Bulletin des sciences

mathématiques et astronomiques

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 263-279

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__263_0>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

T. VII, année 1870 [1].

COLLET. — *Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction.* (52 p.)

L'auteur commence par rappeler, dans une Introduction, les travaux de Cauchy, de Pfaff, de Jacobi, d'Ampère, de Bour et de Boole, qui ont quelque rapport avec la question dont il s'occupe. Cela posé, il se propose le problème suivant :

Étant données les relations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_m = 0$$

entre une fonction V, les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ dont elle dépend, et les dérivées de V par rapport à ces mêmes variables, trouver l'expression de V en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ qui satisfait aux équations proposées.

Le problème que se propose M. Collet au début de son travail n'est pas, on le voit, énoncé avec toute la précision nécessaire. Étant données les m premières équations différentielles

$$f_i = 0,$$

la première question qu'on doit se proposer est celle de savoir si les équations sont compatibles.

L'auteur, pour résoudre le problème qu'il s'est proposé, commence par rechercher les relations qui expriment que

$$p_1\, dq_1 + \ldots + p_n\, dq_n$$

est une différentielle exacte.

Supposons que les fonctions p_i soient déterminées par les équations

$$f_i = a_i,$$

où les a_i sont des constantes arbitraires ou déterminées, les conditions d'intégrabilité de ce système d'équations simultanées sont

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 27.

exprimées par les équations connues

$$(f_i, f_k) = 0.$$

Et ces conditions, l'auteur le démontre, sont nécessaires et suffisantes.

Dans un second paragraphe, l'auteur revient au problème qu'il s'est proposé, et il suppose que l'on ait entre les quantités p_i, au nombre de n, un nombre de relations

$$f_i = 0, \quad f_m = 0$$

insuffisant pour les déterminer. Les recherches du § I apprennent que les équations

$$(f_i, f_k) = 0$$

devront être des conséquences des équations données. Il pourra donc se présenter plusieurs cas. Ou bien ces relations seront identiquement satisfaites, ou bien elles seront des conséquences des premières, ou enfin, n'étant pas satisfaites en vertu des premières, elles conduiront à de nouvelles relations entre les p_i, q_i. On reconnaît donc sans difficulté que le problème sera impossible ou qu'il conduira à un système d'équations dans lequel les relations d'intégrabilité seront satisfaites en vertu des proposées. On est donc ramené au problème suivant :

Étant données entre les quantités p_i, q_i, en nombre $2n$, s relations

$$f_1 = a_1, \ldots, \quad f_s = a_s,$$

qui satisfont aux conditions d'intégrabilité, trouver entre les mêmes quantités une nouvelle relation

$$f_{s+1} = a_{s+1}$$

qui satisfasse aussi aux mêmes conditions.

L'auteur, on le voit, admet encore que, si les fonctions f_i satisfont aux conditions d'intégrabilité, il y aura une solution commune. Quoique cette proposition ne soit pas difficile à démontrer, son omission ôte un peu de clarté au travail du jeune et habile géomètre.

Collet. — *Du facteur intégrant pour les expressions différentielles du 1^er ordre renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes.* (30 p.)

Dans ce nouveau et élégant travail, l'auteur se propose de rechercher sous quelles conditions l'expression

$$X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n$$

devient une différentielle exacte, quand on la multiplie par un facteur convenablement choisi. Cette question est très-intéressante, et elle offre, on le voit, une application remarquable des principes posés par l'auteur dans le Mémoire précédent. Soit

$$(1)\qquad (h,\,k) = X_h\frac{d\mu}{dx_k} - X_k\frac{d\mu}{dx_h} + \mu\left(\frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h}\right).$$

On aura $(h,k)=0$, et la considération de ces équations conduit à la relation bien connue

$$(2)\quad X_h\left(\frac{dX_k}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_k}\right) + X_k\left(\frac{dX_m}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_m}\right) + X_m\left(\frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h}\right) = 0,$$

qui doit être identiquement satisfaite quels que soient h, k, m. L'auteur démontre d'abord que les équations de condition (2), en nombre $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, ne sont pas toutes distinctes, et qu'elles se réduisent à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ réellement indépendantes.

