêmes droites sont axes, la correspondance pourra s'établir au moyen de plusieurs surfaces développables.

On pourrait, du reste, définir directement les surfaces réglées K de la manière suivante, qui se rapproche de la définition de M. de la Gournerie.

Par chaque point P de l'espace (x', y', z', t') on peut mener un seul rayon, tel que, sur ce rayon, les rapports anharmoniques du point A et des 4 points où le rayon rencontre les 4 faces du tétraèdre soient donnés. Ce rayon est défini par les équations suivantes :

$$x = x'\frac{a-u}{a-v},\quad y = y'\frac{b-u}{b-v},\quad z = z'\frac{c-u}{c-v},\quad t = t'\frac{d-u}{d-v},$$

qui donnent les coordonnées d'un point de la droite en fonction de la seule variable u. Pour avoir le point A et les 4 points dans les faces, il faut donner à u les 5 valeurs v, a, b, c, d, dont les rapports anharmoniques sont bien constants.

Alors une surface réglée L pourra être considérée comme le lieu des axes s'appuyant sur une courbe C_n et coupés par cette courbe et par les 4 faces du tétraèdre en 5 points dont les rapports anharmoniques soient constants.

Il résulte de là un moyen simple de former l'équation de la surface; car, si les équations de la courbe sont

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad f_1(x, y, z, t) = 0,$$

celles de la surface s'obtiendront en éliminant u, entre les deux équations

$$f\left[\frac{x(a-K)}{a-u}, \frac{y(b-K)}{b-u}, \dots\right] = 0,$$

$$f_1\left[\frac{x(a-K)}{a-u}, \dots\right] = 0.$$

Mais nous conserverons la définition déjà donnée par le système des surfaces homofocales.

D'après cette définition, la surface réglée K est *le lieu des pôles des plans de Δ_n par rapport à toutes les quadriques homofocales*. De là résulte la propriété fondamentale de la surface réglée K, sa double génération.

Car, si l'on considère les pôles des plans par rapport à une quadrique ρ, ces pôles forment une courbe C_n, polaire réciproque de Δ_n. Le lieu de ces courbes, quand on prend toutes les quadriques homofocales, constitue la surface réglée K. D'ailleurs, d'après un théorème relatif aux surfaces homofocales et dû encore à M. Chasles, on sait que quatre de ces courbes divisent les génératrices de K en quatre points, dont le rapport anharmonique est constant.

Donc, les surfaces réglées K peuvent être engendrées par des courbes d'ordre n, lieu des points formant sur chaque génératrice, avec les quatre points où celle-ci est coupée par les quatre faces du tétraèdre, des divisions homographiques.

Les sections des surfaces réglées par chaque plan du tétraèdre se composent : 1° de n droites, axes des plans tangents à Δ_n menés par le sommet opposé ; 2° d'une courbe du $n^{ième}$ ordre, polaire réciproque de Δ_n, par rapport à la focale (surface infiniment aplatie) située dans ce plan.

Non-seulement les courbes C_n, tracées sur la surface, forment des divisions homographiques sur la génératrice ; mais encore ce sont des figures homographiques, puisqu'elles sont les polaires réciproques d'une même développable.

Il résulte de là que, si l'une des faces du tétraèdre est à l'infini et que, par un point de l'espace, on mène des droites parallèles et égales aux segments des génératrices compris entre deux courbes C_n ou entre deux faces du tétraèdre, les extrémités de ces segments décrivent des courbes toujours homothétiques entre elles et homographiques à l'une quelconque des courbes C_n tracées sur la surface ([1]).

Ainsi s'expliquent et deviennent intuitives les belles propriétés signalées par M. de la Gournerie. Pour obtenir toutes les surfaces étudiées par ce géomètre dans son remarquable livre, il suffira de prendre pour Δ_n toute développable tétraédrale symétrique déterminée par des équations de la forme

$$\begin{aligned} A m^\alpha + B n^\alpha + C p^\alpha + D q^\alpha &= 0, \\ A' m^\alpha + \ldots \qquad\qquad &= 0; \end{aligned}$$

mais, pour fixer les idées, nous ne parlerons, dans ce qui va suivre, que des développables de 4^e classe D_4 circonscrites à deux surfaces du 2^e ordre, et des surfaces réglées K_8 qui leur correspondent.

