BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Sur une méthode nouvelle pour l'étude des courbes tracées sur les surfaces algébriques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 184-192

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__184_1>

MÉLANGES.

SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE POUR L'ÉTUDE DES COURBES TRACÉES SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES (1).

Le Mémoire de M. Clebsch dont nous voulons parler a pour titre : *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung.* « Sur la représentation des surfaces algébriques, et en particulier des surfaces du quatrième et du cinquième ordre. » (*Mathematische Annalen,* t. I, p. 253.) Ce travail considérable se divise en plusieurs paragraphes.

Le § Ier est intitulé : *Sur le degré de la courbe double d'une surface que l'on peut représenter sur le plan.* Imaginons une surface d'ordre N, et supposons que les coordonnées homogènes d'un de ses points soient données par les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho x_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ \rho x_2 = f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ \rho x_3 = f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ \rho x_4 = f_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \end{cases}$$

où ρ est un facteur indéterminé, et les quantités f des fonctions homogènes d'ordre n, des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3, qui peuvent elles-mêmes être considérées comme les coordonnées d'un point dans le plan.

(1) Voir *Bulletin*, t. II. p. 23.

Alors, si l'on coupe la surface par le plan dont l'équation est

$$(2) \qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0,$$

on obtient une section plane, qui correspond, dans le plan, à la courbe dont l'équation est

$$(3) \qquad \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 = 0.$$

On voit donc que les sections planes de la surface sont représentées par les courbes d'ordre n du plan faisant partie du système à trois paramètres défini par l'équation (3).

Ces courbes (3) auront, en général, des points communs. Désignons par a_1 le nombre de points simples communs, par a_2 le nombre de points doubles, et, en général par a_i le nombre des points multiples et fixes d'ordre i, communs à toutes les courbes. On établit sans peine l'équation suivante entre le degré N de la surface et les nombres précédents,

$$(4) \qquad N = n^2 - a_1 - 4a_2 - 9a_3 - \ldots.$$

On obtient encore une autre équation par la remarque suivante, déjà faite et utilisée en plusieurs occasions par M. Clebsch. Les sections planes de la surface et leurs représentations se correspondent point par point; elles sont donc du même genre. D'après cela, si la surface a une courbe double d'ordre d et une courbe de rebroussement de degré r, toute section plane aura précisément d points doubles, r points de rebroussement. Son genre [1] sera donc

$$(5) \qquad p_1 = \frac{(N-1)(N-2)}{2} - d - r.$$

En l'égalant à celui de la représentation, on trouve

$$(6) \qquad p_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - a_3 - 3a_3 - 6a_6 - \ldots.$$

Enfin, on obtiendra une inégalité si l'on exprime, comme cela doit être, que les quatre fonctions f_i sont distinctes, qu'elles ne sont pas liées par une équation linéaire; car il faut que les points par lesquels elles sont assujetties à passer et qui ne les déterminent pas entièrement soient en nombre tel que quatre coefficients arbitraires sub-

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 139.

sistent dans l'équation de la courbe assujettie à les contenir, chacun avec le degré de multiplicité voulu. Il est clair, en effet, que, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait toujours établir une relation linéaire entre les quatre fonctions f_i et, par conséquent, entre les quatre coordonnées x_i, ce qui est absurde. On obtient ainsi l'inégalité

$$(7)\qquad 4 \overline{\underline{<}} \frac{(n+1)(n+2)}{2} - a_1 - 3a_2 - 6a_3 - \ldots,$$

que l'on peut écrire, en tenant compte des équations (5) et (6),

$$(8)\qquad p_1 \overline{\underline{<}} N - 2,$$

ou

$$(9)\qquad d + r \overline{\underline{>}} \frac{(N-2)(N-3)}{2}.$$

Cette dernière inégalité, dans laquelle le premier membre est le degré de l'ensemble des courbes doubles ou de rebroussement, indique une limite inférieure, que ne doit pas atteindre le degré de cette courbe singulière, toutes les fois que la surface peut être représentée sur le plan.

Il y a cependant un cas d'exception qu'il faut signaler. On a supposé que les points par lesquels passent les courbes f_i sont indépendants; mais on sait que, dans certains cas, une courbe que l'on assujettit à passer par certains points va passer par d'autres points dépendants des premiers; par exemple, toutes les courbes du quatrième ordre, coupant une courbe de troisième ordre en huit points, vont passer nécessairement par un neuvième point situé sur la courbe. Ces neuf points et les systèmes analogues forment ce que M. Clebsch appelle un système de points d'intersection. Il est clair que n points formant un système ne tiennent pas lieu de n conditions; lorsque la courbe passe par un nombre déterminé d'entre eux elle passe par les autres. Il résulte de là une modification de l'équation (4), qui devient

$$4 \overline{\underline{<}} \frac{(n+1)(n+2)}{2} - a_1 - 3a_2 - 6a_3 - \ldots + \alpha,$$

d'où

$$p_1 \overline{\underline{<}} N - 2 + \alpha, \quad d + r \overline{\underline{>}} \frac{(N-2)(N-3)}{2} - \alpha.$$

L'équation (9) montre qu'une surface du quatrième ordre et une du cinquième ordre ne seront applicables que si elles ont : la première une droite double, la seconde une courbe double du troisième ordre.