Mais, quand ces premières conditions d'intégrabilité sont satisfaites, le facteur intégrant doit encore satisfaire à $n-1$ équations aux dérivées partielles. Les conditions pour que ces équations soient compatibles sont recherchées par M. Collet, qui démontre qu'elles se réduisent aux $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ déjà trouvées précédemment. L'auteur examine ensuite différents problèmes se rattachant au problème principal; il traite en particulier le cas où le facteur intégrant est le produit de plusieurs fonctions dépendant chacune d'une seule variable indépendante.

Didon. — *Sur une intégrale double.* (8 p.)

L'intégrale double

$$\iint \frac{X_n(x)\,X_{n'}(y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

est nulle toutes les fois que n' est différent de n, et égale à

$$(-1)^m.2\pi\,\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\;\frac{1}{4m+1},$$

si

$$n = n' = 2m.$$

L'auteur déduit de cette détermination le résultat suivant :

$$\int\int(1 - 2ax + a^2)^{-\mu-\frac{1}{2}}(1 - 2by + b^2)^{-\mu-\frac{1}{2}}(1 - x^2y^2)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dx\,dy$$
$$= \frac{2\pi}{b^{\mu+\frac{1}{2}}}\int_0^{\sqrt{ab}} \alpha^{2\mu}(1+\alpha^4)^{-\mu-\frac{1}{2}}\,d\alpha.$$

On suppose $ab < 1$ et μ entier positif.

Radau (R.). — *Note sur la rotation des corps solides.* (2 p.)

L'auteur revient sur un travail publié dans le Recueil en 1869, pour indiquer qu'il avait mal compris l'énoncé d'une proposition de l'éminent géomètre anglais M. Sylvester.

Stephan (E.). — *Voyage de la Commission française envoyée par le Ministre de l'Instruction publique sur la côte orientale de la presqu'île de Malacca, pour y observer l'éclipse totale de Soleil du* 18 *août* 1868. (34 p.)

Compte rendu intéressant du voyage et des travaux de l'Expédition française pour l'observation de l'éclipse, composée de MM. Stephan, Rayet, Tisserand. On sait que ces savants sont arrivés en temps utile, que leur expédition, comme celle de M. Janssen, a pleinement réussi, et qu'elle a fait honneur à notre pays.

Darboux (G.). — *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.* (12 p.)

Ce travail est le développement de deux Notes insérées par l'auteur aux *Comptes rendus* (t. LXX, p. 675 et 746).

Darboux (G.) — *Sur une série de lignes analogues aux lignes géodésiques.* (6 p.)

Saint-Loup (L.). — *Étude expérimentale de l'attraction exercée par une bobine sur un barreau de fer doux.* (30 p.)

Gruey (L.-J.). — *Recherches sur la flexion de la lunette méridienne.* (36 p.)

Didon (F.). — *Développements sur certaines séries de polynômes à un nombre quelconque de variables.* (22 p.)

Dans ce remarquable travail, l'auteur étend certaines recherches de M. Hermite relatives à des polynômes associés. M. Hermite a trouvé deux séries de polynômes $U_{m,n}$, $V_{m,n}$, qui jouissent de la propriété que l'intégrale double

$$\int\int U_{m,n} V_{m',n'}\, dx\, dy,$$

étendue à toutes les valeurs des variables limitées par l'inégalité

$$x^2 + y^2 < 1,$$

soit nulle, tant que m, n ne sont pas égaux respectivement à m', n'.

L'auteur montre que cette série de polynômes n'est pas la seule qui existe, qu'il en existe une infinité d'autres satisfaisant aux mêmes conditions. Parmi tous ces systèmes, il en est un qui se distingue des autres par cette propriété que les deux séries de polynômes sont identiques.

Enfin, l'auteur indique plus généralement une série de polynômes $P_{m,n}$, tels que

$$\int\int P_{m,n} P_{m',n'} f(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

quand on n'a pas $m = m'$ n, $= n'$. Ces polynômes permettent de réaliser l'approximation indéfinie des fonctions de deux variables, et ils ont les rapports les plus étroits avec l'intégrale double

$$\int\int \frac{f(z, z')\, dz\, dz'}{(x - z)(y - z')}.$$

Terquem (A.). — *Étude sur le timbre des sons produits par des chocs discontinus, et, en particulier, par la sirène.* (100 p.)

