

# BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

## Revue des publications périodiques

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, tome 2  
(1871), p. 231-246

[http://www.numdam.org/item?id=BSMA\\_1871\\_\\_2\\_\\_231\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__231_1)

© Gauthier-Villars, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

— — — — —

**REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.**

**ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN** <sup>(1)</sup>.

**T. LXVII** (fin); n<sup>os</sup> 1838-1848.

MÖLLER (A.). — Observations de petites planètes et de la comète de Coggia (II, 1870), faites à Lund, en 1870; l'auteur a retrouvé la planète Diane.

LUTHER (R.) et BÖRGEN (C.). — Observations de la planète  $\textcircled{113}$ , faites à Bilk et à Leipzig.

PALISA (J.). — Observations des comètes (I, 1870) et (II, 1870), faites à Vienne..

GRANT (R.). — Observations de petites planètes et de Neptune, faites à Glasgow.

GASPARIS (A. de). — Éléments approchés de Camille, planète perdue.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 87, 280, 363.

MAYWALD. — Éphéméride pour l'opposition de  $\textcircled{39}$  Lætitia, en 1871.

MÖLLER (A.). — Éléments et éphéméride de  $\textcircled{101}$  Hélène. — Éléments, éphéméride et observations de  $\textcircled{113}$  Amalthée.

TIETJEN (F.) et OPPOLZER. — Observations, éléments et éphéméride de  $\textcircled{113}$  Amalthée.

TIETJEN (F.). — Observations et éphéméride de  $\textcircled{103}$  Hera.

RUMKER (G.). — Observations des comètes (II, III, IV, 1870).

WINNECKE (A.). — Découverte d'une nouvelle comète; éléments de cette comète.

TIELE (B.), BRUHNS (C.), VOGEL (H.), PETERS (C.-F.-W.), RUMKER (G.) et OPPOLZER. — Observations, éléments et éphéméride de la comète (I, 1871).

OPPOLZER. — Cet astronome a retrouvé la planète Hélène.

LUTHER. — Communication des éléments de la comète de Tuttle, trouvés dans les papiers de Tischler, et calcul de l'éphéméride de cette comète pour 1871. — *Nota.* Cette comète vient d'être retrouvée à Marseille, par M. Borrelly.

KAISER (F.). — Observations de planètes, d'étoiles de comparaison, d'occultations, faites à Leyde.

STEPHAN (E.). — Lettre annonçant la découverte d'une comète, par M. Borrelly. (Cette comète est la même que celle de Winnecke.)

SPÖRER. — Observations des taches du Soleil.

PALISA (Z.) et LUTHER (R.). — Observations de  $\textcircled{113}$  Amalthée.

BRUHNS (C.) et TIETJEN (F.). — Observations de la comète (I, 1871).

VOGEL (H.). — Observations spectroscopiques de la comète

(I, 1871); deux raies brillantes, d'éclats très-différents, ont été observées.

Vogel (H.). — Description de l'Observatoire de Bothkamp. — Latitude de l'Observatoire; sa hauteur au-dessus du niveau de la mer. — Sa différence de longitude avec celui d'Altona. — Dimensions de l'équatorial; chambre noire; appareils photographiques et spectroscopiques. — L'instrument est bien réglé, et M. Vogel pense qu'on pourrait l'employer à des déterminations de positions absolues, sans avoir à craindre d'erreurs supérieures à 10 secondes. La puissance de la lunette a été essayée sur de faibles nébuleuses et sur des étoiles doubles très-voisines; elle ne laisse rien à désirer.

Tietjen (F.). — Éléments de  $\textcircled{112}$  Iphigénie.

Secchi (Le P. A.). — Découverte d'une nouvelle combinaison spectroscopique permettant de voir en même temps les images des taches et des protubérances solaires avec les raies spectrales. Les protubérances se dessinent comme des lignes brillantes; on peut mesurer avec précision leur hauteur et leur position par rapport aux taches et aux facules. — Le P. Secchi a examiné le spectre de la comète de Winnecke, et a trouvé qu'il consiste en une bande de couleur verte; il est du reste de même nature que celui des comètes déjà étudiées.