Mais la remarque relative au système complet de points d'intersection montre que déjà une surface du cinquième ordre sera applicable, quand elle aura une courbe double se composant de deux droites qui ne se coupent pas. C'est, du reste, ce que la Géométrie rend évident.

Le § II est intitulé : *Représentation géométrique des surfaces à étudier sur le plan.* Laissant de côté les exemples dont nous avons dit quelques mots, nous examinerons spécialement les surfaces suivantes :

1° La surface du quatrième ordre ayant une droite double. — On commencera par démontrer que cette surface contient un certain nombre de coniques, rencontrant la ligne double, et non situées dans un même plan avec elle. Alors les droites, coupant la conique et la droite double, rencontreront la surface en *un* point non situé sur ces deux lignes; les coordonnées de ce point se détermineront individuellement.

2° La surface du cinquième ordre ayant deux droites doubles. — Toute droite rencontrant les deux droites doubles rencontrera la surface en *un* seul point non situé sur les deux droites.

3° La surface du cinquième ordre ayant pour courbe double une cubique gauche. — On sait que, par un point de l'espace, on peut mener une seule droite rencontrant deux fois la cubique gauche. Cette sécante coupera la surface en *un* point non situé sur la cubique gauche, et les coordonnées de ce point se détermineront, par exemple, en fonction des deux paramètres des points où la sécante rencontre la cubique gauche. Cette courbe double peut, d'ailleurs, se décomposer en une droite et une conique qui se coupent, etc.; mais, M. Clebsch fait voir que l'on ne peut substituer à la cubique gauche une autre courbe de troisième ordre, qui n'en serait pas un cas particulier, par exemple, la courbe formée de trois droites qui ne se coupent pas.

Le § III a pour titre : *Surfaces du quatrième ordre avec une droite double. Droites et coniques de cette surface.*

L'équation de cette surface est

$$A^2 w - 2BA v + B^2 u = 0, \tag{10}$$

où A, B sont des fonctions linéaires et u, v, w des fonctions du second degré des coordonnées; cette équation, déjà donnée par M. Kummer [1], résulte de l'élimination de λ entre les deux équa-

---

[1] *Monatsber, der Berl. Acad.*, séance du 16 juillet 1863, et *Journal de Borchardt*, t. 64, p. 66.

tions

$$(11)\qquad A + \lambda B = 0, \quad u + 2\lambda v + \lambda^2 w = 0.$$

Ces deux équations, quand on y fait varier λ, représentent une série de coniques, dont les plans passent par la droite

$$A = 0, \quad B = 0,$$

qui est la droite double; mais la surface contient encore d'autres coniques en nombre limité. M. Clebsch démontre, en effet, en employant un remarquable théorème de M. Lüroth, la proposition suivante :

Il y a 64 plans tangents triples qui coupent chacun la surface en deux coniques. Chaque conique coupe la droite double en un point, etc..

Puisque l'on peut prendre, sur la surface, de 2.64 manières une conique rencontrant la droite double, il résulte, conformément à ce que nous avons dit plus haut, autant de manières d'effectuer l'application de la surface sur un plan. L'équation du soixante-quatrième degré, dont dépendent ces 64 coniques, se résout au moyen d'une équation du huitième et de plusieurs équations du second degré.

Les §§ IV et V sont consacrés à l'étude de la surface précédente, et des différents moyens de la représenter sur le plan.

Le § VI est intitulé : *Généralités relatives aux surfaces applicables sur le plan. Étude de leur intersection complète avec une autre surface.* M. Clebsch commence par développer les principes généraux qui sont indispensables pour l'étude qui va suivre. Soient les formules de la représentation

$$(12)\qquad \rho x_1 = f_1, \quad \rho x_2 = f_2, \quad \rho x_3 = f_3, \quad \rho x_4 = f_4,$$

et supposons, comme nous l'avons déjà fait, que les courbes

$$(13)\qquad \Sigma \alpha_i f_i = 0,$$

qui représentent les sections planes, soient du degré n, aient a_1 points simples communs, a_2 points doubles, etc. Ces points s'appellent, nous l'avons déjà dit, les points fondamentaux de la représentation. On a la proposition suivante :

Un point multiple d'ordre r commun à toutes les courbes (13) est la représentation d'une infinité de points de la surface. Ces points, en nombre infini, forment une courbe d'ordre r, jouissant de cette propriété spéciale que les coordonnées d'un de ses points s'expriment en fonction rationnelle d'un paramètre variable.

