BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Sur une méthode nouvelle pour l'étude des courbes tracées sur les surfaces algébriques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 23-32

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__23_1>

SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE POUR L'ÉTUDE DES COURBES TRACÉES SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES.

Nous avons déjà parlé à nos lecteurs (1) des travaux récents de quelques géomètres, MM. Clebsch, Cremona, Nöther, Zeuthen, etc., sur une méthode nouvelle dont l'origine et la première application se trouvent dans les travaux de M. Chasles, sur les courbes algébriques tracées sur les surfaces du second degré. Cette méthode devant conduire à des conséquences très-importantes, il nous a paru utile de la faire connaître et d'en développer les principes, en ce moment surtout où elle est encore récente, et où son exposition ne nous entraînera pas dans des développements dépassant les limites de ce Recueil.

C'est dans les *Comptes rendus* (2) que se trouvent réunis les tra-

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 130.

(2) *Sur les six droites qui peuvent être dans l'espace les directions de six forces en équilibre. — Propriétés de l'hyperboloïde à une nappe et d'une certaine surface du quatrième ordre.* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LII, 1861, p. 1094-1104.)

Description des courbes gauches de tous les ordres sur les surfaces réglées du troisième et du quatrième ordre. (*Comptes rendus*, t. LIII, p. 884-889.)

Théorie analytique des courbes à double courbure de tous les ordres tracés sur l'hyperboloïde à une nappe. (*Comptes rendus*, t. LIII, p. 985-996, 1077-1086, 1203-1210.)

vaux de M. Chasles sur les courbes de tous les ordres tracées sur les surfaces du second degré et sur quelques autres surfaces réglées. M. Chasles fait remarquer qu'au lieu de déterminer les courbes par deux équations entre les coordonnées de ces points, il y a le plus souvent de grands avantages à les étudier sur des surfaces déterminées, dont la surface plane ne sera plus qu'un cas particulier.

Il est facile de comprendre, en effet, quoique les idées proposées par l'illustre géomètre soient entièrement nouvelles, que la nature et les propriétés d'une courbe algébrique dépendent, en grande partie, des surfaces simples sur lesquelles elle est située. Considérons, par exemple, les courbes d'ordre déterminé n. Celles de ces courbes qui peuvent être tracées sur une surface du second ordre se distinguent des autres courbes de même ordre par des propriétés spéciales : par exemple, elles sont coupées par tout plan suivant n points situés sur une conique. Si les génératrices d'un système coupent la courbe en n' points, celles de l'autre système la couperont en $n - n'$ points : par exemple, une courbe du dixième ordre sera coupée au moins en cinq points par les génératrices de l'un des systèmes, ce qui constitue une propriété distinctive de la courbe, puisque, en général, on ne peut trouver qu'un nombre limité de droites rencontrant une courbe en quatre points.

M. Chasles étudie les courbes tracées sur l'hyperboloïde au moyen d'un système particulier de coordonnées. Ce système est un système rectiligne formé des deux séries de génératrices qu'on peut tracer sur toute surface du second ordre. La considération de ce système de coordonnées donne une théorie complète, qui se résume en de nombreux et importants théorèmes, pour l'étude desquels nous renvoyons au Mémoire original. Les principales questions étudiées par M. Chasles sont les suivantes : 1° propriétés d'une courbe gauche d'ordre $p + q$ pouvant posséder des points multiples ; 2° étude de la la développable formée par les plans osculateurs de la courbe ; 3° d'un cône mené par la courbe ; 4° de la développable circonscrite à l'hyperboloïde suivant la courbe ; 5° la génération des courbes gauches par les faisceaux de courbes d'ordre inférieur, génération pour laquelle M. Chasles crée une théorie toute semblable à celle qu'il a développée dans le plan.

On doit encore à M. Chasles des études sur les courbes gauches de tous les ordres, tracées sur des surfaces réglées, d'une nature spéciale, comprenant comme cas particulier l'hyperboloïde à une nappe. Voici comment on définit ces surfaces réglées. Traçons dans un plan une courbe *rationnelle* d'ordre k, ayant un point multiple d'ordre $k-1$. Si l'on prend sur une droite de l'espace les points qui correspondent anharmoniquement au point de la courbe (ou, si l'on veut, à la droite du faisceau ayant son centre au point multiple, passant par le point simple considéré sur la courbe), ces droites, qui joignent les points correspondants, sont les génératrices de la surface d'ordre k. M. Chasles généralise cette construction d'une surface réglée en prenant, au lieu de la courbe rationnelle ayant un seul point multiple d'ordre $k-1$, une courbe rationnelle quelconque.

