BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 11-21

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__11_1>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

SIMON (Ch.), professeur au lycée Louis-le-Grand. — Mémoire sur la rotation de la Lune et sur la libration réelle en latitude (*Annales de l'École normale,* t. III, p. 253). — Mémoire sur la rotation de la Lune (*Annales de l'École normale*, t. VI, p. 69).

PREMIER MÉMOIRE.

Le phénomène de la rotation de la Lune consiste essentiellement en ce que l'axe instantané de rotation reste toujours compris dans l'un des plans principaux du sphéroïde lunaire : c'est un cas singulier de la théorie générale de la rotation des corps, qui se trouve réalisé dans la nature.

Soient OX_1, OY_1, OZ_1 les axes principaux du sphéroïde lunaire; OX_1 étant l'axe du plus petit moment d'inertie, qui se dirige vers la Terre; OZ_1 étant l'axe du plus grand moment d'inertie, ou l'axe de l'équateur géométrique, et OY_1 l'axe moyen. L'axe instantané de rotation oscille, de part et d'autre de OZ_1, dans le plan $Z_1 Y_1$; mais cette oscillation se décompose en deux autres, dont la première joue le rôle de variation séculaire, par rapport à la seconde.

La première a pour argument la distance moyenne du périgée lunaire au nœud ascendant de l'orbite, pour demi-amplitude $94'',15$, et pour période 2191 jours.

La seconde a pour argument la distance moyenne de la Lune au nœud ascendant de son orbite, pour demi-amplitude $42'',8$, et pour période $27^j,218$.

De sorte que, si l'on appelle E et φ ces deux arguments, et si l'on représente par OU l'axe instantané de rotation, on a

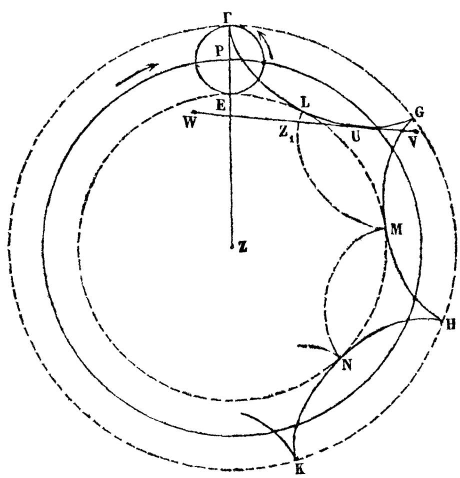
$$\text{angle } Z_1OU = -(94'',15)\cos E - (42'',8)\cos\varphi.$$

Il résulte de là les conséquences suivantes :

Prenons pour centre de la sphère céleste le centre de gravité O de la Lune ; soit Z le pôle boréal de l'écliptique ; soit $h = 1^\circ 28' 45''$ l'inclinaison moyenne de l'équateur lunaire sur l'écliptique ; posons, pour abréger, $2\zeta = 42'',8$, et de Z, comme pôle, décrivons un cercle avec la distance polaire $h + \frac{3\zeta}{2}$. Le pôle instantané U décrira sur la sphère céleste une suite de cycloïdes ayant pour bases des arcs

$$FG = GH = HK = \ldots = \pi\zeta,$$

que l'on peut regarder comme rectilignes ; et, par conséquent, l'axe instantané OU décrira un cône ayant pour directrice cette suite de cycloïdes. (L'inclinaison moyenne de l'équateur *apparent* n'est pas h, mais $h + \zeta$.)



$ZF = h + \frac{3\zeta}{2}$;

$h = 1^\circ 28' 45''$ est l'inclinaison moyenne de l'equateur *géométrique* sur l'écliptique ;

$h + \zeta = 1^\circ 28' 45'' + 21'',4$ est l'inclinaison moyenne de l'equateur *apparent* ou instantané ;

ζ est le diamètre du cercle générateur de l'epicycloide.

