BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 1 (1870), p. 9-23

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1870__1_9_0>

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

SERRET (PAUL), Docteur ès Sciences, Membre de la Société philomathique. — GÉOMÉTRIE DE DIRECTION. *Application des coordonnées polyédriques. Propriété de dix points de l'ellipsoïde, de neuf points d'une courbe gauche du quatrième ordre, de huit points d'une cubique gauche.* — In-8, avec figures dans le texte, xx-523 pages; 1869. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 10 francs.

Ce nouvel Ouvrage d'un auteur déjà connu et apprécié contient des propositions d'Analyse et de Géométrie qui nous paraissent d'une véritable importance; nous croyons qu'il sera lu avec profit par toutes les personnes qui s'intéressent aux progrès de la Géométrie analytique.

Les principes posés par l'auteur sont susceptibles d'applications très-variées. M. Serret a surtout développé celles qui concernent la *théorie des surfaces du second ordre,* assimilée par lui au premier étage de la Géométrie. Nous goûtons peu, nous l'avouons, ces comparaisons si détaillées, dont la première idée est due au savant M. Terquem. En tous cas, elles ne nous paraissent pas de nature, puisqu'on nous affirme que les étages inférieurs ne sont pas construits, à encourager ceux qui, dès à présent, s'occupent des parties les plus élevées de l'édifice.

Quoi qu'il en soit de cette image hardie, qui importe peu d'ailleurs à notre sujet, nous reconnaissons volontiers que l'Ouvrage de M. Serret ajoute plusieurs propriétés nouvelles à ce qu'on savait déjà sur les surfaces du second ordre, et nous allons essayer de donner à nos lecteurs une idée des principes fondamentaux employés et de la méthode suivie dans le cours de l'Ouvrage.

Jusqu'ici on ne connaissait pas de relation analytique simple liant six points d'une conique ou dix points d'une surface du second ordre; du moins ces relations ne se présentaient pas sous une forme qui fût appropriée aux applications et à la démonstration des théorèmes. Personne, croyons-nous, n'aurait songé à établir une théorie des surfaces du second ordre, en partant de l'équation de la surface passant par neuf points ou tangente à neuf plans quelconques. C'est pourtant ce que fait M. Serret; mais, auparavant, il remplace cette équation par une relation tout à fait équivalente, et dont la forme se prête avec la plus grande facilité aux applications. Cette relation, intéressante en elle-même, une fois établie, le lecteur est conduit sans effort à la démonstration des théorèmes les plus difficiles, ainsi qu'à la construction des premiers et des plus importants problèmes qu'on doit se proposer au début d'une théorie complète des surfaces du second degré. Quelques-uns de ces problèmes n'avaient encore été traités par personne; d'autres, au contraire, ont fait l'objet des travaux de nombreux géomètres. M. Serret emploie pour les résoudre une méthode uniforme dont l'origine est dans le principe fondamental posé presque au début de l'Ouvrage, et dont nous allons essayer de donner une idée à nos lecteurs.

Commençons par le cas le plus simple, celui de la ligne droite. On sait que l'équation de la ligne droite passant par deux points ou, s l'on veut, la relation entre trois points d'une ligne droite, s'obtient en égalant à zéro le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Mais il y a une proposition très-simple de Géométrie qui tient lieu de cette équation : « Si trois points sont en ligne droite, l'un d'eux peut toujours être considéré comme le centre des moyennes distances du système formé par les deux autres, pourvu qu'on attribue à ces derniers points des masses quelconques. » Il suit de là que, si l'on désigne par P, P_1, P_2 les distances des trois points à un axe arbitrairement choisi, on a, entre ces distances, la relation

$$\lambda P + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0,$$

où λ, λ_1, λ_2 sont des paramètres fixes affectés à chaque point. En d'autres termes :

Pour que trois points soient en ligne droite, il faut qu'il y ait toujours une même relation linéaire et homogène entre les distances de ces trois points à une droite quelconque.

On connaît toute l'importance de cette proposition dans la théorie de la ligne droite; elle équivaut, en effet, on s'en assure aisément, à l'équation même de la ligne droite, et peut la remplacer dans tous les cas.

C'est cette proposition si utile que M. Serret a étendue aux courbes et aux surfaces de degré supérieur. Voici, par exemple, le théorème pour le cas des sections coniques :

Pour que six points 1, 2,..., 6 *soient sur une conique, il faut qu'on puisse choisir six coefficients* $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ *tels, qu'en désignant par* $P_1, \ldots, P_6$ *les distances de ces points à une droite quelconque, on ait la relation*

$$\sum_1^6 \lambda_i P_i^2 = 0.$$

Les paramètres λ, bien entendu, ne dépendent en aucune manière de la position de l'axe. Si, pour fixer les idées, on considère le point (i) comme ayant une masse positive ou négative λ_i, l'équation exprime que le moment d'inertie du système des six points par rapport à une droite est toujours nul, quelle que soit la position de cette droite.