Les travaux précédents ont conduit les géomètres à de très-nombreuses recherches. Ne pouvant tout citer, nous indiquerons cependant un article de M. Cremona sur les courbes tracées sur l'hyperboloïde (1). Rappelons aussi, avec M. Chasles (2), que déjà Plücker (3) et M. Cayley (4) avaient conçu l'idée du système de coordonnées rectilignes qu'on peut employer sur l'hyperboloïde, mais sans en faire l'application aux questions si variées que comporte l'étude des courbes gauches tracées sur les surfaces du second degré.

La théorie de M. Chasles peut être exposée d'une autre manière, et cette exposition, que nous allons indiquer en quelques mots, nous permettra de faire saisir la transition entre les travaux de M. Chasles et les travaux récents de M. Clebsch.

Soient une surface S du second degré et un plan P. Si par un point fixe a de la surface S on mène une droite, cette droite coupera la surface S en un nouveau point m et le plan P en un point μ, qui est la perspective ou projection stéréographique du point m. Si donc on regarde le plan P comme la perspective de la surface, à tout point du plan correspondra un seul point de la surface, et réciproquement. La surface sera, suivant une expression de M. Clebsch, *représentée* ou *appliquée* sur le plan. On peut exprimer les coordonnées d'un point quelconque de la surface en fonction de deux paramètres, qui sont les coordonnées du point qu'il a pour projection.

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LII, p. 1319-1323.

(2) *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, p. 253.

(3) *Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Classe.* (*Journal de Crelle*, 1847, t. 34, p. 341.)

(4) *Philosophical Magazine*, juillet 1861.

Quand on cherche les formules dont nous venons de parler, on trouve qu'elles sont de la forme suivante.

Désignons par X_1, X_2, X_3, X_4 les coordonnées homogènes du point de la surface, et soient ξ, ξ_1, ξ_2, les coordonnées homogènes du point du plan. Les formules qui donnent X_i en fonction des ξ sont de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho X_1 = f_1(\xi, \xi_1, \xi_2), \\ \rho X_2 = f_2(\xi, \xi_1, \xi_2), \\ \rho X_3 = f_3(\xi, \xi_1, \xi_2), \\ \rho X_4 = f_4(\xi, \xi_1, \xi_2), \end{cases}$$

où les symboles f désignent des fonctions homogènes et du second degré de ξ, ξ_1, ξ_2. (Ce sont, au fond, les formules de la transformation par rayons vecteurs réciproques, quand on passe d'un plan à une sphère.) ρ désigne un facteur arbitraire, indiquant que les rapports seuls de X_1, X_2, X_3, X_4 déterminent un point.

Dans ce cas, toute section plane de la surface dont l'équation est

$$(2) \qquad \Sigma m X = m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3 + m_4 X_4 = 0$$

sera représentée sur le plan par la conique dont l'équation est

$$(3) \qquad \Sigma m f = m_1 f_1 + m_2 f_2 + m_3 f_3 + m_4 f_4 = 0.$$

Supposons que les formules (1) nous aient été données *à priori* et cherchons le degré de la surface. Si par une droite D on fait passer deux plans, les sections de la surface par ces deux plans seront représentées par deux coniques, dont les points d'intersection correspondent aux points de la surface situés dans les deux sections planes, c'est-à-dire sur la droite D. Deux coniques se coupant en quatre points, on voit que toute droite coupera la surface en quatre points; la surface sera du quatrième ordre.

Cette conclusion est parfaitement rigoureuse, si les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 sont les plus générales du second degré, mais nous n'avons pas tenu compte d'un fait important. Les courbes

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \quad f_4 = 0$$

ont, dans le cas qui nous occupe, *deux points communs;* c'est cette propriété qui caractérise les formules relatives aux surfaces du second degré.