Pour nous rendre compte de la manière dont le mouvement s'accomplit, imaginons d'abord que, pendant la moitié de la période de $27^j,218$, l'argument E reste constant : l'axe OU décrira, pendant ce temps, dans le plan mobile $Z_1 Y_1$, un secteur VOW, correspondant à un arc $VW = 4\zeta$. On produira le mouvement qui a lieu pendant ce temps, en faisant rouler, sans glisser, ce secteur plan sur le cône cycloïdal; le pôle instantané U sera le point de contact de l'arc VW et de la base du cône.

Mais l'argument E varie d'une manière continue. On aura égard à cette variation en faisant rouler et glisser en même temps le secteur plan VOW sur le cône cycloïdal. La vitesse angulaire du glissement est facile à calculer.

M. Simon montre dans son Mémoire que les anciennes observations de la libration sont tout à fait insuffisantes pour vérifier cette théorie, et indique les observations qu'il faudrait faire. Elles sont difficiles, mais nous ne les croyons pas impossibles.

DEUXIÈME MÉMOIRE.

Il résulte du premier Mémoire que, si l'on appelle A, B, C les moments d'inertie du sphéroïde lunaire, par rapport aux axes principaux OX_1, OY_1, OZ_1;

n le moyen mouvement de révolution ou de rotation;

γ l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique;

θ l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique;

ω la longitude du nœud ascendant de l'orbite,

on a dû avoir à l'origine du mouvement (plus exactement, au moment où la coïncidence des nœuds de l'orbite et de l'équateur s'est établie) la relation

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{2} n \frac{C-A}{B}\left(1+\frac{\gamma}{\theta}\right), \tag{1}$$

sinon rigoureusement, du moins à très-peu près. Car, si cette condition n'eût pas été remplie, le nœud ascendant de l'équateur oscillerait de part et d'autre du nœud descendant de l'orbite, dans une période de 8740 jours environ; mais cette oscillation est nulle ou insensible.

D'un autre côté, on sait depuis longtemps que, si les deux moyens mouvements de révolution et de rotation n'eussent pas été égaux à l'origine (rigoureusement ou à très-peu près), il y aurait dans la libration en longitude une inégalité dont la période serait de 665 jours environ. Cette inégalité, comme la précédente, est nulle ou insensible.

Voilà donc deux relations qui se rapportent à l'état initial et qui doivent être satisfaites dans toute hypothèse qu'on voudra imaginer. Il paraît naturel d'examiner si elles sont ou non satisfaites dans l'hypothèse de Laplace.

La condition relative à l'égalité des moyens mouvements de révolution et de rotation ne présente pas de difficulté; mais il n'en est pas de même de l'équation (1).

M. Simon a été conduit à discuter avec rigueur (ce qui n'avait jamais été fait) la principale objection qu'on a élevée contre l'hypothèse de Laplace, à savoir la grande inclinaison des équateurs des planètes sur le plan du maximum des aires. Après avoir levé cette objection, il montre que les conditions initiales précédemment énoncées sont des conséquences naturelles de l'hypothèse, en ayant égard, bien entendu, à tous les faits observés et aux lois de la Mécanique. Mais la démonstration ne paraît guère susceptible d'être analysée : c'est une question de calcul, traitée d'ailleurs d'une manière qui ne laisse prise à aucune objection.

C'est surtout à cause de cette dernière partie que nous avons jugé utile de revenir sur les Mémoires importants de M. Ch. Simon. Ces travaux nous paraissent réellement intéressants : l'hypothèse de Laplace [1] n'a jamais été examinée d'une manière aussi rigoureuse. L'étude qui précède, indépendamment des résultats importants pour la théorie de la Lune, nous paraît une des plus sérieuses qui aient été publiées sur cette hypothèse, qui a tenu jusqu'ici plus de place dans les rêveries des philosophes que dans les études des savants.

G. D.

---

[1] Le premier auteur de cette hypothèse est, en réalité, le philosophe Kant, qui était, comme on sait, très-versé dans les Mathématiques.

TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK, udgivet af H.-G. ZEUTHEN. Tredie Række (¹).

T. I, 1871, nos 1-4.

ZEUTHEN (H.-G.). — *Sur le principe de dualité.* (11 p.)

