BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

# Revue bibliographique

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, tome 2 (1871), p. 161-172

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__161_0>

## REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

JORDAN (C.). — TRAITÉ DES SUBSTITUTIONS ET DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES. — Paris, Gauthier-Villars, 1870; in-4°, XVI-667 p. Prix : 30 francs.

L'Ouvrage que nous annonçons exercera, nous en sommes sûr, une influence considérable sur les progrès de la théorie la plus importante de l'Algèbre; aussi, en attendant que nous puissions parler d'une manière plus détaillée des belles découvertes de l'auteur, nous croyons devoir faire à nos lecteurs une analyse des différentes questions traitées et résolues par M. Jordan. La théorie des substitutions a toujours été cultivée en France, et nous sommes heureux de reconnaître que c'est à un géomètre de notre pays qu'elle doit un nouveau progrès et d'importantes additions.

PREMIÈRE PARTIE. — L'auteur établit rapidement les principes connus de la théorie des congruences (Livre Ier), et les premiers fondements de la théorie des substitutions (Livre II, Chapitre Ier, § I). Il expose ensuite (§§ II, III et IV) les principales propositions auxquelles donne lieu la triple distinction des groupes en transitifs et intransitifs, primitifs et non primitifs, simples ou composés, et donne en particulier le théorème suivant, qui est fondamental dans son analyse :

*Soit* G *un groupe composé; on pourra déterminer (souvent de plusieurs manières) une suite de groupes* G, H, I,..., *telle, que chacun de ces groupes soit contenu dans le précédent, et permutable à ses substitutions, mais ne soit contenu dans aucun autre groupe jouissant de cette double propriété.*

*En divisant l'ordre de chacun de ces groupes par celui du groupe suivant, on obtiendra une suite d'entiers* $\lambda$, $\mu$, $\nu$,.... *Ces entiers* (les facteurs de composition de G) *resteront les mêmes à l'ordre près, de quelque manière que l'on détermine la suite* G, H, I,... [1].

---

[1] L'*ordre* d'un groupe est le nombre de ses substitutions.

Une substitution S est *permutable* au groupe formé des substitutions $g_1, g_2, \ldots, g_n$, si l'on a pour chaque valeur de $\alpha$ une relation de la forme $g_\alpha S = S g_\beta$.

Un groupe est *composé*, s'il contient quelque autre groupe auquel ses substitutions soient permutables.

L'auteur examine ensuite le problème de la symétrie des fonctions rationnelles, et montre comment, un groupe étant donné, on peut déterminer tous les groupes qui lui sont *isomorphes,* c'est-à-dire qui lui correspondent substitution à substitution.

Il expose les principales propriétés du groupe alterné (§ VI), puis s'occupe (§ VII) de déterminer les nombres *minima* de valeurs distinctes que puisse prendre une fonction de $k$ lettres, lorsqu'on y permute ces lettres. Il donne à ce sujet un théorème général, qui renferme, comme cas particuliers, les théorèmes importants et bien connus de M. Bertrand et de M. Serret. Il assigne enfin une limite à la transitivité des groupes qui ne contiennent pas le groupe alterné.

Le Chapitre II du second Livre est consacré aux substitutions définies par une expression analytique, et spécialement aux substitutions linéaires. Après avoir exposé (§ I) les recherches de M. Hermite sur ce sujet, M. Jordan détermine l'ordre et les facteurs de composition du groupe linéaire (§§ II et III). Il montre ensuite (§ V) comment on peut, à l'aide d'un changement d'indices (opération analogue aux changements de coordonnées usités dans la Géométrie analytique), ramener une substitution linéaire quelconque à une forme canonique simple. Cette réduction lui permet de résoudre (§ VI) plusieurs problèmes importants, entres autre celui-ci :

*Trouver la forme et le nombre des substitutions linéaires échangeables à une substitution linéaire donnée.*

Les paragraphes suivants sont consacrés à l'étude de divers groupes remarquables contenus dans le groupe linéaire. L'auteur passe successivement en revue : 1° le groupe orthogonal, dont il détermine l'ordre; 2° le groupe *abélien* (1), dont il détermine l'ordre et les facteurs de composition; 3° deux nouveaux groupes contenus dans le précédent, qu'il a appelés *groupes hypoabéliens,* et dont il détermine également l'ordre et les facteurs de composition.