Mais alors se présente une difficulté, dont la solution constitue un des résultats les plus curieux et les plus importants de la nouvelle methode. Soient α, β, γ les coordonnées homogènes de l'un des deux points communs aux quatre courbes. Si l'on substitue ces coordonnées à la place de ξ, ξ_1, ξ_2, dans les formules (1), les valeurs des fonctions f deviennent nulles, les rapports des coordonnées X_1, X_2, X_3, X_4 deviennent indéterminés, et d'ailleurs, pour chacun de ces rapports, l'indétermination est effective; car on sait bien que si un quotient dépendant de deux variables,

$$\frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)},$$

se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ pour les valeurs des variables x_0, y_0 des variables, lorsque x, y tendront vers x_0, y_0 respectivement, le quotient pourra tendre vers toutes les limites possibles. Si l'on considère, par exemple, y comme une fonction de x dont la dérivée est y', et qui se réduit à y_0 pour $x = x_0$, la valeur limite du quotient sera

$$\frac{f'_x + f'_y \cdot y'}{\varphi'_x + \varphi'_y \cdot y'}.$$

Cette valeur limite dépendra donc, en général, de y', c'est-à-dire de la manière dont y tend vers y_0 quand x tend vers x_0.

On voit donc que les coordonnées X_1, X_2, X_3, X_4, ou plutôt les rapports de ces coordonnées sont réellement indéterminés, si on les prend individuellement. Considérons leur ensemble, et employons la méthode suivante.

Si α, β, γ sont les coordonnées du point considéré, que M. Clebsch appelle *point fondamental,* les coordonnées de tout point infiniment voisin seront données par les formules

$$\xi = \alpha + \varepsilon\varkappa, \quad \xi_1 = \beta + \varepsilon\lambda, \quad \xi_2 = \gamma,$$

où l'on a laissé, pour fixer les idées, l'une des coordonnées homogènes constante.

Les formules (1), développées d'après la série de Taylor, donnent

$$\rho X_1 = \varepsilon\left(\frac{\partial f_1}{\partial\alpha}\varkappa + \frac{\partial f_1}{\partial\beta}\lambda\right) + \varepsilon^2 \ldots,$$
$$\rho X_2 = \varepsilon\left(\frac{\partial f_2}{\partial\alpha}\varkappa + \frac{\partial f_2}{\partial\beta}\lambda\right) + \varepsilon^2 \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, en se bornant au premier terme et supprimant le facteur commun ε, on voit que les coordonnées des points limites seront données par les formules

$$\begin{aligned}\rho X_1 &= A\varkappa + B\lambda,\\ \rho X_2 &= A'\varkappa + B'\lambda,\\ \rho X_3 &= A''\varkappa + B''\lambda,\\ \rho X_4 &= A'''\varkappa + B'''\lambda.\end{aligned}$$

Ces formules, contenant une arbitraire, le rapport $\frac{\varkappa}{\lambda}$, déterminent une infinité de points correspondant au point fondamental, et ces points forment évidement une ligne droite.

Donc, en général, à un point fondamental correspondent tous les points d'une ligne droite située sur la surface. A une courbe infiniment petite, tracée autour du point fondamental, correspond sur la surface une ligne voisine de la droite. Chaque point de la droite correspond à une direction particulière menée par le point fondamental. Deux courbes qui se couperont dans le plan au point fondamental correspondront à deux courbes de la surface rencontrant la droite, mais *ne se rencontrant pas* sur la droite, à moins que leurs représentations sur le plan ne soient tangentes l'une à l'autre au point fondamental où elles passent toutes les deux.

Les méthodes géométriques rendent parfaitement compte aussi de ce fait remarquable. Reprenons la représentation d'une surface du second ordre sur le plan. Si l'on projette d'un point a les points de la surface sur le plan, à tout point μ du plan correspond un point m de la surface; mais il faut faire une exception pour les points α, β, où les génératrices rectilignes de la surface passant en a coupent le plan. Au point α du plan correspondent tous les points de la surface situés sur la droite $a\alpha$, et l'on voit sans peine que toute section plane de la surface se projettera suivant une conique passant par les deux points α, β.

Ajoutons que, dans certains cas spéciaux, au point fondamental peuvent correspondre des courbes plus compliquées que les lignes droites; il peut arriver que les premières dérivées des fonctions f s'annulent; mais ce que nous avons dit suffit, nous l'espérons, pour donner une idée de la méthode qu'on doit suivre dans tous les cas.