Dans ce premier article, l'auteur traite de la dualité dans les propriétés descriptives des figures.

OPPERMANN (L.). — *Sur les quadratures.* (16 p.)

L'auteur expose, avec des modifications qui lui sont propres, la méthode de Gauss pour le calcul des intégrales définies.

TYCHSEN (C.). — *Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients variables.*

Intégration de l'équation

$$y'' + \frac{k}{x}y' + \left[a + \frac{k(k-2) - 4n(n+1)}{x^2}\right]y = 0,$$

dans le cas de n entier et positif.

MYLORD (H.). — *Application des coordonnées elliptiques à la détermination du système des trajectoires obliquangles pour certains systèmes de courbes et de surfaces.* (17 p.)

L'auteur applique sa méthode aux systèmes suivants : coniques confocales ; lignes de courbures d'une surface de second degré ; surfaces confocales du second degré.

STEEN (Ad.). — *Note sur les surfaces de révolution.* (3 p.).

Si l'on considère une surface de révolution comme engendrée par une sphère mobile, dont le rayon est l'ordonnée par rapport à l'axe de révolution d'une certaine courbe directrice, les positions successives de la sphère ne se coupent pas toujours, et le point de rencontre de la directrice avec l'axe ne se trouve pas toujours sur la courbe méridienne.

LORENZ (L.). — *Sur un problème du jeu de cartes.*

(¹) *Journal de Mathématiques*, publié par H.-G. ZEUTHEN, 3e série. Copenhague, chez E. Jespersen, successeur de O. Schwartz. (Voir *Bulletin*, t. I, p. 179 et 369.)

Zeuthen (H.-G.). — *Rectification d'une remarque de Jacobi.*

Il s'agit d'une assertion relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution animée d'un mouvement de rotation uniforme sautour de son axe (« De motu puncti singulari » ; *Journal de Crelle,* t. 24, p. 18). Jacobi dit, à tort, qu'il suffit, pour tenir compte du mouvement de la surface, d'ajouter à la composante de la force motrice perpendiculaire à l'axe, la force centrifuge, proportionnelle à la distance du point à l'axe.

Mylord (H.). — *Détermination du système des trajectoires obliquangles pour certains systèmes de courbes et de surfaces.* (5 p.)

Suite d'un article précédent.

Tychsen (C.). — *Sur une intégrale multiple, qui se rencontre dans la méthode des moindres carrés.* (3 p.)

Petersen (J.). — *Sur un problème du jeu de cartes.* (2 p.)

Petersen (J.). — *Sur l'équation indéterminée* $x^2 + cy^2 = A$. (10 p.)

Möller (C.-F.-C.). — *Quelques remarques sur l'enseignement de la stéréométrie élémentaire.* (3 p.)

Steen (Ad.). — *Démonstration élémentaire de la formule de Simpson.* (2 p.)

Oppermann (L.). — *Augustus de Morgan.* (2 p.)

Notice sur ce géomètre philosophe, né le 27 janvier 1806, à Madura (Inde), mort le 18 mars 1871, à Camden-town (faubourg de Londres).

Lorenz (L.). — *Sur la théorie des nombres.* (18 p.)

Recherches sur le nombre des solutions de l'équation indéterminée $m^2 + cn^2 = N$, c et N étant des entiers donnés, m et n des entiers inconnus.

L'auteur cherche à déterminer, par une voie purement analytique, le nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$m^2 + cn^2 = N,$$

pour certaines valeurs données de c, savoir, $c = 1, 2, 3, 4$. Il exprime d'abord la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2+cn^2}, \quad (q<1),$$

au moyen du produit infini connu

$$\prod_1^\infty {}_h \frac{(1-q^{2h})(1+q^{2h-1})(1-q^{2hc})(1+q^{(2h-1)c})}{(1+q^{2h})(1-q^{2h-1})(1+q^{2hc})(1-q^{(2h-1)c})};$$

puis il développe ce produit en une série d'une autre forme que la série primitive. Il y parvient à l'aide de la décomposition de ce produit infini sous forme de fractions. La fraction

