

# BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

LAGUERRE

## **Application du principe du dernier multiplicateur à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre**

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, tome 2  
(1871), p. 246-249

[http://www.numdam.org/item?id=BSMA\\_1871\\_\\_2\\_246\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2_246_1)

© Gauthier-Villars, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

**MÉLANGES.**

**APPLICATION DU PRINCIPE DU DERNIER MULTIPLICATEUR A L'INTÉGRATION  
D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU SECOND ORDRE;**

PAR M. LAGUERRE.

1. Soient  $f(x, y)$  et  $\varphi(x, y)$  deux polynômes du second degré en  $x$  et en  $y$ , ne différant que par les termes du premier degré et la valeur de la constante.

Considérons le système d'équations différentielles

$$(1) \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{d\eta} = \frac{\sqrt{f(x, y)}}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}}$$

dont le nombre est inférieur de deux unités au nombre des variables.

En désignant par  $F(x, y, z, u)$  une fonction du second degré, homogène et convenablement choisie, on peut poser

$$f(x, y) = F(x, y, a, b)$$

et

$$\varphi(\xi, \eta) = F(\xi, \eta, \alpha, \beta),$$

$a, b, \alpha$  et  $\beta$  étant des quantités constantes.

Cela posé,  $\lambda$  désignant une constante arbitraire, il est facile de voir que l'équation

$$(2) \quad \lambda = 2\sqrt{f(x, y)\varphi(\xi, \eta)} - \xi \frac{df}{dx} - \eta \frac{df}{dy} - \alpha \frac{df}{da} - \beta \frac{df}{db}$$

est une intégrale du système d'équations (1).

Il suffit, pour cela, de vérifier que la différentielle de l'expression précédente s'annule en vertu des seules relations (1).

Or on a

$$\begin{aligned} d\lambda &= \frac{\sqrt{f(x, y)}}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}} \left( \frac{d\varphi}{d\xi} d\xi + \frac{d\varphi}{d\eta} d\eta \right) \\ &+ \frac{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}}{\sqrt{f(x, y)}} \left( \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy \right) - \frac{df}{dx} d\xi - \frac{df}{dy} d\eta \\ &- dx \left( \xi \frac{d^2 f}{dx^2} + \eta \frac{d^2 f}{dx dy} + \alpha \frac{d^2 f}{da dx} + \beta \frac{d^2 f}{db dx} \right) \\ &- dy \left( \xi \frac{d^2 f}{dx dy} + \eta \frac{d^2 f}{dy^2} + \alpha \frac{d^2 f}{da dy} + \beta \frac{d^2 f}{db dy} \right). \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que, les polynômes  $f(x, y)$  et  $\varphi(\xi, \eta)$  étant respectivement égaux à  $F(x, y, a, b)$  et à  $F(\xi, \eta, \alpha, \beta)$  qui sont du second degré par rapport aux variables, on a les relations suivantes :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2}, \quad \frac{d^2 f}{dx da} = \frac{d^2 \varphi}{d\xi d\alpha}, \dots$$

d'où, en vertu d'un théorème connu sur les fonctions homogènes,

$$\xi \frac{d^2 f}{dx^2} + \eta \frac{d^2 f}{dx dy} + \alpha \frac{d^2 f}{dx da} + \beta \frac{d^2 f}{dx db} = \frac{d\varphi}{d\xi}$$

et

$$\xi \frac{d^2 f}{dx dy} + \eta \frac{d^2 f}{dy^2} + \alpha \frac{d^2 f}{dy da} + \beta \frac{d^2 f}{dy db} = \frac{d\varphi}{d\eta}.$$

La valeur de  $d\lambda$  devient, par suite,

$$d\lambda = (\sqrt{\varphi} dx - \sqrt{f} d\xi) \left( \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{df}{dx} - \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) \\ + (\sqrt{\varphi} dy - \sqrt{f} d\eta) \left( \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{df}{dy} - \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \frac{d\varphi}{d\eta} \right),$$

et elle s'annule évidemment en vertu des relations (1).

2. Soit l'équation du second ordre,

$$(3) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{f(x, y)}},$$

où  $F$  désigne une fonction quelconque de  $\frac{dy}{dx}$ .

Supposons que nous connaissions une intégrale particulière de l'équation

$$(4) \quad \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{F\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}},$$

et soit

$$(5) \quad \eta = \theta(\xi)$$

cette intégrale; si l'on imagine les variables  $\xi$  et  $\eta$  liées par cette relation dans les équations (1), elles deviennent

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{\theta'(\xi) d\xi} = \frac{\sqrt{f(x, y)}}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}},$$

ou bien encore

$$(6) \quad \frac{dx}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}} = \frac{dy}{\theta'(\xi) \sqrt{\varphi(\xi, \eta)}} = \frac{d\xi}{\sqrt{f(x, y)}}.$$

On peut aussi éliminer  $\xi$  entre les équations précédentes; on a

$$\frac{dy}{dx} = \theta'(\xi),$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\theta''(\xi)\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}}{\sqrt{f(x, y)}};$$

comme  $\eta = \theta(\xi)$  est une solution particulière de l'équation (4), on a

$$\theta''(\xi)\sqrt{\varphi(\xi, \eta)} = F\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right) = F\left(\frac{dy}{dx}\right);$$

l'équation du second ordre entre  $x$  et  $y$  est donc

$$(3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{f(x, y)}}.$$

3. D'après ce que j'ai dit plus haut, l'équation (2), si l'on y fait  $\eta = \theta(\xi)$ , est une intégrale du système d'équations du premier ordre (6).

On peut immédiatement appliquer à ces équations le principe du dernier multiplicateur de Jacobi (1), car on a évidemment

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\theta'(\xi)}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}}\right) + \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{f(x, y)}}\right) = 0;$$

on a donc pour deuxième intégrale

$$\int \left(\frac{d\xi}{d\lambda}\right) \frac{\theta'(\xi) dx - dy}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}} = \text{const.};$$

et cette dernière équation sera l'intégrale, avec deux constantes arbitraires, de l'équation (3),  $\xi$  étant exprimé, en vertu des équations (2) et (5), en fonction de  $\lambda$ ,  $x$  et  $y$ .

---

(1) JACOBI, *Theoria nova multiplicatoris, etc* (*Journal de Crelle*, t. 27, p 256)