Dans le § X, l'auteur donne trois méthodes générales pour construire des groupes particuliers contenus dans le groupe linéaire; puis il étudie successivement (§ XI) les substitutions linéaires fractionnaires, et les groupes si remarquables signalés par MM. Steiner

(1) Ainsi appelé parce qu'il s'est présenté pour la première fois dans les recherches de M. Hermite sur les fonctions abeliennes.

et Clebsch, dont il montre la liaison avec les groupes abélien et hypoabélien.

Avec le Livre III il aborde la théorie des équations. Le § I du Chapitre Ier, consacré à la théorie générale des irrationnelles, contient les théorèmes de Galois, avec de nombreux corollaires, parmi lesquels nous signalerons les suivants :

1° *Si le groupe* G *d'une équation* $F(x) = 0$ *est simple, elle ne pourra être résolue qu'au moyen d'équations dont le groupe ait pour ordre un multiple de celui de* G.

*Au contraire, si* G *est composé, soient* $\lambda$, $\mu$, $\nu$,... *ses facteurs de composition : la résolution de* $F(x) = 0$ *se ramènera à celle d'équations auxiliaires dont les groupes seront simples et auront respectivement pour ordres* $\lambda$, $\mu$, $\nu$....

2° *Si les racines* $x_1, \ldots, x_m$ *et* $z_1, \ldots, z_n$ *de deux équations algébriques* $F(x) = 0$ *et* $f(z) = 0$ *sont liées par des relations algébriques telles que* $\varphi(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n) = 0$, *toutes ces relations se déduiront d'une seule, de la forme*

$$\psi(x_1, \ldots, x_m) = \chi(z_1, \ldots, z_n),$$

*où les racines des deux équations sont séparées* ($\psi$ et $\chi$ désignant, ainsi que $\varphi$, des fonctions rationnelles).

De ces propositions on déduit, entre autres conséquences, les suivantes :

3° *Pour que la résolution d'une équation* $F(x) = 0$ *soit facilitée par celle d'une équation à groupe simple* $f(z) = 0$, *il faut et il suffit que les racines de* $f(z)$ *soient des fonctions rationnelles de celles de* $F(x)$ ; proposition qui renferme, comme cas très-particulier, un théorème célèbre d'Abel sur la résolution algébrique des équations.

4° *L'équation générale du degré* $n$ *ne peut être résolue au moyen d'équations de degrés inférieurs* (*sauf le cas où* $n = 4$).

M. Jordan montre ensuite (§ II) que, lorsqu'une équation contient des paramètres indéterminés, il existe un groupe (*groupe de monodromie*) tel, que toute fonction rationnelle des racines et des paramètres, monodrome par rapport à ces paramètres, soit invariable par les substitutions de ce groupe, et réciproquement. Ce groupe H est contenu dans le groupe de l'équation et permutable à ses substitutions.

Les Chapitres II, III et IV renferment de nombreuses applications de cette théorie aux principales équations rencontrées jusqu'à ce jour dans les diverses branches de l'analyse. L'auteur y étudie successivement : 1° les équations abéliennes, dont il généralise la théorie; 2° les équations de Galois; 3° celle de M. Hesse, dont il met le groupe sous forme linéaire, et dans laquelle il montre le premier terme d'une nombreuse famille d'équations étudiées par M. Clebsch; 4° celle des 16 droites des surfaces du quatrième degré à conique double, dans laquelle il trouve également un cas particulier d'une famille d'équations de degré $p^{p-1}$, résolubles à l'aide d'une équation de degré $q$ et de $q - 1$ équations abéliennes de degré $p$; 5° celle des 16 points singuliers de la surface de M. Kummer, qu'il réduit au *sixième* degré; 6° celle des 27 droites des surfaces du troisième ordre, qu'il montre n'être susceptible d'aucun abaissement, et dont il signale le lien avec l'équation aux 16 droites; 7° celle aux 28 doubles tangentes des courbes du quatrième ordre, qui n'est également susceptible d'aucun abaissement, et ses analogues.