G. D.

THE QUARTERLY JOURNAL of pure and applied Mathematics. — Edited by J.-J. Sylvester and N.-M. Ferrers, assisted by G.-G. Stokes, A. Cayley and M. Hermite, corresponding in Paris. — Vol. XI, 1870 [1].

N° 41, juin 1870.

Walton (William). — *Sur la relation qui existe entre la vitesse de*

---

[1] *Journal trimestriel de Mathématiques pures et appliquées,* publié par MM. Sylvester et Ferrers, avec le concours de MM. Stokes, Cayley et Hermite, correspondant à

rotation instantanée et la vitesse angulaire de l'axe instantané d'un corps qui tourne librement autour d'un point fixe, et sur les axes de plus grande et de moindre mobilité. (14 p.)

Soient ω la vitesse de rotation du corps autour de l'axe instantané; Ω la vitesse angulaire de cet axe; a, b, c les moments d'inertie principaux; h, g^2 les constantes des forces vives et des aires : la relation trouvée pourra s'écrire

$$\Omega^2 = \frac{(a+b+c)h^2 - 2hg^2}{abc\omega^2} - \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\omega^4},$$

en désignant par λ_1, λ_2, λ_3 trois expressions de la forme

$$\lambda_1 = \frac{h(b+c) - g^2}{bc}, \ldots.$$

CAYLEY (A.). — *Sur les surfaces du 4^e degré* $(*\between U, V, W)^2 = 0$. (Suite.)

Les variables U, V, W sont des formes quadratiques de coordonnées. Parmi les surfaces considérées se trouvent les réciproques de plusieurs surfaces de 6^e, 8^e, 9^e, 10^e et 12^e ordre (anneau parabolique, anneau elliptique, etc).

Citons, comme exemple, la surface réciproque de l'anneau parabolique. Si nous désignons par θ un paramètre variable, les coordonnées de la parabole pourront s'exprimer par $a\theta^2$, $2a\theta$, 0; l'équation d'une sphère de rayon k, ayant son centre sur cette parabole, sera

$$(x - a\theta^2 w)^2 + (y - 2a\theta w)^2 + z^2 - k^2 w^2 = 0,$$

et l'anneau parabolique sera l'enveloppe de cette sphère. La réciproque de l'anneau se trouve en cherchant d'abord la réciproque de la sphère

$$a\theta^2 X + 2a\theta Y + W + k\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 0,$$

puis l'enveloppe de cette réciproque, qui est

$$(aY^2 - XW)^2 - k^2X^2(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0.$$

Cette équation est celle de la surface du 6^e degré, qui est la réciproque de l'anneau parabolique. Cet anneau est une surface du 6^e ordre.

Paris. Londres, chez Longmans et C^{ie}, Paternoster Row. On donne chaque année quatre livraisons in-8° de 6 feuilles, dont le prix est de 5 shillings ($6^{fr},25$). Fondé en 1859.

FROST (Andrew). — *Solution générale du problème des quinze écolières.*

Il s'agit ici d'un problème d'analyse combinatoire, d'arrangements par groupes de trois sans répétition des mêmes couples.

BESANT (W.-H.). — *Notes mathématiques.*

I. Sur un problème de dynamique.
II. Sur l'aberration.
III. Formule relative aux glissettes.
IV. Sur une propriété des lignes pédales.

ROBERTS (Samuel). — *Note sur un évectant binaire.*

FROST (Percival). — *Sur la théorie du solénoïde d'Ampère.*

L'auteur s'est efforcé de simplifier la démonstration des formules connues.

HORNER (Joseph). — *Sur le calcul des carrés magiques.*

WOLSTENHOLME (John). — *Sur l'article concernant les porismes* (*Quart. Journ.*, n° 30).

WALTON (W.). — *Sur la pression que supporte un point fixe autour duquel tourne un corps solide invariablement lié à ce point.*

La pression cherchée est de la forme $a + b\left(\frac{\omega}{\rho}\right)^2$, en désignant par ω la vitesse angulaire du corps autour de l'axe instantané, et par ρ la portion de l'axe instantané interceptée par une certaine surface du second degré qui fait partie du corps solide.