Birmingham (J.). — Observations des bandes de Jupiter; leurs changements d'aspect. Observations d'étoiles variables.

Hornstein (C.). — Calcul de l'orbite de la comète de Hind, de 1847, présenté comme exemple de l'extension que l'auteur a faite de la méthode d'Olbers au cas d'une orbite elliptique très-allongée.

Bruhns (C.). — Observations de petites planètes, et des comètes de Coggia (II, 1870), de d'Arrest et de Winnecke (1870).

Geelmuyden (H.). — Observations de la comète de Coggia, faites à Christiania.

Oppolzer. — Sur la comète de Winnecke (III, 1819). — M. Oppolzer a voulu voir si les observations de cette comète, comme celles de la comète d'Encke, conduiraient à l'existence d'un milieu résistant.

A cet effet, il est parti des éléments de la comète conclus des observations de 1819, 1858 et 1869, et il a cherché les perturbations de ces éléments, causées par Jupiter et Saturne, en négligeant toutefois le carré des forces perturbatrices, ce qui lui a permis de grandes simplifications dans le calcul. Il a trouvé que le moyen mouvement déduit des observations de 1858 à 1869 est (comme cela doit être dans l'hypothèse d'un milieu résistant) plus fort que celui déduit des observations de 1819 à 1858, mais d'une si petite quantité que la différence peut être attribuée à l'effet des termes négligés, de telle sorte qu'on ne peut pas formuler de conclusion rigoureuse.

DUNÉR (N.) — Observations du compagnon de Sirius, et comparaison avec l'éphéméride d'Auwers.

HALL (A.). — Observations et éléments de la comète (I, 1871).

MATHIESSEN (L.). — Observations et orbite du bolide du 27 septembre 1870. — Ce magnifique bolide, dont le diamètre apparent était les deux tiers environ de celui de la Lune, a pu être observé avec soin en plus de quarante stations. Ce riche matériel d'observations a permis à M. Mathiessen de se livrer à une discussion approfondie du phénomène; l'extrémité de la trajectoire visible, ou le point où a eu lieu l'explosion était à une hauteur d'environ deux milles géographiques; pendant une partie de sa course, le bolide a suivi à peu près une ligne droite; ce n'est qu'en pénétrant dans les couches plus denses de l'atmosphère que la courbure de la trajectoire s'est accentuée de plus en plus; la vitesse moyenne du météore était de neuf milles par seconde; son diamètre réel, de 1200 pieds. Le mouvement géocentrique est représenté par une hyperbole, et le mouvement héliocentrique aussi; l'auteur en conclut que ce corps est étranger à notre système solaire, et qu'il a dû venir d'une des constellations du ciel austral.

OPPOLZER. — Éléments et éphéméride de  $\textcircled{113}$  Amalthée.

KOWALCZYK. — Éléments corrigés de  $\textcircled{69}$  Hespérie, déduits d'observations faites pendant huit oppositions. — Observations de petites planètes, faites à Varsovie.

MÖLLER (A.). — Observations de petites planètes, faites à Lund.

ZENKER (W.). — Observations des protubérances solaires, dans une lumière monochromatique. — L'appareil de M. Zenker est un spectroscopie ordinaire auquel on a ajouté une deuxième fente, placée entre l'objectif et le plan focal; la largeur de cette fente varie à la volonté de l'observateur. Avec un tel spectroscopie, on peut voir dans son ensemble l'image d'une protubérance, ce qui ne pouvait se faire facilement dans la méthode de Zöllner; enfin, on peut adapter l'instrument à des télescopes de grande distance focale, sans avoir recours aux forts oculaires de Zöllner.

PLUMMER (J.). — Observations de petites planètes, faites à Durham.

SCHULHOF (L.). — Éphémérides hypothétiques pour l'opposition de (66) Maia, en 1871. — En vue de retrouver cette planète, aujourd'hui perdue, M. Schulhof donne cinq systèmes d'éléments différents les uns des autres, et représentant néanmoins assez bien les observations connues de la planète, et il construit les éphémérides correspondantes.

