BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

OSSIAN BONNET

Démonstration de la continuité des racines d'une équation algébrique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 215-221

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__215_0>

MÉLANGES.

DÉMONSTRATION DE LA CONTINUITÉ DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE;

PAR M. OSSIAN BONNET.

Le théorème sur la continuité des racines d'une équation algébrique a été démontré pour la première fois par Cauchy, dans les nouveaux *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, p. 109; mais la démonstration de l'illustre géomètre, fondée sur la considération des contours imaginaires, n'est pas de nature à trouver place dans les éléments. Depuis, et quoiqu'il s'agisse d'une propriété tout à fait fondamentale sur laquelle reposent plusieurs théories importantes, notamment celle des asymptotes aux courbes algébriques de degré quelconque, aucun auteur, que je sache, n'a essayé de parvenir plus simplement au but. Je pense donc faire une chose utile en publiant ici une démonstration qui ne suppose que les notions élémentaires relatives à la composition des équations.

Je commencerai par bien préciser le sens que l'on doit attacher à la continuité des fonctions.

DÉFINITION I. — *Étant donnée une fonction réelle ou imaginaire, mais bien déterminée,* $\varphi(u)$ *d'une variable réelle ou imaginaire* u, *on dit :* 1° *que cette fonction tend vers une limite finie et déterminée* A, *à mesure que* u *tend vers une valeur particulière* u' (1), *lorsqu'après avoir fixé arbitrairement un nombre réel et positif* ε *aussi petit que l'on veut, il est possible de trouver un autre nombre réel et positif* h, *tel que, pour toute valeur de* u, *dont la différence avec* u' *a un module différent de zéro, mais inférieur à* h, *la valeur correspondante de* $\varphi(u)$ *ait avec* A *une différence dont le module soit compris entre zéro et* ε; 2° *que* $\varphi(u)$ *tend vers l'infini à mesure que* u *tend vers* u', *lorsqu'après avoir fixé un nombre réel et positif* λ *aussi grand qu'on le veut, il est possible de trouver un autre nombre réel et positif* h, *tel que, pour toute valeur de* u *dont la différence avec* u' *a un module différent de zéro, mais infé-*

(1) Nous supposons u' fini; si l'on avait $u' = \infty$ on poserait $u = \frac{1}{v}$, et alors, regardant la fonction commme dependant de v, on ferait tendre v vers zero.

rieur à h, la valeur correspondante de $\varphi(u)$ ait un module toujours supérieur à λ.

Définition II. — *$\varphi(u)$ et u étant la même fonction et la même variable que dans la définition précédente, on dit que $\varphi(u)$ est continue par rapport à u pour $u = u'$, ou dans le voisinage de $u = u'$, lorsque $\varphi(u)$ a pour $u = u'$ une valeur finie et déterminée, et que cette valeur est la limite vers laquelle tend $\varphi(u)$ lorsque u tend vers u'.*

Cela posé, voici comment on peut énoncer le théorème sur la continuité des racines d'une équation algébrique.

Théorème. — *Soit une équation algébrique de degré m*

$$(1) \qquad A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} z + A_m = 0,$$

dans laquelle les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m$, réels ou imaginaires, sont des fonctions d'une variable réelle ou imaginaire u, continues par rapport à u pour $u = u'$. Faisons dans cette équation $u = u'$, ce qui donne une nouvelle équation à coefficients numériques bien déterminés et finis

$$(2) \qquad A'_0 z^m + A'_1 z^{m-1} + A'_2 z^{m-2} + \ldots + A'_{m-1} z + A'_m = 0.$$

Deux cas pourront se présenter : ou bien A'_0 étant différent de zéro, cette seconde équation sera de degré m comme l'équation (1) ; ou bien, quelques-uns des coefficients $A'_0, A'_1, A'_2, \ldots$ s'annulant, le degré de l'équation (2) s'abaissera et deviendra $m - n$, par exemple. Dans le premier cas, les m racines, fonctions de u de l'équation (1), tendront, à mesure que u tendra vers u', vers des limites finies et déterminées, et ces limites seront respectivement égales aux m racines de l'équation (2); dans le second cas, n racines de l'équation (1) tendront vers l'infini, et les $m - n$ autres tendront respectivement vers les $m - n$ racines de l'équation (2).

La démonstration de ce théorème repose sur une série de lemmes que nous allons successivement examiner.