WOLFF (J.-F.). — *Note sur la proposition* 7 *du* VI^e^ *livre d'Euclide.*

FROST (Pr). — *Théorème relatif à l'action qu'un courant lancé dans une hélice, qui enveloppe un cylindre de forme quelconque, exerce sur le pôle d'un aimant.*

JEFFERY (Henry). — *Sur les développées de courbes du* 3^e^ *degré.*

CAYLEY (A.). — *Sur une relation qui existe entre deux cercles.*

Le lieu géométrique des points d'où l'on peut mener à deux cercles donnés quatre tangentes, qui forment un faisceau harmonique, est une section conique qui passe par les huit points de contact des tangentes communes aux deux cercles. Cette conique peut se réduire à deux droites; il faut pour cela que les rayons c, c' et la distance des centres d satisfassent à la relation

$$c^2 + c'^2 = \tfrac{1}{2} d^2.$$

Considérons maintenant le point d'intersection P′ des polaires d'un point P par rapport à deux coniques données. Si P décrit une droite, P′ décrira une conique qui passe par les trois points conjugués des coniques données, et si la droite P passe par l'un de ces points conjugués, la conique P′ se réduit à deux droites dont la première passe par le même point conjugué, la seconde étant la droite fixe qui joint les deux autres points conjugués. Ainsi, quand le lieu de P est une droite qui passe par un point conjugué, le lieu de P′ est une autre droite qui passe par le même point.

Quelle est la condition qui doit être remplie pour que les deux droites dont il a été question plus haut soient des lieux géométriques de l'espèce qui vient d'être définie? Il faut pour cela que leur point d'intersection soit un point conjugué des deux cercles, ce qui donne la condition

$$c = c' = \tfrac{1}{2} d;$$

les deux cercles sont égaux et se touchent. Les deux droites en question se coupent alors à angles droits et passent par le point de contact des deux cercles.

Cayley (A.). — *Sur le porisme relatif au polygone inscrit et circonscrit et à la correspondance réciproque des couples de points sur une conique.*

Walton (W.). — *Note sur les courbes rhiziques.*

Soit $f(x)$ une fonction entière de la variable complexe x, et posons

$$x = u + iv;$$

nous aurons

$$f(x) = \mathrm{P} + i\mathrm{Q},$$

P et Q étant des fonctions des variables réelles u, v. L'auteur appelle *courbes rhiziques* les deux courbes $\mathrm{P} = 0$, $\mathrm{Q} = 0$, à cause du rapport qu'elles offrent avec les *racines* de l'équation $f(x) = 0$. Il démontre que ces courbes se coupent à angles droits, etc.

N° 42, novembre 1870.

Cayley (A.). — *Sur un problème d'élimination.*

Soient les quatre formes

$$P = (\alpha, \ldots \between x, y, z)^k, \quad Q = (\alpha', \ldots \between x, y, z)^k,$$
$$U = (a, \ldots \between x, y, z)^m, \quad V = (b, \ldots \between x, y, z)^n;$$

il s'agit de trouver la forme de relation qui doit exister entre les quatre systèmes de coefficients pour qu'il existe dans le faisceau

$$\lambda P + \mu Q = 0$$

une courbe qui passe par deux des points d'intersection des courbes $U = 0$, $V = 0$.

Routh (E.-J.). — *Équilibre d'un corps pesant et rugueux reposant sur un autre corps de même nature.*

Routh (E.-J.). — *Moment d'inertie d'un quadrilatère.*

Cayley (A.). — *Sur les surfaces du 4e degré* $(*\between U, V, W)^2 = 0$. (Suite.)

L'éminent géomètre considère ici une surface étudiée par M. de la Gournerie, en 1863.

Walton (W.). — *Sur les axes de traction et de percussion.*

Lorsqu'un corps solide tourne autour d'un point fixe, la pression supportée par ce point fait généralement un certain angle avec l'axe de rotation instantané. L'auteur étudie deux cas particuliers : celui où la pression coïncide avec l'axe instantané et celui où elle est perpendiculaire à cet axe. Dans le premier cas, il donne à l'axe instantané le nom d'*axe de traction* (*axis of lug*); dans le second, celui d'*axe de percussion* (*axis of kik*). Il examine les conditions que remplissent ces axes.