TEMPEL. — Découverte d'une nouvelle comète à l'Observatoire de Milan.

WINNECKE (A.), BRUHNS (C.), WEISS (E.), SCHULHOF (L.) et RÜMKER (G.). — Observations, éléments et éphéméride de la comète (II, 1871).

SANDBERG (A.-J.). — Éphéméride pour l'opposition de (92) Ondine, en 1871. T. F.

MATHEMATISCHE ANNALEN, publiées par MM. CLEBSCH (A.) et NEUMANN (C.) <sup>(1)</sup>.

REISS (M.). — *Études de géométrie analytique.* (42 p.)

L'auteur, enlevé malheureusement depuis à la science, étudie par la géométrie analytique les relations entre des points situés sur des

---

(<sup>1</sup>) Voir *Bulletin*, t. II, p. 173.

courbes ou dans le plan. C'est ainsi que sont développées les relations entre six points sur une conique, dix points d'une courbe du troisième ordre, etc., et ces relations sont mises sous une forme qui les rend indépendantes du choix des axes.

THOMAE (J.). — *Sur les séries hypergéométriques supérieures, et en particulier sur la série*

$$1 + \frac{a_0 a_1 a_2}{b_0 b_1 b_2} x + \frac{a_0 (a_0 + 1) a_1 (a_1 + 1) a_2 (a_2 + 1)}{b_0 (b_0 + 1) b_1 (b_1 + 1) b_2 (b_2 + 1)} x^2 + \dots$$

(18 p.)

L'auteur part de l'équation linéaire

$$(1-x) \frac{d^h \gamma}{(d \log x)^h} + (-A_1 - B_1 x) \frac{d^{h-1} \gamma}{(d \log x)^{h-1}} \\ + (A_2 - B_2 x) \frac{d^{h-2} \gamma}{(d \log x)^{h-2}} + \dots + [(-1)^h A_h - B_h x] \gamma = 0.$$

Si l'on pose <sup>(1)</sup>

$$F_x \left( \begin{matrix} \alpha, \alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(h-1)} \\ \beta, \beta', \beta'', \dots, \beta^{(h-1)} \end{matrix} ; x \right) \\ = x^t \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^{hn} x^n \Pi(\varepsilon - \alpha) \dots \Pi(\varepsilon - \alpha^{(h-1)}) \Pi(-\varepsilon - \beta) \dots \Pi(-\varepsilon - \beta^{(h-1)})}{\Pi(n + \varepsilon - \alpha) \dots \Pi(n + \varepsilon - \alpha^{(h-1)}) \Pi(-n - \varepsilon - \beta) \dots \Pi(-n - \varepsilon - \beta^{(h-1)})},$$

l'équation différentielle est satisfaite par  $2h$  de ces fonctions  $F_x$  convenablement choisies. Ces  $2h$  séries sont appelées par M. Thomae *séries hypergéométriques d'ordre  $h$* . L'auteur étudie, en particulier, celles du troisième ordre, au sujet desquelles il donne le théorème suivant :

*Toutes les séries hypergéométriques du troisième ordre dont les exposants diffèrent de nombres entiers s'expriment en fonction linéaire et homogène de trois quelconques d'entre elles, les coefficients de la relation linéaire étant des fonctions rationnelles de  $x$ .*

CLEBSCH (A.). — *De la représentation sur le plan des surfaces réglées du quatrième ordre, qui possèdent une courbe double du troisième degré.* (22 p.)

(<sup>1</sup>) Où  $\Pi$  est le signe employé par Gauss pour les intégrales eulériennes.