$$\frac{1}{2-x}\prod_1^\infty {}_h \frac{1-q^{2h-1}x+q^{4h-2}}{1-q^{2h}x+q^{4h}} = \mathrm{P}(x)$$

donne, par sa décomposition,

$$\mathrm{P}(x)=\prod_1^\infty {}_h\left(\frac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2\left[\frac{1}{2-x}+\frac{q(1+q^2)}{1-q^2x+q^4}+\frac{q^2(1+q^4)}{1-q^4x+q^8}+\ldots\right],$$

d'où l'on déduit, en posant $x=-2$ et $x=0$, la solution du problème pour les cas de $c=1$ et de $c=2$.

De la comparaison des séries ainsi obtenues, on tire immédiatement des propositions sur le nombre des solutions de l'équation indéterminée en question. Pour $c=3$, l'auteur a trouvé ainsi la proposition suivante :

« Quand un nombre N renferme des facteurs premiers $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2},\ldots$ de la forme $3m+1$, et que les facteurs premiers de la forme $3m+2$, ne s'y trouvent qu'à des puissances paires, le nombre des solutions de l'équation

$$m^2+3n^2=\mathrm{N}$$

sera déterminé par la formule

$$\rho_{\mathrm{N}}=2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots,$$

si N est un nombre impair, et par la formule

$$\rho_{\mathrm{N}}=6(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots,$$

si N est pair Si au contraire il entre dans N un facteur de la forme

$3m+2$ à une puissance impaire, on a alors

$$\rho_N = 0. \text{ »}$$

On déduit encore de là des formules pour la sommation de diverses séries. Ainsi la dernière proposition conduit à l'équation

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m^2+3n^2)^p}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}-\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\ldots\right)\left(1+\frac{2}{4^p}\right),$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de p pour lesquelles le développement est convergent.

Le cas de $c=-1$ est traité d'une autre manière. On transforme d'abord la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum q^{m^2-n^2},$$

où m prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, et n seulement toutes les valeurs numériquement moindres que m, dans la suivante

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} q^{n^2}\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}},$$

que l'on transforme à son tour à l'aide des deux équations

$$\sum_{1}^{\infty} q^{n^2}x^{2n-1}\frac{1+q^n x}{1-q^n x}=\sum_{1}^{\infty}\frac{q^n x^n}{1-q^n x},$$

$$\sum_{1}^{\infty} q^{(2n-1)^2}x^{2n-1}\frac{1+q^{4n-2}x}{1-q^{4n-2}x}=\sum_{1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}x^n}{1-q^{4n-2}x}.$$

On conclut de là la proposition suivante :

« Le nombre des solutions de l'équation $m^2-n^2=N$ est égal au double du nombre des diviseurs de N ou de $\frac{1}{4}$N, suivant que N est impair ou divisible par 4. Si, au contraire, N est divisible seulement par 2, l'équation n'a point de solution. »

De cette proposition, résulte la formule de sommation

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum\frac{1}{(m^2-n^2)^p}=\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{6^p}+\ldots\right)^2+\left(1+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\ldots\right)^2.$$

Steen (Ad.). — *Sur la loi fondamentale de l'extension et de la compression des corps.* (5 p.)

ATTI dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei (¹).

T. XX, 1866-67.

Catalan (E.). — *Note sur un problème d'Analyse indéterminée.* (4 p.; fr.)

Trouver plusieurs cubes entiers consécutifs, dont la somme soit un carré.

Secchi (A.). — *Recherches sur les taches solaires et leurs mouvements.* (18 p.; it.)

De l'ensemble de ses recherches, combinées avec celles de Spörer, le P. Secchi conclut, pour l'inclinaison de l'équateur solaire, $6^{\circ}\,57'$, et pour la durée de la rotation, $25^{j}\,5^{h}\,37^{m}$.

Proja (S.). — *Sur la proposition de M. Mädler pour la réforme du calendrier russe.* (8 p. it.)

Catalan (E.). — *Rectification et addition à la « Note sur un problème d'Analyse indéterminée ».* (4 p.; fr.)