Revenons aux formules (1) et supposons que les fonctions f y soient du second degré, mais qu'égalées à zéro elles représentent des coniques passant par deux points fixes α, β. Alors deux sections planes de la surface se représenteront sur le plan suivant deux coniques se coupant en α et β, et en deux autres points variables μ, ν. Aux premiers points α, β, nous l'avons vu, ne correspondent pas, sur la surface, des points communs aux deux sections planes; les deux courbes de l'espace n'auront donc que deux points communs correspondant aux points μ, ν du plan; en d'autres termes, la surface est coupée en deux points par une droite; elle est du second degré.

Cela posé, traçons une courbe quelconque sur le plan; supposons qu'elle soit de l'ordre m et qu'elle ait α' de ses branches passant en a, β' en b. Cette courbe sera coupée en $2m - \alpha' - \beta'$ points par toute conique passant en α et β. Cette conique étant la représentation d'une section plane de la surface, on voit que la courbe tracée sur la surface et correspondante à la courbe plane sera coupée par un plan en $2m - \alpha' - \beta'$ points; en d'autres termes, elle sera de l'ordre indiqué par ce nombre. On déterminera toutes les singularités de cette courbe par une méthode due à M. Clebsch et dont nous parlerons plus loin. C'est ainsi qu'aux droites passant par α correspondent les genératrices rectilignes d'un système, aux droites passant par β les génératrices d'un second système, etc., etc. La droite qui joint les points α, β mérite un examen spécial : tous ses points correspondent à un seul point de la surface, mais nous ne pouvons qu'indiquer tous ces faits, intéressants au plus haut degré.

Si, dans les formules (1), les fonctions f, restant du second degré, s'annulaient toutes les quatre pour un seul système de valeurs, les coniques qui représentent sur le plan toute section plane de la surface passeraient par un seul point fixe α. La surface serait du troisième ordre, et elle serait engendrée par des droites correspondant dans le plan aux droites passant par le point fondamental α.

Enfin, si les fonctions f sont des fonctions générales du deuxième ordre, on a la *surface de Steiner*, dont toutes les sections planes sont représentées par des coniques. On voit bien ainsi que toute section de la surface par le plan tangent ayant un point double au point de contact, la représentation devra avoir un point double, c'est-à-dire se décomposer en deux droites. A chacune de ces deux droites correspond une conique appartenant à la surface. C'est ainsi que M Clebsch a appliqué sa méthode à la surface de Steiner (¹). Nous

(¹) Voir *Journal de Borchardt*, t 67, p 1-23 nous contenterons de renvoyer à son Mémoire, en mentionnant l'intégration de l'équation des lignes asymptotiques faite par MM. Clebsch et Gordan. Ces lignes sont du quatrième ordre et de la deuxième espèce.

Une année auparavant, M. Clebsch avait donné (1) une première et importante application de sa méthode à la surface générale du troisième ordre. C'est donc un des savants qui ont le plus contribué à faire honneur à la prédiction d'un géomètre illustre. On sait que Steiner affirmait que, dans un petit nombre d'années, la géométrie des surfaces du troisième ordre paraîtrait presque aussi facile que celle des surfaces du second degré. Nous n'en sommes pas là encore; cependant on ne peut méconnaître que des progrès très-sérieux aient été réalisés dans la voie que Steiner croyait nouvelle, et qui avait déjà été explorée avec succès par MM. Salmon et Cayley.

La méthode de M. Clebsch s'applique avec la plus grande facilité aux surfaces du troisième ordre. Les formules (1) contiennent alors des fonctions f du troisième degré. Ces fonctions s'annulent simultanément pour six systèmes de valeurs. En d'autres termes, les sections planes de la surface sont représentées par la série complète des courbes du troisième ordre passant par six points quelconques. Disposez six points au hasard dans le plan : au moyen de ces six points, on peut construire une surface du troisième ordre (et les surfaces homographiques), dont les propriétés dépendent exclusivement de la disposition relative des six points. Par exemple, si ces six points sont sur une conique, ou si trois sont en ligne droite, la surface a un point double. Nous signalerons encore ce fait curieux, qui est peut-être nouveau, et que nous avons rencontré dans nos recherches : si l'on a neuf points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre, deux des systèmes de trois droites contenant les neuf points forment deux triangles. Les six sommets de ces triangles déterminent une surface du troisième ordre, dont la ligne d'inflexion se décompose en quatre courbes planes, etc. (2).