L'auteur détermine d'abord les expressions des coordonnées, soit d'un point, soit d'un plan tangent de la surface en fonction de deux paramètres. Par exemple, les coordonnées homogènes  $x_i$  d'un point de la surface sont données par les formules

$$\rho x_i = a_i + \lambda b_i + \lambda^2 c_i + \mu (\alpha_i + \lambda \beta_i + \lambda^2 \gamma_i).$$

Ces formules se déduisent immédiatement de la définition que M. Cremona a adoptée pour ces surfaces dans les *Mémoires de l'Académie de Bologne* (t. VIII). Les formules qui déterminent le plan tangent sont de la même forme que les précédentes, ce qui doit paraître évident d'après les deux théorèmes suivants que démontre M. Clebsch :

La surface est formée par celles des cordes d'une cubique gauche donnée qui appartiennent à un complexe linéaire. La cubique gauche est la courbe double de la surface.

La surface est le lieu des intersections des plans osculateurs d'une cubique gauche qui appartiennent à un complexe linéaire.

La surface développable formée par les plans osculateurs est la développable des plans tangents doubles de la surface.

Le Mémoire se termine par l'étude détaillée et complète des divers éléments géométriques se rapportant à la surface.

BRIOSCHI (F.). — *Des substitutions de la forme*

$$\Theta(r) \equiv \varepsilon \left( r^{n-2} + ar^{\frac{n-3}{2}} \right)$$

pour un nombre  $n$  premier de lettres. (4 p.; fr.)

L'auteur établit le théorème suivant :

*Les substitutions de la forme précédente ne peuvent être des substitutions conjuguées que dans les deux cas de  $n = 7$ ,  $n = 11$ .*

Pour  $n = 7$ , on aura un système de 4.6.7 substitutions conjuguées, et les fonctions invariables par ce système ne pourront avoir que 30 valeurs.

Pour  $n = 11$ , il y a un système de 6.10.11 substitutions conjuguées, et une fonction de 11 lettres invariable par ce système ne pourra avoir que 60480 valeurs.

BRILL (A.). — *Deuxième Note relative aux modules d'une classe d'équations algébriques.* (4 p.)



Cette Note contient une démonstration nouvelle des résultats établis par MM. Cremona et Casorati dans une Note intitulée : *Osservazioni intorno al numero dei moduli delle equazioni, etc.*, et communiquée à l'Institut de Milan. Dans leur livre sur les fonctions abéliennes, MM. Clebsch et Gordan avaient adopté, pour les courbes de même genre, des formes normales différentes de celles qui avaient été choisies par Riemann. M. Cremona a donné les formules de transformation de ces formes normales pour les cas de  $p = 4, 5, 6$ . M. Brill établit les mêmes résultats par une voie purement analytique.

REYE (TH.). — *Les surfaces algébriques, leurs courbes d'intersection et leur génération par des faisceaux projectifs.* (29 p.)

Désignons par

$F^n$  une surface d'ordre  $n$  ;

$C^{p,q}$  l'intersection de deux surfaces  $F^p, F^q$  ;

$[n, p, q]$  les points communs à  $F^n, F^p, F^q$  ;

$N(n)$  le nombre de points déterminant une  $F^n$  ;

$N\left(\frac{n}{p}\right)$  le nombre des points d'une  $F^p$  déterminant une courbe  $C^{n,p}$  sur  $F^p$  ;

$N\left(\frac{n}{p, q}\right)$  le nombre des points d'une  $C^{p,q}$  par lequel un groupe  $(n, p, q)$  de points d'intersection de la  $C^{p,q}$  avec une  $F^n$  est déterminé.

Dans la première Partie se trouvent déterminés les nombres précédents, et démontrés quelques théorèmes qui s'y rattachent.

Dans la seconde Partie, l'auteur étudie les différents modes de génération des surfaces et des courbes par des faisceaux ou des réseaux projectifs, et fait l'application des résultats obtenus à la théorie des polaires, des courbes et des surfaces algébriques.

NEUMANN (C.). — *Sur la théorie du potentiel.* (1 p.)

HOPPE (R.). — *Représentation conforme d'une surface du second degré sur le plan.* (10 p.)