Il détermine ensuite le groupe des équations de la division des fonctions circulaires et elliptiques; celui des équations modulaires; celui des équations de la division des fonctions hyperelliptiques.

Les principaux théorèmes qu'il établit à ce sujet sont les suivants :

1° *Les équations modulaires relatives à des transformations de degré $n$ premier et $> 11$ ne sont susceptibles d'aucun abaissement de degré.* (On sait, au contraire, que si $n \overline{\gtrless} 11$, l'équation s'abaissera).

2° *Les racines de l'équation qui donne la bissection des périodes, dans les fonctions elliptiques ou hyperelliptiques, sont des fonctions monodromes des modules.*

3° *L'équation de degré $n^{2k} - 1$, qui donne la division des périodes par un nombre premier impair $n$ dans les fonctions à $2k$ périodes, a pour groupe le groupe abélien.*

4° *Cette équation n'est pas résoluble par radicaux,* proposition que l'on admettait volontiers, mais sans la démontrer.

5° On sait que cette équation a une réduite de degré $\frac{n^{2k} - 1}{n - 1}$. Mais *pour les fonctions à quatre périodes, il existe deux réduites distinctes et de ce degré.*

Ce fait de deux réduites différentes d'une même équation ayant le même degré n'avait encore été signalé qu'une fois, pour l'équation générale du sixième degré.

6° *Dans le cas particulier de la trisection des fonctions à quatre périodes, on obtient une autre réduite, du vingt-septième degré, identique à l'équation qui donne les 27 droites des surfaces du troisième ordre,* résultat inattendu, qui manifeste une fois de plus l'intime liaison qui existe entre les problèmes de la Géométrie et la théorie des fonctions abéliennes.

7° *Cette dernière réduction est tout exceptionnelle et cesse d'avoir lieu dès que l'on passe au cas de la quintisection.*

L'auteur termine en exposant les méthodes de MM. Hermite et Kronecker pour résoudre l'équation du cinquième degré par les fonctions elliptiques, et montre que *les équations générales de la division des fonctions circulaires, elliptiques ou hyperelliptiques par un nombre impair ne peuvent être d'aucun secours pour la résolution des équations d'un degré supérieur au cinquième.* Au contraire, dans le cas de la bissection, on obtient ce théorème :

*La résolution de l'équation*

$$X = x^q + ax^{q-1} + \ldots = 0$$

*se ramène à celle de l'équation qui donne la bissection des périodes des fonctions hyperelliptiques formées avec* $\sqrt{X}$;

Proposition digne de remarque, car elle réduit toute la théorie des substitutions au cas particulier des substitutions abéliennes.

Plusieurs des résultats que nous venons d'énumérer ont attiré l'attention de divers géomètres, qui les ont démontrés par d'autres méthodes. Ainsi M. Clebsch et M. Cremona ont retrouvé l'abaissement de l'équation de la trisection des fonctions abéliennes, et sa liaison avec l'équation aux 27 droites ; M. Klein l'abaissement de l'équation de M. Kummer; M. Geiser le lien entre l'équation aux 27 droites et l'équation aux 16 droites; M. Brioschi a exprimé sous forme rationnelle les racines de l'équation de la bissection des périodes, etc.

Nous ferons pourtant remarquer qu'aucune des propositions purement négatives, telles que l'impossibilité d'abaisser l'équation aux 27 droites ou aux 28 doubles tangentes, ou les équations modulaires lorsque $n > 11$, ou encore l'impossibilité de résoudre l'équation générale du degré $n$ par le moyen d'équations de degré inférieur, ou des équations de la division des transcendantes par un nombre impair, n'a été retrouvée jusqu'à présent. Cela ne doit pas surprendre; car on ne voit guère comment on pourrait arriver à des résultats de cette nature sans recourir à la théorie des substitutions.