Horner (J.). — *Sur l'algèbre des carrés magiques.*

Frost (P.). — *Théorie de l'électro-dynamique.*

Jeffery (H.). — *Sur les développées des courbes du 3e degré.* (Suite.)

Cockle (sir James). — *Sur le mouvement des fluides.* (Suite.)

Walton (W.). — *Démonstration d'une propriété des fonctions elliptiques.*

Si l'on pose

$$x = \cos\theta \cos\varphi, \quad y = \sin\theta \sin\varphi,$$

l'équation différentielle

$$\frac{d\theta}{\Delta\theta} + \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 0$$

peut se ramener à la forme

$$dx^2 - dy^2 = k^2[(x\,dy - y\,dx)^2 - dy^2],$$

et en faisant

$$dy = p\,dx, \quad 1 - k^2 = k_1^2,$$

on aura

$$y = px - \frac{1}{k}\sqrt{1 - k_1^2 p^2}.$$

Cette équation appartient au type étudié par Clairaut; pour l'intégrer, il suffit d'y considérer p comme une constante, et si nous désignons cette constante par $\frac{1}{\Delta\mu}$, il vient

$$x - y\Delta\mu = \cos\mu.$$

C'est le théorème sur l'addition des arguments, car l'intégration directe donne

$$F(\theta) + F(\varphi) = F(\mu).$$

Walton (W.). — *Démonstration de l'existence d'une racine de toute équation.*

Cayley (A.). — *Sur les développées et les courbes parallèles.*

N° 43, avril 1871.

Walton (W.). — *Sur les asymptotes étoilées des courbes rhiziques.*

Les asymptotes de chacune de ces courbes rayonnent d'un centre commun et divisent l'espace en angles égaux, comme les raies d'une roue.

Le centre des asymptotes d'une courbe rhizique coïncide avec le centre analogue de la courbe conjuguée.

Besant (W.-H). — *Les équations d'Euler déduites de celles de Lagrange.*

Il s'agit des équations différentielles de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.

Ball (R.-S.). — *Les petites oscillations d'un point matériel et celles d'un corps solide.*

L'auteur a combiné la méthode de Lagrange avec certains théorèmes de cinématique, dus à M. Chasles, et il est arrivé à une série de propositions qu'il se borne à énoncer, la démonstration ayant été fournie ailleurs.

Wolstenholme (J.). — *Sur les courbes osculatrices.*

Cayley (A.). — *Un exemple de discriminant spécial.*

Si les coefficients $(a, \ldots)$ de la courbe

$$(a, \ldots \between x, y, z)^n = 0$$

sont tels que cette courbe ait des nœuds ou points doubles, le discriminant de la forme générale $(\star \between x, y, z)^n$ s'évanouit identiquement par la substitution des coefficients particuliers $(a, \ldots)$. La courbe particulière dont il s'agit a néanmoins un discriminant *spécial* qu'on ne peut pas déduire du discriminant général, et dont la réduction à zéro exprime la condition que la courbe possède un nœud de plus.

M. Cayley donne un exemple relatif à une courbe du 4^e degré.

Horner (J.). — *Algèbre des carrés magiques.* (Suite.)

Jeffery (H.). — *Sur les conicoïdes concycliques.*

Une série de théorèmes sur les surfaces concycliques du second degré.

Cayley (A.). — *Sur l'enveloppe d'une certaine surface du second degré.*

Il s'agit de trouver l'enveloppe de la surface

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0$$

dont les coefficients variables a, b, c, d doivent satisfaire aux deux relations

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 = 0,$$

$$\frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c} + \frac{s^2}{d} = 0.$$

M. Cayley trouve une équation du degré 24, quoiqu'il puisse démontrer *à priori* qu'elle doit se réduire au degré 12.

Cayley (A.). — *Tables des formes binaires du* 3^e *degré qui ont pour déterminants les nombres négatifs multiples de* 4 *depuis* -4 *jusqu'à* -400; *ceux de la forme* $-4h+1$ *depuis* -3 *jusqu'à* -99; *enfin les nombres* -972, -1228, -1336, -1836, -2700.