Respighi (L.). — *Sur les comètes et sur les étoiles filantes.* (3 p.; it.)

Chelini. — *Rapport sur le concours pour le prix Carpi en 1865.* (4 p.; it.)

Le sujet du concours était : « Exposer une méthode qui puisse servir à déterminer *toutes* les valeurs rationnelles de x, propres à rendre carré ou cube parfait le polynôme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$

A, B, C, D, E étant des nombres entiers, toutes les fois qu'il existe de pareilles valeurs, et qui, dans le cas contraire, fasse connaître l'impossibilité de la solution. » Le prix n'a pas été décerné.

Richaud (C.). — *Note sur la solution de l'équation*

$$x^3 + (x + r)^3 + (x + 2r)^3 + \ldots + [x + (n - 1)r]^3 = y^2.$$

(20 p.; fr.)

(¹) Publié chaque année en six livraisons in-4°; Rome. En italien et en français.

Mainardi (G.). — ***Remarques sur divers sujets.*** (17 p.; it.)

Premier article : « Sur la résolution des équations algébriques au moyen de fonctions irrationnelles ». — Ayant remarqué que le système conjugué des puissances d'une substitution cyclique d'ordre composé est le produit de systèmes analogues, tous permutables entre eux, dont les ordres sont les facteurs premiers de l'ordre composé; que chacun de ces systèmes arithmétiques partiels admet un système géométrique permutable avec lui et décomposable, parce qu'il est d'ordre composé; considérant ce qu'Abel [1] a démontré sur la forme des fonctions irrationnelles qui peuvent être racines d'une équation algébrique; l'auteur a pensé que, lorsque la substitution cyclique primitive se rapporte à toutes les racines d'une équation algébrique résoluble par radicaux, le système complexe de substitutions dont il vient d'être question appartient exclusivement à l'équation elle-même; en sorte que toute fonction algébrique des racines, invariable pour ces substitutions, doit être symétrique, et partant, exprimable au moyen des coefficients. Effectivement, cette conclusion donne immédiatement, dans toute sa généralité, une première répartition des racines en groupes, indiquée par Galois, et démontrée par Betti [2]; elle fournit la résolution des équations du cinquième degré telle qu'elle a été indiquée par Abel [3], et conduit à des équations algébriques de degré quelconque, résolubles par radicaux.

Catalan (E.). — *Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques.* (10 p.; fr.)

Démonstration de nouveaux théorèmes découverts par Tortolini, et analogues à celui de Legendre.

Volpicelli (P.). — *Analyse et rectification de quelques idées et de quelques expériences relatives à l'électrostatique.* (137 p.; it.)

Suite d'un travail dont la première partie a paru dans le tome XIX des *Atti*.

---

(1) *OEuvres*, t. II, p. 185.

(2) *Annali di Matematica*, Rome, 1852-55.

(3) *OEuvres*, t. II, p. 270.

ANNALI DELLE UNIVERSITA TOSCANE. — T. X. Pisa, 1868 ([1]).

BETTI (E.). — *Sur la détermination des températures variables d'un cylindre.* (14 p.)

Ce travail contient une application des résultats publiés par l'auteur dans les *Memorie della Società Italiana delle Scienze* (3e série, t. I, deuxième partie) où il a donné une formule générale pour exprimer les températures variables d'un corps solide, quelles que soient les températures initiales et les conditions à la surface. M. Betti traite ici le cas particulier où le corps a la forme d'un cylindre de révolution, et où les températures initiales sont symétriques par rapport à l'axe de ce cylindre. Il démontre pour la première fois le théorème suivant :

« Si les quantités en nombre infini g_1, g_2, g_3,... sont les infinis réels et du premier ordre d'une fonction transcendante monodrome, qui n'ait pas d'infinis complexes à partie imaginaire négative, et qui ait un infini à l'*infini réel,* on pourra toujours déterminer une série convergente de fonctions de Bessel,

$$\sum_1^{\infty} a_s \mathrm{I}(g_s r),$$

dont la somme s'annule pour toutes les valeurs réelles de r différentes d'une quantité ρ, et devienne infinie pour $r = \rho$.