SECONDE PARTIE. — Le Livre IV et dernier est rempli en entier par la solution du problème principal de la théorie des équations, celui de leur résolution par radicaux. Abel ayant démontré qu'une semlbable résolution est impossible en général, ce problème doit être énoncé ainsi : *Trouver tous les types généraux d'équations solubles par radicaux.*

Galois a signalé, le premier, le caractère distinctif de ces équations ; néanmoins la question était encore loin d'être résolue, car le critérium trouvé par ce grand géomètre et qui peut s'énoncer ainsi : *Les équations solubles par radicaux sont celles dont le groupe n'a que des nombres premiers pour facteurs de composition,* se prête difficilement à la construction des groupes cherchés.

M. Jordan remplace ce critérium par le suivant, qui lui est équivalent, bien qu'il semble, au premier abord, caractériser une classe plus restreinte d'équations :

*Pour qu'un groupe* L *soit résoluble* (*c'est-à-dire appartienne à une équation soluble par radicaux*), *il faut et il suffit qu'on puisse déterminer une suite de groupes* 1, F, G, H,..., L *dont le premier ne contienne d'autre substitution que l'unité, et qui jouissent des propriétés suivantes :*

1° *Chacun de ces groupes, tel que* F, *est contenu dans le suivant* G, *et permutable aux substitutions de* L ;

2° *Deux substitutions quelconques de* G, *telles que* $g$, $g_1$, *satisfont à une relation de la forme* $gg_1 = g_1 g f$, *où* $f$ *est une substitution du groupe précédent* F.

On voit immédiatement la marche à suivre pour la construction des groupes cherchés. On formera successivement les groupes partiels F, G,.... *A mesure que l'on avancera dans cette opération, le champ des recherches se rétrécira,* les substitutions de L devant être permutables à chacun des groupes partiels déjà construits. *Cette simplification n'aurait pas lieu, si l'on voulait employer le critérium de Galois sous sa forme primitive.*

On devra, d'ailleurs, dans la recherche des groupes résolubles, se borner à déterminer ceux qui sont *les plus généraux ;* car les groupes plus particuliers contenus dans ceux-là correspondraient à des types particuliers d'équations résolubles, et non aux types les plus généraux auxquels on doit s'attacher.

En suivant la marche qui vient d'être indiquée, M. Jordan s'est trouvé conduit à considérer simultanément les trois problèmes suivants :

Problème A. *Construire tous les groupes résolubles les plus généraux.*

Problème B. *Construire les groupes résolubles les plus généraux parmi ceux qui sont contenus dans le groupe linéaire.*

Problème C. *Construire les groupes résolubles les plus généraux parmi ceux qui sont contenus dans le groupe abélien, ou dans l'un des deux groupes hypoabéliens.*

La liaison nécessaire des trois problèmes résulte des propositions suivantes :

1° *Les groupes résolubles les plus généraux de degré $m$, dont la détermination constitue le problème A, se partagent en classes, correspondantes aux diverses décompositions du nombre $m$ en facteurs successifs dont chacun soit une puissance d'un nombre premier. Soit $m = p^n p'^{n'}\ldots$ une de ces décompositions. Pour écrire immédiatement les groupes correspondants, il suffira de connaître les groupes les plus généraux respectivement contenus dans les groupes linéaires de degrés $p^n$, $p'^{n'}, \ldots$ (problème B).*

2° *Pour construire les groupes résolubles les plus généraux contenus dans le groupe linéaire de degré $p^n$ (problème B), on posera $n = \lambda\nu\pi^\sigma\pi'^{\sigma'}\ldots$, $\pi, \pi', \ldots$ étant des nombres premiers qui divisent $p^\nu - 1$. A chaque décomposition de cette espèce correspond une classe de solutions. Chacune d'elles pourra se construire sans difficulté, si l'on connaît les groupes résolubles les plus généraux pour le degré $\lambda$ (problème A), et les groupes résolubles les plus généraux contenus dans les groupes abéliens (ou dans les groupes hypoabéliens) de degrés $\pi^{2\sigma}$, $\pi'^{2\sigma'}, \ldots$ (problème C).*