Walton (W.). — *Sur la transformation des deux équations simul-*

tanées

$$\frac{a(b-c)}{a-\alpha}+\frac{b(c-a)}{b-\beta}+\frac{c(a-b)}{c-\gamma}=0,$$

$$\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{a-\alpha}+\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{b-\beta}+\frac{\gamma(\alpha-\beta)}{c-\gamma}=0.$$

Glaiscer (J.-W.-L.). — *Sur l'équation de Riccati.*

Walton (W.). — *Sur la courbure des courbes rhiziques aux points multiples.*

Cayley (A.). — *Remarque sur le calcul de logique.*

Il s'agit de la manière dont Boole a formulé le syllogisme en 1848.

Cayley (A.). — *Sur l'inversion d'une surface du second degré.*

R. R.

PROCEEDINGS of the Royal Society of Edinburgh. Session 1869-70. — In-8°.

Thomson (sir William). — *Sur les forces qui agissent sur les solides plongés dans un liquide en mouvement.* (4 p.)

Thomson (sir William). — *Sur l'équilibre de la vapeur contre la surface courbe d'un liquide.* (5 p.)

Tait. — *Sur le flux d'électricité sur les surfaces conductrices.* (20 p.)

Tait. — *Sur le mouvement permanent d'un fluide incompressible parfait dans deux dimensions.* (1 p.)

Tait. — *Sur le mouvement le plus général d'un fluide incompressible parfait.* (2 p.)

Application des quaternions à l'étude du mouvement d'un fluide, en vue surtout du cas des tourbillons.

Tait. — *Notes mathématiques.*

1° De l'équation

$$4x=(x+1)^2-(x-1)^2,$$

écrite sous la forme

$$x^3=\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2,$$

on conclut que tout cube est la différence de deux carrés, dont l'un au moins est divisible par 9.

2° Si

$$x^3 + y^3 = z^3,$$

alors

$$(x^3 + z^3)^3 y^3 + (x^3 - y^3)^3 z^3 = (z^3 + y^3)^3 x^3,$$

ce qui prouve l'impossibilité de trouver deux entiers dont la somme des cubes soit un cube.

SANG (E.). — *Remarques sur les théories de l'action capillaire.* (2 p.)

SMITH (W. R.). — *Note sur la théorie du professeur Bain concernant la 4e proposition du Ier Livre d'Euclide.* (3 p.)

M. Bain, partant de l'idée de M. Stuart Mill, que toute démonstration non fondée sur une déduction syllogistique se rattachant aux définitions n'est autre chose qu'une *expérience,* en conclut que la démonstration donnée par Euclide de l'égalité de deux triangles qui ont un angle égal compris entre côtés égaux n'est en réalité qu'une induction, ni plus ni moins qu'une conclusion tirée d'une expérience de physique. Les partisans de cette doctrine oublient la différence fondamentale qui existe entre ces deux sortes d'*expérience.* Nous ne connaissons sur la constitution des corps que ce que l'expérience nous révèle, et c'est seulement par induction que nous pouvons en déduire des lois générales. Une figure de géométrie, au contraire, est comme une création de notre intelligence; si notre conception de cette figure reste identique, ses propriétés resteront nécessairement identiques, et il suffira d'une seule *expérience* pour nous la faire connaître démonstrativement. Cette expérience se fait par l'intuition, qui seule peut nous montrer les conceptions abstraites de la géométrie, et pour laquelle les représentations matérielles ne sont que de grossiers auxiliaires.

LEITCH (W.). — *Moyen simple de déterminer approximativement la longueur d'onde de la lumière.* (11 p.)

TAIT. — *Note sur les équations linéaires aux différentielles partielles.* (2 p.)

Application des quaternions à l'intégration de ces équations.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

T. LXXII [1].

N° 24. Séance du 19 juin 1871.