Soit donc une développable D_4, circonscrite à deux surfaces quelconques du 2^e ordre. A cette développable, tant qu'elle n'est tangente à aucune des faces du tétraèdre, correspond une surface réglée d'ordre 8, qu'on peut aussi considérer comme engendrée par les courbes du 4^e ordre, polaires réciproques de D_4 par rapport à chaque quadrique homofocale. Elle sera coupée par chaque face (A) du tétraèdre opposée au sommet A : 1° suivant 4 droites, axes des plans de D_4 passant par A; 2° suivant une courbe du 4^e ordre et de 8^e classe polaire réciproque de la développable D_4 par rapport à la focale qui se trouve dans la face (A).

([1]) M. Laguerre a signalé un cas particulier de ce théorème (*Nouvelles Annales de Mathématiques*). On mène les normales à une surface du second ordre en tous les points d'une section plane, et l'on prolonge ces normales jusqu'à un plan principal. Si, par un point de l'espace, on mène des droites parallèles et égales aux portions de normales considérées, l'extrémité de ces droites forme une conique.

En effet, la surface réglée des normales en tous les points d'une section plane appartient évidemment à la classe de celles que nous étudions. Elle peut être engendrée, soit par des droites, soit par des coniques. On sait, d'ailleurs, qu'elle a été étudiée l'abord par M. Chasles, qui en a donne les principales propriétes.

Comme la développable D_4 dépend des fonctions elliptiques, il en est de même de la surface K ; toutes les sections planes de cette surface seront des courbes du 8^e ordre à 20 points doubles. En d'autres termes, la ligne double sera du 20^e ordre, elle sera coupée en 6 points par chaque génératrice.

Si nous supposons que la développable D_4 ait une de ses coniques doubles dans l'une des faces du tétraèdre, la conique polaire, réciproque de cette ligne double, par rapport à la focale située dans cette face, deviendra une ligne double de la surface réglée K. Comme la développable D_4 peut avoir jusqu'à 4 coniques doubles dans les faces du tétraèdre, on voit que la surface réglée K peut avoir pour lignes doubles 1, 2, 3 ou 4 coniques situées dans les plans des faces du tétraèdre. La *quadrispinale* correspond au cas de 4 coniques doubles, celui où la développable D_4 est conjuguée au même tétraèdre que les quadriques homofocales. Il résulte de là les théorèmes suivants :

« La quadrispinale est le lieu des courbes polaires réciproques d'une développable D_4, par rapport aux quadriques inscrites dans une autre développable conjuguée au même tétraèdre que la première.

» Elle a 4 coniques doubles, polaires réciproques des lignes doubles de D_4, par rapport aux coniques infiniment aplaties faisant partie du système des surfaces homofocales. »

Soit

$$(1) \qquad \sum \frac{x^2}{a-\rho} = \frac{x^2}{a-\rho} + \frac{y^2}{b-\rho} + \frac{z^2}{c-\rho} + \frac{t^2}{d-\rho} = 0$$

l'équation des surfaces inscrites dans une même développable ou homofocales. Soient

$$(2) \qquad \begin{cases} Am^2 + Bn^2 + Cp^2 + Dq^2 = 0, \\ A'm^2 + B'n^2 + C'p^2 + D'q^2 = 0 \end{cases}$$

les équations de la développable D_4. Le pôle du plan $(mnpq)$, par rapport à la quadrique (5), est donné par les formules

$$(3) \qquad \lambda x = m(a-\rho), \quad \lambda y = n(b-\rho), \ldots.$$

Ce pôle devra donc satisfaire aux deux équations

$$(4) \qquad \sum \frac{A x^2}{(a-\rho)^2} = 0, \quad \sum \frac{A' x^2}{(a-\rho)^2} = 0,$$

qui représentent la courbe polaire réciproque de D_4, par rapport à la surface (ρ). Le résultat de l'élimination de ρ entre ces équations sera l'équation de la quadrispinale. L'équation obtenue ainsi doit être du 16^e ordre et elle se réduira au 8^e après la suppression du facteur $x^2y^2z^2t^2$ qu'elle doit évidemment contenir.

