BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

AM. MANNHEIM

Détermination simple et rapide d'une équation des surfaces du second ordre contenant six points donnés

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 125-127

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__125_0>

DÉTERMINATION SIMPLE ET RAPIDE D'UNE ÉQUATION DES SURFACES DU SECOND ORDRE CONTENANT SIX POINTS DONNÉS;

PAR AM. MANNHEIM.

Si l'on joint deux points d'une conique à quatre points quelconques de cette courbe, on obtient toujours, comme on sait, deux faisceaux ayant mêmes rapports anharmoniques.

Cette propriété, que l'on peut énoncer de plusieurs manières, est, avec la propriété qui lui est corrélative, le point de départ fondamental de M. Chasles dans son beau traité des coniques.

Je me suis proposé de chercher une propriété analogue relative aux surfaces du second ordre.

Pour y arriver, j'établis d'abord une démonstration de la propriété des coniques citée plus haut, démonstration dans laquelle je ne fais intervenir que cette seule définition des courbes du second ordre : *elles ne rencontrent une droite qu'en deux points.*

En reproduisant, pour ainsi dire, cette démonstration dans le cas des surfaces du second ordre, j'arrive immédiatement à la solution cherchée.

Prenons deux points o et o' sur une ligne du second ordre. Joignons le point o à quatre points a, b, c, m. Joignons le point o' aux mêmes points. Nous allons supposer fixes les points a, b, c et laisser mobile le point m.

Ce point décrira la courbe et peut être considéré, à chaque instant, comme déterminé par l'intersection des rayons om, $o'm$. Sur une droite issue du point o, nous ne devrons trouver qu'un seul point m, en vertu de la définition des lignes du second ordre. Nous voyons ainsi qu'à la droite om ne correspond que la droite $o'm$, et de même à la droite $o'm$ ne correspond que la droite om.

Pour fixer la direction de ces droites, nous les considérerons comme faisant partie des faisceaux ayant pour sommets o et o'.

Appelons r l'un des rapports anharmoniques du faisceau oa, ob, oc, om. De même, appelons r' le rapport anharmonique du faisceau $o'a$, $o'b$, $o'c$, $o'm$, en ayant soin d'établir ce rapport anharmonique comme dans le premier faisceau.

Prenons r et r' comme variables; il résulte d'une remarque précédente qu'à une valeur de r ne correspond qu'une valeur de r' et réciproquement.

L'équation d'une ligne de second ordre, en employant les variables r et r', est donc de la forme

$$Arr' + Br + Cr' + D = 0.$$

Nous devons exprimer que les points a, b, c appartiennent à la courbe; lorsque le point m coïncide successivement avec l'un ou l'autre de ces points, r et r' deviennent successivement nuls, infinis ou égaux à l'unité.

Pour que l'équation précédente soit vérifiée, lorsque r et r' sont nuls, elle ne doit pas renfermer de terme indépendant des variables.

Pour être vérifiée par les valeurs infinies de r et r', elle ne doit pas non plus contenir de terme en rr'. L'équation est donc déjà réduite à

$$Br + Cr' = 0.$$

Pour que r et r', égaux à l'unité, vérifient cette équation, on doit avoir

$$B + C = 0,$$

d'où

$$B = -C.$$

L'équation est, par suite, réduite à

$$r = r'.$$

Cette équation exprime la propriété qu'il s'agissait de démontrer; elle est l'équation la plus simple des lignes du second ordre déterminées par cinq points.

Opérons maintenant de même pour arriver à une équation des surfaces du second ordre, en adoptant cette définition de ces surfaces : *elles ne rencontrent une droite qu'en deux points.*

Prenons trois points o, o', o'' sur cette surface et quatre points a, b, c, m. Par la droite oo' et chacun de ces derniers points faisons passer des plans; de même pour la droite $o'o''$ et la droite oo''.

Nous aurons ainsi trois faisceaux de plans. Si nous imaginons que les trois plans qui contiennent un point mobile m de la surface soient seuls variables, nous pourrons fixer la position de ces plans au moyen de rapports anharmoniques r, r', r'' comptés de la même manière.

Si l'on donne deux de ces rapports, on aura, par suite, la droite d'intersection de deux plans, droite passant par l'un des points o, o' ou o''.

Et, comme sur cette droite on ne doit plus trouver qu'un point de la surface, la relation qui existe entre les trois rapports ne doit donner alors qu'une seule valeur pour le dernier. Cette relation est donc de la forme

$$\mathrm{A}rr'r'' + \mathrm{B}rr' + \mathrm{C}rr'' + \mathrm{D}r'r'' + \mathrm{E}r + \mathrm{F}r' + \mathrm{G}r'' + \mathrm{H} = 0.$$

Comme précédemment, on voit immédiatement qu'elle ne doit contenir ni le terme indépendant ni le terme en $rr'r''$. Elle est donc de la forme

$$\mathrm{B}rr' + \mathrm{C}rr'' + \mathrm{D}r'r'' + \mathrm{E}r + \mathrm{F}r' + \mathrm{G}r'' = 0.$$

En outre, dans cette relation, et pour qu'elle soit vérifiée lorsque r, r', r'' sont égaux à l'unité, *la somme des coefficients doit être nulle.*

De plus, puisque dans le plan $oo'o''$ il y a des points de la surface, *cette équation doit être vérifiée pour les valeurs de* r, r', r'' *correspondant à l'un de ces points.* Ces valeurs sont les rapports anharmoniques des trois faisceaux qu'on obtient en supposant le point m dans le plan $oo'o''$.

L'équation que nous trouvons ainsi est alors l'équation des surfaces du second ordre, qui contiennent les six points donnés o, o', o'', a, b, c. Elle renferme cinq coefficients liés entre eux par deux relations; trois seulement sont donc arbitraires. Ces surfaces du second ordre peuvent donc encore être assujetties à passer par trois nouveaux points.

En terminant, je ferai remarquer que, pour l'étude de certaines courbes ou surfaces de degré supérieur, il peut être utile de considérer les systèmes de coordonnées dans lesquels les variables sont des rapports anharmoniques. Ces systèmes de coordonnées, signalés depuis longtemps par M. Chasles, ne nous paraissent pas avoir assez fixé l'attention des géomètres.