Il s'agit, dans ce Mémoire, du problème principal de la théorie des cartes géographiques. On sait que la théorie des surfaces homo-

focales permet de représenter l'ellipsoïde sur un plan avec similitude des éléments infiniment petits, et d'ailleurs, quand on a une solution du problème, on obtient sans peine toutes les autres. L'auteur étudie les détails de la solution connue depuis longtemps.

HAASE (J.-C.-F.). — *Sur la théorie des courbes planes du n<sup>ième</sup> ordre avec  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  points doubles ordinaires ou de rebroussement.*

L'auteur donne des propositions analogues à celles de M. Chasles sur la génération de ces courbes, qui ont été étudiées analytiquement par plusieurs autres géomètres, et en particulier par M. Clebsch (*Journal de Borchardt*, t. LXIV).

ROSANES (J.). — *Sur les triangles placés en perspective.* (4 p.)

« Si deux triangles ABC, abc sont en perspective de deux manières différentes, l'une d'elles se déduisant de l'autre par une simple permutation des lettres A, B, C, ils sont encore en perspective d'une troisième manière qui correspond à la troisième permutation circulaire des lettres A, B, C. »

SCHROETER (H.). — *Sur les triangles en perspective.* (10 p.)

Cet article se rapporte à la même question que le précédent.

HIERHOLZER (C.). — *Sur les coniques dans l'espace.* (24 p.)

La détermination des coniques dans l'espace exige, comme on sait, 8 conditions. M. Chasles, dans une Communication extrêmement importante (*C. R.*, 1865, p. 389), a donné les nombres de coniques satisfaisant à 8 conditions élémentaires. Malheureusement M. Chasles n'a pas encore communiqué les démonstrations des nombreux théorèmes que lui doit cette théorie. M. Lüroth a établi par une voie géométrique (*Journal de Borchardt*, t. LXVII) le nombre des coniques touchant 8 droites. Dans le Mémoire dont nous rendons compte, M. Hierholzer emploie les méthodes analytiques.

Il commence par étudier les cônes tangents à six droites et établit que leurs sommets forment une surface du 8<sup>e</sup> ordre ayant les 6 droites pour droites doubles, et contenant, en outre, les 30 droites qui rencontrent 4 des précédentes.

Si l'on ajoute la condition de contact avec une nouvelle droite, les sommets des cônes décrivent une courbe du 34<sup>e</sup> ordre. Enfin, il y a 92 cônes touchant 8 droites.

Comme cas particulier, on obtient le théorème suivant, déjà énoncé par MM. Lüroth et Nöther. Il y a un seul cône touchant 8 droites, dont l'une est rencontrée par les 7 autres.

L'auteur indique, en outre, un grand nombre d'autres théorèmes, qui, dans des cas particuliers, confirment plusieurs propositions déjà connues.

ENNEPER (A.). — *Recherches sur quelques points de la théorie générale des surfaces.* (37 p.)

L'auteur développe un grand nombre de relations différentielles intéressantes, relatives aux systèmes de coordonnées curvilignes tracées sur les surfaces. Il en fait l'application à quelques questions déjà traitées par d'autres géomètres (<sup>1</sup>).

LOMMEL (E.). — *Intégration de l'équation*

$$x^{m+\frac{1}{2}} \frac{d^{m+1}y}{dx^{2m+1}} \mp y = 0$$

*par les fonctions de Bessel.* (12 p.)

MEISSEL. — *De la détermination du nombre de nombres premiers compris entre deux limites données.* (5 p.)

L'auteur arrive à cette conclusion, que les Tables de Burckhardt sont correctes pour le premier million au moins. Il promet de continuer ses utiles recherches.

VON DER MÜHLL (K.). — *Sur le problème de températures stationnaires.* (6 p.)

Il est admis généralement, dans la théorie du mouvement de la chaleur, qu'après un temps suffisamment long l'état de température d'un corps s'approche d'un état limite qui est indépendant des températures initiales.

M. Von der Mühl démontre, en toute rigueur, cette importante proposition. G. D.

(<sup>1</sup>) Voir en particulier, dans le *Journal de l'École Polytechnique*, le Mémoire de M. O. BONNET, sur la théorie des surfaces applicables.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE  
DES SCIENCES.