Au lieu de chercher l'équation de la surface, on peut exprimer les coordonnées d'un de ses points, en fonction de deux paramètres. Les formules (2) étant linéaires conduisent sans peine à des expressions de m, n, p, q en fonction d'un paramètre variable ρ_1 de la forme suivante

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} m^2 &= K(\rho_1-\alpha),\\ n^2 &= K'(\rho_1-\beta),\\ p^2 &= K''(\rho_1-\gamma),\\ q^2 &= K'''(\rho_1-\delta); \end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit pour x, y, z, t, en vertu des formules (3),

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda x &= K(\rho-a)\sqrt{\rho_1-\alpha},\\ \lambda y &= K'(\rho-b)\sqrt{\rho_1-\beta},\\ \lambda z &= K''(\rho-c)\sqrt{\rho_1-\gamma},\\ \lambda t &= K'''(\rho-d)\sqrt{\rho_1-\delta}. \end{aligned}\right.$$

Les lignes $\rho_1 =$ const. sont les droites, les courbes $\rho =$ const. sont les courbes du 4^e ordre. Dans le cas où l'une des faces du tétraèdre est rejetée à l'infini et où l'on a des surfaces homofocales, ces formules prennent la forme plus simple

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= K\,(\rho-a)\sqrt{\rho_1-\alpha},\\ Y &= K'(\rho-b)\sqrt{\rho_1-\beta},\\ Z &= K''(\rho-c)\sqrt{\rho_1-\gamma}. \end{aligned}\right.$$

On déduit de ces formules

$$(8)\qquad \sum \frac{dX}{d\rho}\frac{dX}{d\rho_1} = \Sigma\, K^2(\rho-a).$$

Donc, pour une valeur de ρ, le premier membre sera nul, et la courbe du 4^e ordre, correspondant à la valeur ρ, annulant le second membre de l'équation (8), sera perpendiculaire à toutes les génératrices. Cette belle proposition est due à M. de la Gournerie.

Nous allons démontrer, dans la suite, une propriété équivalente à celle-ci.

Mais auparavant nous devons faire remarquer que les formules (6) conduisent sans peine à la détermination de la courbe double de la surface. En effet, tout point appartiendra à la courbe double quand il sera donné par deux systèmes de valeurs de ρ et de ρ_1. Soient ρ, ρ_1, ρ', ρ'_1 ces deux valeurs. On devra avoir

$$\begin{aligned} K^2 (\rho - a)^2 (\rho_1 - \alpha) &= \mu K^2 (\rho' - a)^2 (\rho'_1 - \alpha), \\ K'^2 (\rho - b)^2 (\rho_1 - \beta) &= \mu K'^2 (\rho' - b) (\rho'_1 - \beta), \end{aligned}$$

et les équations analogues. Éliminons μ, ρ_1, ρ'_1. Nous serons conduits à la relation suivante entre ρ et ρ',

$$\begin{vmatrix} (\rho - a)^2, & (\rho - a)^2\alpha, & (\rho' - a)^2, & (\rho' - a)^2\alpha \\ (\rho - b)^2, & (\rho - b)^2\beta, & (\rho' - b)^2, & (\rho' - b)^2\beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Après la suppression du facteur $(\rho - \rho')^2$ cette équation prend la forme

$$A\rho^2\rho'^2 + B\rho\rho'(\rho + \rho') + C(\rho^2 + \rho'^2) + D\rho\rho' + E(\rho + \rho') + F = 0.$$

C'est l'intégrale de l'équation d'Euler relative aux fonctions elliptiques. On pourra donc exprimer ρ, ρ' par des fonctions elliptiques, et par suite ρ_1, ρ'_1. Donc les coordonnées d'un point de la courbe double seront des fonctions elliptiques d'un paramètre variable. Dans quelques cas particuliers, les fonctions elliptiques seront remplacées par des fonctions circulaires.