Cela posé, proposons-nous le problème suivant : Étant donnée une courbe d'ordre m passant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ fois par les points simples fondamentaux, $\beta_1, \beta_2, \ldots$ fois par les points doubles fondamentaux, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ fois par les différents points triples, etc., supposons que cette courbe plane ait, en outre, d points doubles et r points de rebroussement. Elle est la représentation d'une courbe tracée sur la surface. Soit M l'ordre de cette dernière, on a les équations

$$(14) \qquad M = mn - \Sigma\alpha - 2\Sigma\beta - 3\Sigma\gamma - \ldots,$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} p = {} & \frac{(m-1)(m-2)}{2} - d - r \\ & - \sum \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} - \sum \frac{\beta(\beta-1)}{2} - \sum \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} - \ldots, \end{aligned} \right.$$

auxquelles il faut joindre l'inégalité

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} 1 \leqq {} & \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \sum \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \\ & - \sum \frac{\beta(\beta+1)}{2} - \sum \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} - \ldots - 3d - 4r. \end{aligned} \right.$$

Voici, maintenant, les formules qui donnent les singularités de la courbe tracée sur la surface. On suppose, pour plus de simplicité, que la surface n'a pas de courbe de rebroussement.

Soient B le nombre de points stationnaires de la courbe;

R son rang;

K sa classe;

A le nombre des plans osculateurs coupant en quatre points consécutifs.

On a

$$\begin{aligned} B &= r, \\ R &= 2p - 2 + 2M - B, \\ K &= 2p - 2 + 2R - M, \\ A &= 2p - 2 + 2K - R; \end{aligned}$$

ou, si l'on substitue les valeurs de p et de M

$$(17) \qquad B = r,$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} R = {} & m(m-3+2n) - 2d - 3r \\ & - \Sigma\alpha(\alpha+1) - \Sigma\beta(\beta+3) - \Sigma\gamma(\gamma+5) - \ldots, \\ K = {} & 3m(m-3+n) - 6d - 8r \\ & - 3\Sigma\alpha^2 - 3\Sigma\beta(\beta+1) - 3\Sigma\gamma(\gamma+2) - \ldots, \\ A = {} & 2m(3m+2n-9) - 12d - 15r \\ & - 2\Sigma\alpha(3\alpha-1) - 2\Sigma\beta(3\beta+1) - 2\Sigma\gamma(3\gamma+3) - \ldots. \end{aligned} \right.$$

Ces formules prennent une forme extrêmement remarquable, si l'on suppose que la courbe d'ordre M tracée sur la surface soit l'intersection complète et indécomposable de la surface avec une autre surface d'ordre L. On a alors

$$M = LN; \tag{19}$$

$$p = Lp_1 + \frac{(LN-2)(L-1)}{2} - d - r, \tag{20}$$

où p_1 a la signification donnée plus haut (formule 6);

$$\left\{\begin{aligned} R &= L^2N + L(N + 2p_1 - 2) - 2d - 3r,\\ K &= 3L^2N + 6L(p_1 - 1) - 6d - 8r,\\ A &= 6L^2N + 12L(p_1 - 1) - 2NL - 12d - 15r, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

ce qui conduit à un résultat remarquable. Les singularités de la courbe d'intersection dépendent uniquement de l'ordre des deux surfaces, du genre de la section plane de la surface donnée et des nombres d et r. Le premier d indique en combien de points les deux surfaces sont tangentes, la courbe d'intersection ayant un point double au point de contact; le nombre r indique en combien de points les surfaces ont un contact d'ordre supérieur, le point de contact étant un point de rebroussement pour la courbe d'intersection des deux surfaces.

Cette courbe complète d'intersection de deux surfaces peut se décomposer. On peut signaler, en particulier, le théorème suivant :

Si la représentation sur le plan de la courbe d'intersection d'une surface d'ordre L *avec la surface proposée passe* $rL + 1$ *fois par un point fondamental multiple d'ordre* r*, la courbe d'intersection des deux surfaces se décompose en deux parties, dont l'une est la courbe de la surface correspondant au point fondamental considéré, l'autre a pour représentation la courbe plane.*

Ce théorème est, du reste, à peu près évident, d'après ce que nous avons déjà dit. Considérons, par exemple, un point simple fondamental. A ce point simple correspond une droite entière de la surface. Si une surface d'ordre L coupe la surface proposée, suivant une courbe qui ait pour représentation une courbe plane douée d'un point multiple d'ordre $L+1$, au point fondamental, la surface d'ordre L devra couper la droite en L + 1 points et, par conséquent, la contiendra tout entière.