3° *Pour construire les groupes résolubles les plus généraux contenus dans le groupe abélien (dans l'un des groupes hypoabéliens) de degré $p^{2n}$ (problème C), on posera de même $n = \lambda\nu\pi^\sigma\pi'^{\sigma'}\ldots$, $\pi, \pi', \ldots$ étant des diviseurs de $p^\nu \pm 1$; et l'on résoudra le problème A pour le degré $\lambda$, le problème C pour les degrés $\pi^{2\sigma}$, $\pi'^{2\sigma'}, \ldots$.*

Ainsi les trois problèmes A, B, C sont liés de telle sorte que la solution de chacun d'eux, pour un degré donné, se ramène à celle des mêmes problèmes pour des degrés inférieurs. On pourra donc les résoudre pour un degré quelconque en abaissant progressivement ce degré par des réductions successives, jusqu'à ce qu'il soit assez petit pour que la solution devienne intuitive. L'abaissement est extrêmement rapide; ainsi sept à huit réductions au plus suffiront pour tout nombre ayant moins de 1 000 000 000 000 de chiffres.

On voit, néanmoins, par ce qui précède, qu'il est impossible d'enfermer dans une formule tous les types généraux de groupes résolubles. Le nombre de ces types va grandissant indéfiniment à mesure que le degré s'élève.

On remarquera enfin l'intervention du groupe abélien dans la solution, et le singulier rapprochement établi par là entre le problème actuel et la théorie des transcendantes.

La méthode dont nous venons d'esquisser les principaux traits se trouve complétement établie par M. Jordan dans les quatre premiers Chapitres du Livre IV de son Traité, et résumée dans le cinquième, avec plus de précision que nous n'avons pu le faire ici. Les Chapitres VI et VII sont consacrés à l'examen d'une dernière question, la plus épineuse de tout l'Ouvrage, et dont nous allons dire quelques mots.

La méthode de solution des problèmes A, B, C exposée dans les précédents Chapitres fournit tous les groupes que l'on cherche, et ne fournit que des groupes résolubles (contenus dans le groupe linéaire s'il s'agit du problème B, dans les groupes abéliens ou hypoabéliens s'il s'agit du problème C). Mais il n'est pas prouvé que tous les groupes obtenus soient *généraux* et *distincts*. Il peut donc y avoir des groupes à rejeter, soit comme non généraux, soit comme faisant double emploi. C'est, en effet, ce qui se présente. En soumettant cette question à un examen approfondi, M. Jordan est parvenu à dresser le tableau complet de ces cas d'exclusion. (Observations de la fin du Chapitre V.)

Après avoir montré la nécessité de ces exclusions dans le Chapitre VI, il établit, dans le Chapitre VII, que, lorsqu'on a eu le soin de les faire, *sa méthode ne fournit que des groupes essentiellement généraux et distincts,* quel que soit celui des trois problèmes A, B, C qu'il s'agisse de résoudre. Il a pour cela à démontrer trois théorèmes A, B, C qu'il établit en prouvant que, si quelqu'un d'eux était faux pour les groupes d'un certain degré, l'un au moins d'entre eux serait faux pour des groupes d'un degré moindre ([1]). Cette démons-

([1]) Ce procédé de démonstration est, comme on le voit, analogue à celui par lequel Fermat a établi l'impossibilité de l'équation $x^4+y^4=z^4$.

tration repose sur certaines inégalités numériques, vraies en général, mais qui peuvent devenir inexactes pour certains nombres très-petits. De là naissent les cas d'exclusion.

Les groupes restants étant actuellement tous généraux et distincts, leur *énumération* devient facile. Quant à leur *classification,* elle résulte immédiatement de ce qui a été dit. En effet, les groupes résolubles et généraux de degré $m$ étant partagés en *classes,* comme nous l'avons indiqué, on pourra répartir les groupes de chacune d'elles en *sous-classes,* suivant la classe à laquelle appartiennent les groupes de degrés $p^n$, $p'^{n'}, \ldots$, qui servent à les construire; etc....

*Le problème de la résolution des équations par radicaux est donc entièrement résolu.*

Telle est l'analyse des principales questions résolues par M. Jordan. Cette analyse nous a été rendue facile par les développements qu'a donnés l'auteur dans différents recueils. Les travaux qui précèdent viennent au moment favorable; car les progrès de la Géométrie analytique ont permis, comme on l'a vu, à M. Jordan, de donner des applications qui ajoutent un grand intérêt et un nouvel attrait à la théorie si difficile des substitutions. J. H.