Les vingt-sept droites de la surface correspondent : 1° aux six

---

(1) *Die Geometrie auf der Flächen dritter Ordnung.* (*Journal de Borchardt*, t. 65, p. 359-381.)

(2) Si les six points sont les six sommets d'un quadrilatère complet, la surface a quatre points doubles; ses lignes asymptotiques correspondent aux coniques inscrites dans le quadrilatère.

points fondamentaux; 2° aux quinze droites joignant deux à deux ces six points; 3° aux six coniques passant par cinq des six points. La situation respective de ces droites s'étudie sans la moindre difficulté.

M. Clebsch a examiné aussi (¹) les surfaces du quatrième ordre ayant une ligne double du second ordre. Les formules (1) sont encore du troisième degré par rapport aux ξ; seulement les courbes du troisième ordre qui correspondent aux sections planes de la surface ne passent plus que par cinq points; il y a seize droites sur la surface dont on peut indiquer la disposition en disant qu'elles forment un ensemble tout pareil à celui des seize droites d'une surface du troisième ordre qui rencontrent une conique de cette surface. M. Clebsch retrouve les dix séries de sections coniques qui avaient été signalées par M Kummer, ainsi que les courbes du troisième et du quatrième ordre qui se trouvent sur la surface.

On peut se rendre compte géométriquement de ce fait important, que, pour les surfaces précédentes, les points, selon l'expression de M. Chasles, se déterminent individuellement : si l'on considère, par exemple, une surface du troisième ordre, on peut toujours choisir sur cette surface une droite D et une conique C rencontrant cette droite en un point. Alors, si d'un point de l'espace on mène la droite unique qui rencontre la droite D et la conique C, cette droite coupera la surface en trois points, l'un situé sur C, l'autre sur D et le troisième m quelconque. Elle coupe, en outre, un plan fixe en un point μ, qu'on peut considérer comme correspondant au point m de la surface. A un point μ du plan correspond un seul point de la surface, et réciproquement.

La représentation d'une surface du quatrième ordre ayant une conique double s'effectuera évidemment de la même manière par des droites assujetties à couper la conique double et une des droites de la surface. Par tout point m de la surface, on pourra mener une telle droite, qui coupera un plan fixe en un point μ correspondant au point m.

Ces modes de représentation ne sont pas d'ailleurs uniques pour chaque surface. Prenons, par exemple, une surface du troisième ordre. On peut, nous l'avons vu, projeter un point de la surface sur

(¹) *Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen.* (*Journal de Borchardt*, t. 69, p. 142.)

le plan par des droites variables assujetties à rencontrer une conique C et une droite D de la surface; on pourrait, au lieu de prendre la conique et la droite, prendre deux droites D, D′ de la surface, ne se rencontrant pas. On peut aussi, conme l'a fait M. Clebsch, considérer la surface du troisième ordre comme engendrée par l'intersection de trois plans appartenant à des *réseaux projectifs*. Si l'on considère, en effet, les trois plans représentés par les équations

$$\begin{aligned} \varkappa a + \lambda b_1 + c &= 0, \\ \varkappa a' + \lambda b' + c' &= 0, \\ \varkappa a'' + \lambda b'' + c'' &= 0, \end{aligned}$$

où $a, b, c, a', \ldots$ désignent des fonctions linéaires des coordonnnées, il est clair que l'intersection de ces trois plans, quand on fera varier λ et $\varkappa$, décrira une surface du troisième ordre.

Parmi les représentations différentes d'une surface, on distingue comme la plus simple celle pour laquelle les sections planes sont représentées par des courbes de moindre degré. D'ailleurs, si l'on a deux représentations de la surface sur le plan, il en résulte évidemment, en faisant correspondre les deux points du plan m, m' qui correspondent à un même point de la surface, un mode de transformation des figures planes dans lequel à un point d'une des figures correspond un seul point de l'autre. C'est par là que les recherches de M. Clebsch se lient aux études générales de M. Cremona sur les transformations géométriques planes (1).

M. Clebsch a résumé et développé la méthode précédente, dans un travail considérable inséré au tome I des *Mathematische Annalen*. C'est dans ce Mémoire qu'il expose, pour la première fois, les principes généraux qui l'ont guidé dans l'étude relativement facile des cas précédents.

G. D.

(*A suivre.*)

(1) *Sulle trasformazioni geometriche delle curve piane.* (*Mémoires de l'Académie de Bologne*, t. V.)