Tome LXXII.

N° 15. Séance du 10 avril 1871.

CHASLES. — *Propriétés des systèmes, relatives, toutes, à certaines séries de normales en rapport avec d'autres lignes de divers points.*

M. Chasles énonce d'abord 20 théorèmes divers, c'est-à-dire qui ne présentent pas un caractère commun; puis 27 théorèmes dans lesquels une série de droites rencontrent une droite fixe en des points d'où partent d'autres droites; enfin 13 théorèmes dans lesquels se trouvent des conditions de parallélisme ou de perpendicularité de certaines séries de droites.

« Toutes les propositions dont je donne ici les énoncés, dit M. Chasles, ont été démontrées d'une manière générale par le *Principe de correspondance*, bien qu'un certain nombre se puissent conclure de quelques cas particuliers, notamment quand il se trouve certains points ou droites fixes dans les conditions de la question. »

BOUSSINESQ (J.). — *Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres. Second Mémoire : Des plaques planes.*

Suite du Mémoire présenté dans la séance précédente.

N° 16. Séance du 17 avril 1871.

BOUSSINESQ (J.). — *Méthode nouvelle sur la résolution d'une classe importante et très-nombreuse d'équations transcendantes.*

Cette troisième Partie du travail de l'auteur a pour objet la résolution par approximations successives d'équations dont les premiers membres sont définis par des équations différentielles de forme déterminée; c'est là un genre de questions qui se présente fréquemment en Physique mathématique.

N° 17. Séance du 24 avril 1871.

CHASLES. — *Propriétés des systèmes de coniques, dans lesquels se trouvent des conditions de perpendicularité entre diverses séries de droites.*

Chaque série de droites donne lieu généralement à trois questions : la recherche de la courbe enveloppe de ces droites, celle de la courbe sur laquelle se trouve leurs pieds de perpendicularité, et celle de la courbe lieu des points de rencontre de ces droites et des coniques auxquelles elles appartiennent.

M. Chasles présente les énoncés de 44 nouvelles propositions, chaque proposition renfermant un théorème relatif à chacune des questions qui viennent d'être indiquées.

DELAUNAY. — *Calcul de quelques nouveaux termes de la série qui exprime le coefficient de l'équation séculaire de la Lune.*

M. Delaunay communiqua à l'Académie, en 1859, le résultat auquel il était parvenu dans le calcul du coefficient de l'équation séculaire de la Lune ; il trouva, en prenant le siècle pour unité de temps, que le coefficient du carré du temps dans l'expression de la longitude moyenne de la Lune avait pour valeur  $+6'',11$ . (*Comptes rendus*, t. XLVIII, p. 823.)

Depuis cette époque, M. Delaunay a repris le calcul de l'équation séculaire de la Lune, en ajoutant aux termes déjà calculés de nouveaux termes des neuvième et dixième ordres ; il donne alors la valeur complète du coefficient en question, et trouve, en réduisant en nombres, la nouvelle valeur  $+6'',176$  ; c'est une augmentation de  $0'',066$  pour la valeur de ce coefficient obtenue en 1859.

N° 18. Séance du 1<sup>er</sup> mai 1871.

CHASLES. — *Théorèmes divers concernant les systèmes de coniques représentés par deux caractéristiques.*

M. Chasles donne les énoncés de 100 nouveaux théorèmes concernant : 1° les tangentes aux points d'une droite D, ou menées par un point S ; 2° les tangentes et diamètres ; 3° les diamètres ; 4° les diamètres conjugués ; 5° les asymptotes ; 6° les deux tangentes menées d'un même point à chaque conique ; 7° les deux points de chaque conique sur une droite ; 8° les coniques coupées par deux droites.

N° 19. Séance du 8 mai 1871.