Le § VII a pour titre : *Généralités. Représentation de la courbe double.*

Reprenons les formules qui donnent x_1, x_2, x_3, x_4,

$$\rho x_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \ldots,$$

que l'on peut écrire, en adoptant avec M. Clebsch une abréviation commode et déjà souvent employée,

$$\rho x_i = f_i(\xi).$$

Il est clair que si, pour deux systèmes de valeurs des ξ, ξ_1, ξ_2, ξ_3; η_1, η_2, η_3, on a

$$f_1(\xi) = f_1(\eta), \quad f_2(\xi) = f_2(\eta), \quad f_3(\xi) = f_3(\eta), \quad f_4(\xi) = f_4(\eta),$$

à ces deux systèmes de valeurs correspondra le même point de la surface; et d'ailleurs, pour des valeurs très-voisines des ξ, on n'obtiendra pas, en général, le même point de la surface que pour un système de valeurs voisines des η. Le point unique correspondant aux deux systèmes ξ, η appartiendra donc à deux nappes de la surface; ce sera un point de la courbe double. M. Clebsch se propose de déterminer le degré et les équations de cette courbe.

En supposant que la surface n'a pas de courbe de rebroussement, et qu'il n'y a pas de point de la surface correspondant à une infinité de points du plan, on est conduit au résultat suivant :

La représentation de la courbe double est une courbe plane d'ordre $(N-4)n+3$, cette courbe plane passe $(N-4)r+1$ fois par un point fondamental d'ordre r. Le genre p' de cette courbe est donné par la formule

$$p' = \frac{(N^2 - 4N + 2)(N-3)}{2} - (N-4)p_1.$$

Comme chaque point de la courbe double se trouve sur deux nappes de la surface, et a pour représentation *deux* points du plan, la représentation d'une courbe double est donc dans une relation toute particulière avec la courbe double de l'espace. Mais nous n'insistons pas sur cette remarque de l'auteur.

Les §§ VIII, IX, X sont employés à l'étude développée de la surface du quatrième ordre ayant une droite double. Les sections planes sont représentées par des courbes du quatrième ordre, ayant 8 points simples, et 1 point double communs. La surface contient 16 droites, une série de coniques et 128 coniques en dehors de cette série; la droite double a pour représentation la courbe du troisième ordre passant par les 9 points fondamentaux, etc. Pour toutes ces questions nous pouvons renvoyer au Mémoire original.

Les §§ XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI sont consacrés à l'étude de la surface du cinquième ordre ayant une ligne double du troisième ordre. Les sections planes sont représentées par des courbes du quatrième ordre. Ces courbes n'ont pas de points doubles et elles passent par 11 points fondamentaux. La surface contient 11 droites, 55 coniques : la courbe double contient 10 points, dans lesquels les plans tangents aux deux nappes de la surface coïncident. Elle est touchée suivant des courbes du dixième ordre par une série de surfaces du quatrième ordre; en un mot, l'étude est complète.

Les derniers §§ XVII, XVIII, XIX sont consacrés à l'étude de la surface du cinquième ordre ayant deux droites doubles. Ici la complication est plus grande. Les sections planes ont pour représentation des courbes du cinquième ordre ayant en commun 12 points simples et 2 points doubles a, b. Ces points fondamentaux, s'ils étaient arbitraires, équivaudraient à 18 conditions, et comme une courbe du cinquième ordre est déterminée par 20 points, il se présenterait la difficulté signalée dans le § I^er^. Mais les points fondamentaux forment l'intersection complète de deux courbes du quatrième ordre, ayant un point double, l'une en a, l'autre en b. La surface contient 13 droites, 26 coniques, etc., etc.

En terminant son Mémoire, M. Clebsch fait remarquer que les considérations précédentes s'appliquent seulement aux surfaces les plus générales satisfaisant aux définitions posées. Si ces surfaces acquièrent des points multiples, des courbes de rebroussement, etc., un nouvel examen devient nécessaire; il est clair que l'on obtiendra une série de cas, si variée, qu'il est même difficile de se rendre compte de leur multiplicité. Dans un Mémoire, inséré aux *Mathematische Annalen*, t. I, p. 592, et t. II, p. 41, M. Korndörfer s'est précisément occupé de questions de ce genre; il a étudié par la méthode précédente quelques variétés de la surface du quatrième ordre à conique double.

G. D. (*A suivre.*)