Revenons à la surface réglée. Si l'on prend au lieu du système de surfaces homofocales (1) le suivant

$$\frac{x^2}{a - \rho} + \frac{y^2}{b - \rho} + \frac{z^2}{c - \rho} + \frac{h^2 t^2}{d - \rho} = 0. \tag{9}$$

Cette équation représente encore des surfaces homofocales, si le plan $t = 0$ est le plan de l'infini. Car les équations de la focale située dans ce plan

$$\begin{cases} t = 0, \\ \dfrac{x^2}{a - d} + \dfrac{y^2}{b - d} + \dfrac{z^2}{c - d} = 0, \end{cases} \tag{10}$$

sont indépendantes de h. Si avec les surfaces (9) on prend la développable

$$(11)\quad \begin{cases} A\,m^2 + B\,n^2 + C\,p^2 + \dfrac{D}{h^2}\,q^2 = 0, \\ A'm^2 + B'n^2 + C'p^2 + \dfrac{D'}{h^2}\,q^2 = 0, \end{cases}$$

les équations (4) restent les mêmes, et, par suite, on obtient la même quadrispinale. L'équation des surfaces inscrites dans la développable (11) est évidemment

$$(12)\quad \frac{x^2}{\lambda A + \mu A'} + \frac{y^2}{\lambda B + \mu B'} + \frac{z^2}{\lambda C + \mu C'} + \frac{h^2 t^2}{\lambda D + \mu D'} = 0.$$

Cherchons si l'une de ces surfaces peut faire partie du système des quadriques (9). Les équations d'identification sont

$$(13)\quad \begin{cases} \lambda A + \mu A' = a - \rho, \\ \lambda B + \mu B' = b - \rho, \\ \lambda C + \mu C' = c - \rho, \\ \lambda D + \mu D' = h(d - \rho). \end{cases}$$

Les trois premières donnent λ, μ, ρ; la troisième h. Donc on peut toujours supposer, dans le mode de génération adopté, que la développable D_4 soit circonscrite à une des surfaces homofocales, et par suite, on peut énoncer le théorème suivant :

La quadrispinale à trois plans de symétrie est formée par les normales à une surface du 2^e^ ordre en tous les points d'une courbe du 4^e^ ordre, ayant les mêmes plans de symétrie que la surface.

Si les équations (13) sont indéterminées, ce mode de génération peut même être réalisé d'une infinité de manières, ce qui est conforme aux résultats obtenus par M. de la Gournerie [1].

Occupons-nous maintenant des plans tangents doubles de la quadrispinale.

La quadrispinale étant l'enveloppe des plans dont les axes sont tangents à D_4, les plans tangents doubles devront avoir pour axes des tangentes doubles de D_4. On sait d'ailleurs que les tangentes doubles

---

[1] *Recherches* citées, p. 137.

de D_4 sont les génératrices rectilignes des surfaces du 2^e^ ordre inscrites dans D_4. Nous sommes donc conduits à la question suivante :

Étant données les surfaces du 2^e^ ordre

$$\sum \frac{x^2}{A + \lambda A'} = 0, \tag{14}$$

rechercher celles de leurs génératrices qui sont des *axes*.

L'axe du plan

$$mx + ny + pz + qt = 0$$

sera donné par les formules suivantes :

$$\lambda x = m(a - \rho),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

où ρ est une variable donnant tous les points de l'axe. Si cette droite est une génératrice de la surface (14), l'équation

$$\sum \frac{m^2(a - \rho)^2}{A + \lambda A'} = 0$$

devra être satisfaite, quelle que soit ρ, ce qui donne les équations :

$$\left\{\begin{aligned} m^2 &= \frac{K(A + \lambda A')}{f'(a)}, & n^2 &= \frac{K(B + \lambda B')}{f'(b)}, \\ p^2 &= \frac{K(C + \lambda C')}{f'(c)}, & q^2 &= \frac{K(D + \lambda D')}{f'(d)}, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

où l'on a

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d).$$

En éliminant K et λ, on trouve

$$\begin{vmatrix} m^2 f'(a), & n^2 f'(b), & p^2 f'(c), & q^2 f'(d) \\ A, & B, & C, & D \\ A', & B', & C', & D' \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Ces équations, linéaires par rapport aux carrés des coordonnées tangentielles m, n, p, q, conviennent à une développable D'_4. Nous sommes donc conduits aux théorèmes suivants :