Lemme I. — *Lorsque les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ du premier membre d'une équation algébrique*

$$(1) \qquad A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m = 0,$$

fonctions de u continues ou NON CONTINUES *par rapport à u pour* $u = u'$, *tendent cependant chacun vers une limite finie et déterminée, à mesure que u tend vers u', si la limite vers laquelle tend le premier coefficient* A_0 *est nulle une des racines au moins de l'équation tend vers l'infini à mesure que u tend vers u'.*

Supposons d'abord que la limite vers laquelle tend A_m ne soit pas nulle. Après avoir fixé un nombre réel et positif λ aussi grand qu'on voudra, et un autre nombre positif k plus petit que le module de la limite de A_m, il sera possible de trouver un nombre positif h tel que, pour toute valeur de u dont la différence avec u' aura un module différent de zéro, mais inférieur à h, le module a_0 de A_0 soit $< \frac{k}{\lambda^m}$, et le module a_m de A_m soit $> k$. Or, en appelant $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ les modules des racines de l'équation (1), on a, quel que soit u,

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_m = \frac{a_m}{a_0};$$

par conséquent, quand u sera tel que le module de sa différence avec u' soit $< h$, on aura

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_m > \lambda^m,$$

et, par suite, l'un au moins des modules $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$, sera plus grand que λ, ce qui prouve le lemme énoncé.

Supposons en second lieu que la limite de A_m soit nulle. Appelons z_0 un nombre réel ou imaginaire tel que l'expression

$$A_0 z_0^m + A_1 z_0^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z_0 + A_m,$$

qui tend évidemment vers une limite déterminée et finie, ne tende pas vers zéro, à mesure que u tend vers u'; substituons à l'équation (1) celle que l'on obtient en remplaçant dans son premier membre z par $z + z_0$, et que nous appellerons

$$(2) \qquad B_0 z^m + B_1 z^{m-1} + \ldots + B_{m-1} z + B_m = 0;$$

les racines de cette nouvelle équation seront celles de l'équation (1), diminuées chacune de z_0; donc leurs modules seront respectivement inférieurs aux modules des racines de l'équation (1), augmentés chacun du module de z_0; par conséquent, pour démontrer qu'une racine au moins de l'équation (1) tend vers l'infini à mesure que u

tend vers u', il suffira de démontrer que la même chose a lieu pour une racine de l'équation (2). Or les coefficients B_0, $B_1, \ldots$, B_{m-1}, B_m, qui sont des fonctions linéaires de A_0, $A_1, \ldots$, A_{m-1}, A_m, tendent chacun vers une limite finie et déterminée à mesure que u tend vers u'; B_0, qui est égal à A_0, a pour limite zéro; enfin B_m, qui est égal à

$$A_0 z_0 + A_1 z_0^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z_0 + A_m,$$

a une limite différente de zéro; donc....

Lemme II. — *Lorsque les coefficients* $A_0, A_1, \ldots, A_m$ *du premier membre d'une équation algébrique de degré m*

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$

fonctions de u continues ou non continues par rapport à u pour $u = u'$, *tendent cependant chacun vers une limite finie et déterminée, à mesure que u tend vers u', si la limite vers laquelle tend le dernier coefficient* A_m *est nulle, une des racines au moins de l'équation tend vers zéro, à mesure que u tend vers u'.*

En effet, dans l'équation aux inverses des racines de l'équation proposée

$$A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0,$$

une des racines au moins tend vers l'infini à mesure que u tend vers u'.

Lemme III. — *Lorsque les coefficients* A_0, $A_1, \ldots$, A_m *du premier membre d'une équation algébrique de degré m*

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m = 0,$$

fonctions de u, continues ou non continues par rapport à u pour $u = u'$, *tendent cependant chacun vers une limite finie et déterminée, à mesure que u tend vers u', si les limites respectives vers lesquelles tendent les n derniers coefficients* A_{m-n+1}, $A_{m-n+2}, \ldots$, A_m *sont nulles, n racines de l'équation tendent vers zéro, à mesure que u tend vers u'.*

Il résulte d'abord de ce que le dernier terme A_m tend vers zéro, qu'un certain nombre de racines de l'équation tendent aussi vers zéro. Cela posé, il suffit évidemment, pour établir la propriété énoncée, de démontrer la réciproque de cette propriété, c'est-à-dire de faire voir que si n racines de l'équation tendent vers zéro à mesure que u tend vers u', les n derniers coefficients de l'équation ont aussi zéro pour limite. Soient donc $z_1, z_2, \ldots, z_n$, n racines de l'équation proposée tendant vers zéro à mesure que u tend vers u', les $m-n$ autres n'étant assujetties qu'à la condition de ne pas tendre vers zéro, et pouvant dès lors, ou ne tendre vers aucune limite, ou bien avoir une limite différente de zéro. Posons

$$(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)=z^n+B_1z^{n-1}+B_2z^{n-2}+\ldots+B_{n-1}z+B_n,$$

et

$$\begin{aligned}A_0z^m+A_1z^{m-1}+\ldots+A_{m-1}z+A_m\\ =(z^n+B_1z^{n-1}+\ldots+B_n)(A_0z^{m-n}+C_1z^{m-n-1}+\ldots+C_{m-n}).\end{aligned}$$