BOUSSINESQ (J.). — *Théorie de l'intumescence liquide appelée* onde solitaire *ou* de translation, *se propageant dans un canal rectangulaire.*

M. Boussinesq se propose d'établir théoriquement les lois des ondes observées par J. Scott Russel et par M. Bazin dans des canaux rectangulaires, sensiblement horizontaux et de longueur indéfinie, contenant un liquide de profondeur constante, et aussi la formule que M. Bazin a déduite de ses expériences (*Savants étrangers,* t. XIX, et Rapport de M. Clapeyron, *Compte rendu,* 10 août 1863), pour calculer la vitesse d'un courant de débit constant, propagé dans le même liquide.

CHEUX (A.). — *Sur l'aurore boréale du* 9 *avril* 1871, *observée à Angers.* — *Sur la lumière zodiacale observée à Angers le* 19 *février* 1871.

BRIFFAUT. (A.) — *Sur un bolide observé à Tours le* 17 *mars* 1871.

SAGOLS. — *Sur un bolide observé au sémaphore du cap Sicié le* 14 *juin* 1871.

N° 25. Séance du 26 juin 1871.

CHASLES. — *Propriétés des diamètres des courbes géométriques.*

M. Chasles s'occupe des diamètres d'une courbe d'ordre m et énonce, à l'occasion de ces droites, de nombreuses propositions qu'il obtient encore par l'application du principe de correspondance.

« Newton, dans son *Énumération des courbes du* 3^e *ordre,* a fait connaître et a appelé *diamètre* d'une courbe une certaine droite, qui est le lieu des centres de gravité (ou centres des moyennes distances) des points dans lesquels une série de droites parallèles rencontre la courbe.

» Cette belle propriété des courbes géométriques paraît être la

(1) Voir *Bulletin,* t. II, p. 241.

première que l'on ait connue. Newton la présentait comme une généralisation, ainsi que celle du rapport constant des produits des segments faits sur deux transversales parallèles à deux axes fixes, des propriétés des sections coniques. Elles étaient susceptibles elles-mêmes d'une certaine généralisation, qu'on obtient par une simple perspective, dans laquelle les droites parallèles deviennent des droites concourantes en un même point. Le théorème des diamètres conduit ainsi, comme l'a fait remarquer M. Poncelet [1], au beau théorème de Côtes, démontré par Maclaurin, savoir que, « si sur des transver- » sales partant d'un point fixe on prend les centres des moyennes » harmoniques des points d'intersection de ces droites et d'une » courbe géométrique, le lieu de ces points est une droite [2], » droite que l'on a appelée depuis *axe harmonique* du point fixe.

» On s'est fort peu occupé jusqu'ici de la conception des *diamètres* de Newton, dont on ne trouve peut-être quelques propriétés que dans un Mémoire de Steiner. Bien que le théorème de Côtes n'ait pas été non plus le sujet de recherches spéciales, il intervient dans la belle théorie des *polaires* des courbes de Bobillier [3], où il prend une importance réelle par son association avec la courbe même que l'on appelle la *polaire* d'une courbe donnée U. Que celle-ci soit d'ordre m, la polaire est une courbe d'ordre $(m-1)$ qui passe par les points de contact des $m(m-1)$ tangentes de U qu'on peut mener par un point fixe. Ce point est dit le *pôle* de la polaire. Bobillier considère la polaire de la courbe d'ordre $(m-1)$, laquelle est d'ordre $m-2$; puis la polaire de celle-ci, et ainsi de suite, et arrive à une conique dont la polaire est une droite. Cette droite est précisément l'*axe harmonique* du point fixe, relatif à la courbe d'ordre m. Un théorème général fort important, concernant deux quelconques des polaires successives [4], renferme en particulier cette double proposition, relative à la première polaire d'une courbe et à la dernière, c'est-à-dire à l'*axe harmonique :*

» *La polaire d'un point* P *est le lieu des points dont les axes harmoniques passent par ce point* P.

---

(1) *Memoires sur les centres des moyennes harmoniques ;* voir *Journal de Crelle*, t. 3.

(2) MACLAURIN, *Traité des courbes géométriques.*

(3) Voir *Annales de Mathématiques* de Gergonne, t. XVIII. 1827-1828, p. 89, 157 253, et t. XIX, p. 106, 138, 302.