---

BRUNNOW (F.). — TRAITÉ D'ASTRONOMIE SPHÉRIQUE ET PRATIQUE, édition française de MM. LUCAS et ANDRÉ. — Paris, Gauthier-Villars, 1869-1872; 2 volumes in-8°, avec figures dans le texte. Prix : 20 francs.

Chaque volume se vend séparément :

*Astronomie sphérique,* 1869. In-8°, XXIV-518 p....... 10 fr.
*Astronomie pratique,* 1872. In-8°, XVI-544 p.......... 10 fr.

Ce Traité est divisé en deux volumes, *Astronomie sphérique* et *Astronomie pratique,* dont chacun forme, pour ainsi dire, un ouvrage séparé.

Le premier volume, *Astronomie sphérique,* rédigé par MM. Lucas et André, est depuis longtemps entre les mains du public; nous croyons donc inutile d'entrer à son égard dans de longs détails. Disons seulement que l'on y trouve les différentes formules d'interpolation, un exposé élémentaire de la théorie des moindres carrés, ainsi que la solution de tous les problèmes relatifs au mouvement diurne. Vient ensuite une étude complète de la réfraction astronomique et de l'aberration diurne ou planétaire; puis les formules de réduction des positions moyennes des étoiles au lieu apparent, et *vice versa,* et enfin la détermination des grands cercles fixes de la sphère céleste par rapport à l'horizon d'un lieu et par conséquent la mesure des latitudes et des longitudes géographiques. Ce volume se termine par l'étude de la figure et des dimensions de la Terre et par la détermination des parallaxes horizontales des étoiles.

L'*Astronomie pratique* a été rédigée par M. André, d'après le septième Chapitre de l'ouvrage allemand; mais on a fait au texte primitif de nombreuses additions et modifications, destinés surtout à faire connaître les procédés employés à l'Observatoire de Paris. Ce volume comprend deux grandes divisions : 1° l'étude des instruments d'un usage général et celle des erreurs communes à tous les appareils d'Astronomie ou de Géodésie; 2° l'examen particulier de chaque instrument.

Nous analyserons successivment ces deux Parties.

La première débute par un exposé de la construction et de l'usage du niveau à bulle d'air. Cet appareil, d'un emploi constant en Astromie et en Physique, est l'objet d'un long Chapitre où abondent les faits curieux sur son mode de construction, son ajustement, sa graduation et ses usages multiples.

Le procédé pratique de division d'un cercle, la détermination des erreurs que présente une semblable graduation, erreurs dont il importe essentiellement de tenir compte si l'on veut faire une mesure angulaire précise, font l'objet d'un Chapitre également très-important.

Dans le paragraphe relatif à la flexion est décrite la méthode curieuse de M. Marth pour la détermination de la flexion en ascension droite d'une lunette astronomique.

Viennent ensuite l'examen des erreurs d'une vis micrométrique et leur détermination soit par des procédés physiques, soit par la méthode astronomique de M. Yvon Villarceau, qui permet de les déduire des observations en ascension droite de la polaire.

Le Chapitre III est consacré à l'altazimut, au théodolite, et à l'instrument des hauteurs; il renferme une comparaison raisonnée de la méthode de la répétition des angles et de la méthode de la réitération, ainsi qu'une description succincte du théodolite à réflexion de M. d'Abbadie.

Nous arrivons maintenant aux véritables instruments d'Astronomie, à ceux que l'on ne trouve que dans les observatoires.