Les plans tangents doubles d'une quadrispinale Q enveloppent une développable de la quatrième classe

Leurs axes forment donc une quadrispinale Q', c'est-à-dire :

Une quadrispinale peut être définie : le lieu de celles des génératrices rectilignes des surfaces du second degré inscrites dans une même développable, c'est-à-dire qui rencontrent les 4 faces du tétraèdre conjugué commun en 4 points dont le rapport anharmonique est constant.

Voilà donc une nouvelle définition [1].

On a de plus une relation de réciprocité entre les quadrispinales Q, Q'. Car Q' étant le lieu des axes des plans tangents doubles de Q, les plans tangents doubles de Q' seront les mêmes que ceux de D_4, et auront pour axes les génératrices de Q. Chacune des quadrispinales est donc le lieu des axes des plans tangents doubles de l'autre, et, par conséquent, Q et Q' ont les mêmes propriétés. Les génératrices de Q, comme celles de Q', se groupent par 8, qui appartiennent à un même hyperboloïde. Tous les hyperboloïdes ainsi obtenus sont inscrits dans une développable D'_4, et l'on prend pour former la quadrispinale sur chaque hyperboloïde celles de ses génératrices qui sont des axes. Ces hyperboloïdes sont ceux que M. de la Gournerie a appelés *associés*.

La méthode que j'ai suivie paraît digne d'intérêt, surtout parce qu'elle rattache les surfaces de M. de la Gournerie à des surfaces plus générales du 8^e ordre. En particulier, la surface réglée du 8^e ordre sans conique double se rencontre, comme je le montrerai, dans un grand nombre de recherches, et surtout elle joue un rôle important dans la théorie des surfaces du 3^e ordre et du 4^e ordre à conique double.

Toutes les surfaces indiquées dans cette Note se distinguent des autres surfaces réglées par la propriété suivante. Les coordonnées d'un de leurs points s'expriment par les formules

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x = (a-\rho)R_1, & y = (b-\rho)S_1, \\ z = (c-\rho)T_1, & t = (d-\rho)U_1, \end{array} \right.$$

où R_1, S_1, T_1, U_1 sont des fonctions d'un autre paramètre. Pour les surfaces tétraédrales symétriques, ces fonctions sont des puissances

---

[1] La proposition réciproque serait la suivante : *La quadricuspinale est engendrée par les sécantes doubles d'une courbe gauche du 4^e ordre, qui coupent les faces du tétraèdre conjugué à cette courbe en 4 points dont le rapport anharmonique est constant.*

de même exposant d'une fonction linéaire de ρ. Des formules toutes semblables peuvent être données pour les coordonnées tangentielles d'un de leurs plans tangents.

En effet, si dans les équations (17) on fait varier ρ, on a une droite. Les coefficients de tout plan

$$mx + ny + pz + qt = 0$$

contenant cette droite doivent satisfaire aux deux équations

$$\sum maR_1 = 0, \quad \sum m\ R_1 = 0,$$

d'où l'on déduit, pour les coordonnées m, n, p, q du plan tangent des expressions de la forme

$$\begin{aligned} mR_1 &= \alpha + \beta\ u, & nS_1 &= \alpha' + \beta'\ u, \\ p\ T_1 &= \alpha'' + \beta''\ u, & qU_1 &= \alpha''' + \beta'''\ u, \end{aligned}$$

où u est une nouvelle variable.

Ainsi, pour la quadrispinale, on trouve

$$\lambda m = K \frac{a - \rho}{\sqrt{\alpha - \rho_1}}$$

et les formules analogues.

Ces faits sont d'ailleurs évidents géométriquement; car les surfaces réglées formées d'axes ne peuvent avoir pour réciproques que des surfaces formées aussi avec des *axes* [1].