(4) *Ibid.*, t. XIX, p. 302-307

» Et réciproquement : *L'axe harmonique d'un point est le lieu des points dont les polaires passent par le point.*

» Cette double propriété des *axes harmoniques* est la clef de cette théorie. Ainsi l'on conclut immédiatement du second énoncé que : *Une droite, considérée comme axe harmonique,* $a(m-1)^2$ *pôles, qui sont les points d'intersection des polaires de deux points de la droite;* et, par suite, que ces $(m-1)^2$ points appartiennent aux polaires de tous les autres points de la droite; que *ces polaires forment donc un faisceau d'ordre* $(m-1)$; d'où se conclut aussi que $2(m-2)$ *de ces polaires sont tangentes à une droite quelconque :* proposition fort utile, et de laquelle dérive aussi cette propriété fondamentale de la théorie des axes harmoniques, savoir que :

» *La courbe enveloppe des axes harmoniques des points d'une droite* D *est de la classe* $(m-1)$.

» C'est-à-dire que $(m-1)$ axes harmoniques passent par un même point I. En effet, les axes qui passent par ce point ont leurs pôles sur la polaire du point I; or cette polaire, d'ordre $m-1$, a $(m-1)$ points sur la droite D; ce sont les pôles des $(m-1)$ axes harmoniques passant par le point I.

» On reconnaît aussi que cette courbe de la classe $(m-1)$ est de l'ordre $2(m-2)$, c'est-à-dire qu'elle a $2(m-2)$ points sur une droite quelconque L. En effet, un point de la courbe est l'intersection des axes harmoniques de deux points infiniment voisins a, a' de la droite D. Ce point d'intersection est le pôle d'une polaire passant par les deux points a, a', et conséquemment tangente à la droite D en a. Mais les polaires de tous les points de la droite forment un faisceau d'ordre $(m-1)$; il y en a donc $2(m-2)$ qui sont tangentes à la droite D. Or les axes harmoniques des $2(m-2)$ points de contact sont tangents à leur courbe enveloppe aux points où ils coupent la droite L; ce qui démontre que la courbe est de l'ordre $2(m-2)$.

» Steiner, dans un travail fort étendu, concernant les courbes algébriques et leurs transversales rectilignes, dont l'analyse a été communiquée à l'Académie de Berlin, en mai 1851 [1], a considéré les *diamètres* de Newton, et en fait connaître quelques propriétés. On y

[1] Voir *Journal de Mathématiques*, de Crelle, t. 49, p. 7-106; 1854. Une traduction, due au regretté M. Woepcke, avait dejà paru dans le *Journal de Mathématiques*, de M. Liouville, t. XVIII, p. 315-356; 1853

trouve notamment la classe et l'ordre de la courbe enveloppe de ces diamètres, et deux théorèmes que j'indiquerai parmi ceux qui font le sujet de ma Communication. J'ignore si les démonstrations du beau Mémoire de Steiner ont été publiées depuis sa mort, et si d'autres géomètres se sont occupés aussi de cette théorie des diamètres.

» C'est par le principe de correspondance que je démontre toutes les propositions qui vont suivre, et que je réunis ici comme nouvel exemple des applications si variées de ce mode de raisonnement. »

Les théorèmes énoncés sont répartis sous les titres suivants : § I. Où l'on considère deux séries de points qui se correspondent anharmoniquement sur les droites de l'infini; § II. Où l'on considère les points de rencontre des diamètres et de la courbe U_m. § III. Où l'on considère les tangentes et les normales de la courbe U_m. § IV. Où l'on considère une courbe $U_{m'}^{n'}$, en rapport avec les diamètres de la courbe U_m. § V. Diamètre d'une courbe U_m en relation avec une courbe unicursale $U_{m'}$.

Secchi (Le P.). — *Sur les relations qui existent, dans le Soleil, entre les facules, les protubérances et la couronne.*

Roger (E.). — *Théorie des phénomènes capillaires.* Deuxième Mémoire.

Jordan (C.). — *Théorèmes sur les groupes primitifs.*

Les principales difficultés de la théorie des substitutions se rencontrent dans la recherche des groupes primitifs. Les propriétés générales de ces groupes méritent donc une attention spéciale; mais on n'en connaît qu'un petit nombre. M. Jordan montre que plusieurs des théorèmes connus sont susceptibles d'être considérablement généralisés.

L. P.