Le Chapitre IV est, en effet, consacré à une théorie complète de l'équatorial considéré comme devant servir à donner les positions absolues des astres. Struve et M. Yvon Villarceau ont successivement étudié l'équatorial à ce point de vue et nous ont donné d'élégantes méthodes de réduction pour les observations faites dans ce cas. Cet exposé n'a probablement été conservé par l'auteur que pour se soumettre aux idées, encore généralement admises en Allemagne, sur la valeur de l'équatorial, comme appareil de mesures absolues. En effet, tout instrument a sa fonction spéciale, et l'équatorial, quel que soit son mode de construction, doit, selon nous, n'être utilisé que pour des mesures comparatives d'astres très-voisins; c'est, d'ailleurs, ce que l'auteur a indiqué, trop timidement peut-être, lorsque, revenant aux vrais principes, il indique l'emploi que l'on doit faire comme appareil micrométrique d'un équatorial mobile autour de son axe polaire avec une vitesse égale à celle du mouvement diurne.

Le Chapitre V est consacré à la description des instruments méridiens, lunette méridienne et cercle méridien. Il renferme la démonstration analytique et géométrique des formules relatives à la réduction des observations de passage, une étude détaillée de l'influence des différentes erreurs instrumentales et de leur détermination; le paragraphe relatif à l'observation et à la réduction des observations des circumpolaires est rédigé avec un soin minutieux. Cet article se termine par une Note intéressante de M. Tisserand sur la comparaison des différents procédés de calcul que l'on peut employer pour rechercher la solution la plus probable d'un grand nombre d'équations du premier degré à une inconnue.

Dans la section relative au cercle méridien, on a décrit en détail l'instrument de passages et de hauteurs construit par M. Eichens pour l'Observatoire de Lima. Le lecteur y trouvera aussi une démonstration géométrique et une discussion approfondie de la formule complète de réduction des observations de déclinaison. Vient ensuite la détermination des différentes erreurs auxquelles sont soumises ces observations.

Ce même Chapitre V contient encore une étude complète de l'instrument des passages dans le premier vertical employé par Struve, pour déterminer les variations qu'éprouvent les distances zénithales des étoiles passant au méridien près du zénith, variations d'où se déduit la valeur de la constante de l'aberration. Nous savons gré à l'auteur d'avoir insisté longuement sur cet instrument, peut-être trop négligé en France, et dont Struve a su tirer un si grand parti.

Le Chapitre suivant est consacré à la description de la lunette brisée, autrefois fort employée en Allemagne, et du sidérostat dont la construction est le dernier des travaux de Léon Foucault.

Le Chapitre VII est plus spécialement destiné aux marins. Le sextant y est décrit avec le plus grand soin et les erreurs auxquelles sont sujettes les observations faites avec cet instrument sont étudiées attentivement. Nous avons remarqué les méthodes géométriques, empruntées à Struve, qui conduisent au calcul de l'importance de ces erreurs.

Dans le Chapitre VIII l'auteur étudie les différents micromètres employés en Astronomie : micromètre filaire, micromètre annulaire, héliomètre, micromètre à double image d'Airy. On y compare les valeurs relatives de ces différents instruments et l'on indique dans quels cas spéciaux chacun d'eux doit particulièrement servir.

Le dernier Chapitre de l'*Astronomie pratique* est consacré aux corrections que la réfraction, la parallaxe, l'aberration, la précession et la nutation introduisent dans les mesures micrométriques.

Des Tables numériques fort utiles à ceux qui, en dehors d'un observatoire, ont à s'occuper d'Astronomie, et des Notes intéressantes ont été ajoutées à cette partie didactique. Nous ne voulons pas entrer dans l'analyse de ces Tables et de ces Notes, important appendice de l'Ouvrage ; nous nous bornerons à signaler d'une manière spéciale les pages dans lesquelles M. Wolf traite de l'équation personnelle, sujet d'un de ses plus beaux travaux, et la Note relative à la parallaxe du Soleil qui réalise la promesse faite par l'auteur à la fin du premier volume.

Les deux volumes, *Astronomie sphérique* et *Astronomie pratique,* forment, comme on le voit, un ouvrage complet et comblent une lacune regrettable de la série de nos ouvrages classiques. Les traités de MM. Dubois et Liais, quoique remarquables à bien des égards, sont insuffisants au point de vue pratique ; aussi les deux volumes dont nous venons de faire une brève analyse, et que la maison Gauthier-Villars a imprimés avec la perfection qui lui est propre, rendront-ils d'utiles services aux astronomes, aux ingénieurs et aux marins.

G. Rayet.