BOURGET (J.). — *Influence de la résistance de l'air dans le mouvement vibratoire des corps sonores.*

Dans un Mémoire approuvé par l'Académie (*Comptes rendus*, t. LX, 1865), M. Bourget avait donné la théorie complète du mouvement vibratoire des plaques circulaires ; soumettant ses résultats à l'expérience, il avait constaté que les sons observés sont notablement différents des sons calculés ; et l'écart, qui peut aller à plusieurs tons, ne peut pas être attribué à des erreurs d'observation. En cherchant la cause de ces perturbations, M. Bourget a été conduit à la placer dans la résistance de l'air comme force perturbatrice, et supposant provisoirement cette résistance, dont la loi est inconnue, proportionnelle à la vitesse, il arrive, par une analyse fort simple, à des lois remarquables, qui peuvent se formuler ainsi :

*Considérons comme mouvement normal celui qui aurait lieu dans le vide. Si une membrane vibre dans un milieu résistant, les carrés des nombres de vibrations sont diminués d'une quantité constante pour chacun des sons successifs qui composent la série des harmoniques. La forme des lignes nodales, au contraire, n'est nullement modifiée par la résistance du milieu.*

TREMESCHINI (G.-A.). — *Formes successives d'une tache solaire observée dans les premiers jours de mai.*

N° 20. Séance du 15 mai 1871.

CHASLES. — *Propriétés des courbes d'ordre et de classe quelconques démontrées par le Principe de correspondance.*

« Je me propose, dans ma Communication de ce jour, dit M. Chasles, de montrer que, si le mode de raisonnement qui constitue le *Principe de correspondance* jouit ainsi d'un privilège précieux dans la théorie générale des systèmes de courbes, il s'applique aussi, et avec la même facilité, dans la théorie générale des courbes géométriques, considérées soit isolément avec des points et des droites, soit associées entre elles : questions regardées généralement comme étant du domaine propre de l'Analyse. »

Cette importante Communication de M. Chasles renferme les énoncés de plus de cent propositions nouvelles, qui se trouvent répartis dans les Chapitres dont les titres suivent :

CHAPITRE I. — *Propriétés d'une conique.*

CHAPITRE II. — *Propriétés d'une conique en rapport avec une courbe géométrique  $U_m$  ou  $U^n$ .*

CHAPITRE III. — *Propriétés d'une courbe géométrique, concernant des systèmes de deux points ou de deux droites conjugués par rapport à une conique.*

CHAPITRE IV. — *Propriétés diverses des courbes géométriques auxquelles donne lieu la présence d'une conique.*

CHAPITRE V. — *Propriétés des courbes géométriques.*

BERTRAND (J.). — *Considérations relatives à la théorie du vol des oiseaux.*

N° 21. Séance du 29 mai 1871.

N° 22. Séance du 5 juin 1871.

CAZIN (A.). — *Nouvelle méthode pour mesurer le magnétisme en unités mécaniques.*

N° 23. Séance du 12 juin 1871.

SERRET (J.-A.). — *Mémoire sur le principe de la moindre action.*

« La première idée de la propriété qui constitue le principe dit de la moindre action, est due à Euler; ce grand géomètre démontra effectivement, dès 1744, à la fin de son *Traité des isopérimètres*, que, dans les trajectoires décrites par des forces centrales, l'intégrale de la vitesse multipliée par l'élément de la courbe est toujours un *maximum* ou un *minimum*. Lagrange montra ensuite, en 1760 (*Œuvres de Lagrange*, t. I, p. 365), que la même propriété peut être étendue au mouvement d'un système quelconque de corps, pourvu que le *principe des forces vives* ait lieu, et il en développa l'application à la solution d'un assez grand nombre de problèmes. Aussi l'illustre auteur de la *Mécanique analytique* jugea-t-il plus tard que la propriété dont il s'agit méritait, à raison de son importance, de faire l'objet d'un nouveau principe général de Dynamique, qu'il appela de la *moindre action*, sans se dissimuler la déféctuosité de cette dénomination renouvelée de Maupertuis.

» Pour faire usage du principe de la moindre action dans la solution des problèmes de Mécanique, il suffit d'égaliser à zéro la *variation* de l'intégrale dont la valeur est un *maximum* ou un *minimum*, et le résultat qu'on obtient ainsi ne diffère pas, au fond, de la formule générale de la Dynamique.