Les coefficients $B_1, B_2, \ldots, B_n$, qui sont des fonctions entières et homogènes de $z_1, z_2, \ldots, z_n$, tendront tous vers zéro, et les coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_{m-n}$, qui sont des fonctions entières de $A_0, A_1, \ldots, A_m$, $B_1, B_2, \ldots, B_n$, tendront chacun vers une limite finie et déterminée, à mesure que u tendra vers u'. De plus, la limite de C_{m-n} ne sera pas nulle, sans quoi l'équation proposée aurait plus de n racines tendant vers zéro. Mais en égalant les coefficients des $(n+1)$ derniers termes des deux membres de la dernière égalité, on a

$$\begin{aligned}
A_m &= B_n C_{m-n},\\
A_{m-1} &= B_{n-1}C_{m-n}+B_nC_{m-n-1},\\
A_{m-2} &= B_{n-2}C_{m-n}+B_{n-1}C_{m-n-1}+B_nC_{m-n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
A_{m-n+1} &= B_1C_{m-n}+B_2C_{m-n-1}+B_3C_{m-n-2}+\ldots,\\
A_{m-n} &= C_{m-n}+B_1C_{m-n-1}+B_2C_{m-n-2}+\ldots.
\end{aligned}$$

De là résulte que $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_{m-n+1}$ tendent vers zéro, mais que A_{m-n} ne tend pas vers zéro, lorsque u tend vers u'. C. Q. F. D.

Lemme IV. — *Lorsque les coefficients* $A_0, A_1, \ldots, A_m$ *du premier membre d'une équation algébrique de degré* m

$$A_0z^m+A_1z^{m-1}+\ldots+A_{m-1}z+A_m=0,$$

fonctions de u, *continues ou non continues par rapport à* u *pour* $u=u'$, *tendent cependant chacun vers une limite finie et déterminée, à mesure que* u *tend vers* u', *si les limites respectives vers lesquelles tendent les* n

premiers coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ *sont nulles, n racines de l'équation tendent vers l'infini à mesure que u tend vers u'.*

En effet, dans l'équation aux inverses de la proposée

$$A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0,$$

n racines tendent vers zéro, à mesure que u tend vers u'.

Les lemmes qui précèdent conduisent immédiatement au théorème sur la continuité des racines, énoncé ci-dessus.

Reprenons l'équation

$$(1) \qquad A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m = 0,$$

dans laquelle nous supposerons maintenant les coefficients continus par rapport à u pour $u = u'$, et l'équation

$$(2) \qquad A'_0 z^m + A'_1 z^{m-1} + \ldots + A'_{m-1} z + A'_m = 0,$$

obtenue en faisant, dans la première, $u = u'$. Si l'on a d'abord

$$A'_0 = A'_1 = \ldots = A'_{n-1} = 0 \quad \text{et} \quad A'_n \gtrless 0;$$

à cause de la continuité, les n premiers coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ de l'équation (1) tendront vers zéro à mesure que u tendra vers u'; donc n racines de cette équation tendront vers l'infini à mesure que u tendra vers u' (lemme IV). On verrait de même, par le lemme III, que si $A'_m = A'_{m-1} = \ldots = A'_{m-n+1} = 0$ avec $A'_{m-n} \gtrless 0$, c'est-à-dire si l'équation (2) a n racines nulles, l'équation (1) a n racines qui tendent vers zéro, à mesure que u tend vers u'. Mais il faut encore faire voir que si l'équation (2) a n racines égales à un nombre quelconque réel ou imaginaire, l'équation (1) a n racines qui tendent vers le nombre, à mesure que u tend vers u'. En effet, remplaçons, dans les équations (1) et (2), z par $z + z_0$, ce qui donnera

$$(3) \qquad B_0 z^m + B_1 z^{m-1} + \ldots + B_{m-1} z + B_m = 0$$

à la place de (1), et

$$(4) \qquad B'_0 z^m + B'_1 z^{m-1} + \ldots + B'_{m-1} z + B'_m = 0$$

à la place de (2). L'équation (4), ayant pour racines celles de (2) diminuées chacune de z_0, aura n racines nulles; mais cette équation est ce que devient (3) quand on y remplace u par u'. D'ailleurs, les coefficients B_0, $B_1, \ldots$, B_m du premier membre de l'équation (2), fonctions linéaires de A_0, $A_1, \ldots$, A_m sont continus par rapport à u pour $u = u'$; donc l'équation (3) a n racines qui tendent vers zéro, à mesure que u tend vers u' : donc l'équation (1), qui a pour racines celles de (3) augmentées chacune de z_0, a n racines qui tendent vers z_0. C. Q. F. D.