» Il est donc peu important, à ce point de vue, de savoir si le *maximum* ou le *minimum* a lieu effectivement ; ce qu'il faut, c'est, je le répète, que la variation de l'intégrale soit nulle, et la démonstration que Lagrange a donnée de son principe n'établit pas autre chose.

» Mais il n'en est pas moins d'un haut intérêt pour l'analyse et pour la Mécanique générale qu'une propriété aussi remarquable du mouvement soit connue exactement. »

C'est en ces termes que M. Serret pose la question qu'il doit aborder ; voici l'énoncé du principe dont il présente une démonstration complète :

*Lorsque le principe des forces vives est applicable à un système de points matériels libres ou liés entre eux et sollicités par des forces données, le mouvement du système est toujours tel, que la somme des quantités de mouvement des divers corps multipliés par les éléments des trajectoires respectives  $a$ , entre deux positions quelconques du système, une intégrale minimum. C'est-à-dire que l'intégrale dont il s'agit est moindre dans le mouvement réel que dans le mouvement nouveau qui aurait lieu si, rendant le premier mouvement impossible par l'introduction des liaisons nouvelles, on obligeait le corps à suivre, sous l'action des mêmes forces, des trajectoires infiniment voisines des premières, pour passer de la première position à la deuxième, tout en laissant subsister l'équation des forces vives et en conservant la valeur de la constante qui exprime la différence entre la demi-somme des forces vives et la fonction des forces.*

M. Serret se proposait donc de déterminer le signe de la variation seconde de l'intégrale que l'on a à considérer ; c'était là une question extrêmement difficile. Pour calculer cette variation seconde, M. Serret fait usage des formules de la Dynamique mises sous la forme générale que Lagrange leur a donnée, et arrive ainsi à une expression symétrique, mais qui, malgré le choix très-heureux des notations, présente encore une très-grande complication. Arrivé à ce point, M. Serret a l'idée ingénieuse d'introduire  $n(n - 1)$  fonctions arbitraires ; si l'on assujettit ces fonctions à vérifier autant de relations convenablement choisies, l'expression d'abord fort compliquée de la variation seconde se réduit à une forme très-simple, qui permet d'en reconnaître immédiatement le signe. Ainsi, en restant dans la question générale, la proposition énoncée se trouve très-habilement démontrée. Cette analyse fort remarquable de M. Serret est la première



application importante qui ait été faite du *calcul des variations* à la distinction du maximum et du minimum.

Il reste à examiner, dans cette question délicate, des détails sur lesquels M. Serret se propose de revenir plus tard.

BOILLOT (A.). — *Plan d'études appliqué à la connaissance des astres*. Troisième partie : *Constitution physique du Soleil*.

Voir les *Comptes rendus*, des 1<sup>er</sup> et 15 mai 1871.

TISSERAND. — *Sur les surfaces orthogonales*.

M. Tisserand se propose de trouver les systèmes triplement orthogonaux de la forme

$$\begin{aligned}\frac{X}{\rho - a} + \frac{Y}{\rho - b} + \frac{Z}{\rho - c} &= U, \\ \frac{X}{\mu - a} + \frac{Y}{\mu - b} + \frac{Z}{\mu - c} &= U, \\ \frac{X}{\nu - a} + \frac{Y}{\nu - b} + \frac{Z}{\nu - c} &= U,\end{aligned}$$

où U, X, Y, Z sont quatre fonctions à déterminer; U est une fonction de  $x, y, z$ ; X ne renferme que  $x$ , Y que  $y$ , Z que  $z$ ;  $a, b, c$  désignent trois constantes réelles.

Par l'intégration directe des équations qui expriment l'orthogonalité, il arrive à un système orthogonal triple et un de surfaces du 4<sup>e</sup> ordre, contenant les constantes  $a, b, c, A, B, C$ , ces dernières étant assujetties à être de même signe. C'est celui que M. Darboux avait trouvé par d'autres considérations.

L. P.