M. Serret regarde la proposition comme nouvelle. En réalité, elle a déjà été donnée par M. Hesse dans un opuscule intitulé : *Vier Vorlesungen...* (Quatre leçons de Géométrie analytique...) (*). Dans ce petit Ouvrage, que nous recommandons à l'attention des savants français, M. Hesse donne, en effet, le théorème de M. Serret avec

(*) *Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie* von Dr Otto Hesse. (Extrait du *Zeitschrift für Mathematik und Physik;* 1866. Teubner, Leipzig.)

quelques autres systèmes de formules dont il déduit d'une manière tout à fait neuve le théorème de Pascal. On trouvera plus loin cette démonstration, que nous avons pris la liberté de traduire, en y faisant quelques changements.

Mais cette proposition arrive incidemment dans l'Ouvrage de l'auteur allemand; elle forme, au contraire, la base même de l'Ouvrage de M. Serret. Nous n'avons pas trouvé d'ailleurs, dans l'excellente *Géométrie analytique à trois dimensions* de M. Hesse, les relations analogues pour les surfaces du second degré et leurs courbes d'intersection. Ces relations, qu'on trouve dans l'Ouvrage de M. Serret, sont les suivantes :

Pour que dix points soient sur une surface du second ordre, il faut et il suffit qu'il y ait entre leurs distances à un plan quelconque P *une relation de la forme*

$$\sum_1^{10} \lambda_1 P_1^2 = 0.$$

De même,

Pour que neuf points soient sur une courbe gauche du quatrième ordre, il faut et il suffit qu'il y ait entre leurs distances à un plan quelconque une relation de la forme

$$\sum_1^{9} \lambda_1 P_1^2 = 0,$$

etc., etc....

Les propositions précédentes conduisent, entre les mains de M. Serret, à des applications aussi nombreuses que variées. Nous donnerons l'un des exemples les plus simples.

Considérons une conique et deux triangles conjugués à cette conique. Soient

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0$$

les équations tangentielles des sommets du premier triangle conjugué. On sait que l'équation tangentielle de la conique prend la forme simple

$$\lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 = 0.$$

De même, soient

$$P_4 = 0, \quad P_5 = 0, \quad P_6 = 0$$

les équations des sommets du second triangle conjugué. On aura une deuxième équation de la conique

$$\lambda_4 P_4^2 + \lambda_5 P_5^2 + \lambda_6 P_6^2 = 0.$$

Ces deux équations ne doivent différer que par un facteur constant; à cause de l'indétermination des coefficients λ, on peut supposer que leur somme soit identiquement vérifiée. On a donc l'identité

$$\sum_1^6 \lambda_i P_i^2 = 0.$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que six points soient sur une conique. On obtient donc ce beau théorème dû au géomètre allemand que nous avons déjà cité :

Les sommets de deux triangles conjugués à une conique sont six points d'une même conique.

La réciproque de ce théorème et les propositions analogues pour l'espace ne se démontrent pas avec une moindre facilité.

L'exemple précédent suffira, croyons-nous, pour faire comprendre à nos lecteurs la marche habituellement suivie par l'auteur. Ne pouvant donner qu'une idée nécessairement imparfaite des nombreuses questions traitées par M. Serret, nous parlerons surtout de la partie la plus importante de l'Ouvrage, celle sur laquelle l'auteur appelle l'attention des géomètres dans sa Préface, c'est-à-dire de la construction des surfaces du second degré et de leurs courbes d'intersection, quand on donne un nombre suffisant de points pour les déterminer.

On sait que les problèmes analogues pour les coniques se résolvent par l'emploi de théorèmes généraux comme le théorème de Pascal, celui de Desargues, celui de M. Chasles, etc. Ces théorèmes établissent tous une relation entre six points d'une conique et peuvent, par conséquent, tenir lieu de l'équation de la courbe. On ne connaît pas, malheureusement, de théorème analogue pour les surfaces du second degré. M. Serret s'est proposé d'étendre à l'espace l'une des proportions fondamentales de la théorie des coniques, le théorème de Desargues, et nous croyons qu'il a atteint, au moins en grande partie, le but qu'on doit se proposer dans la généralisation de ces théorèmes.

S'il s'agissait de trouver simplement pour les surfaces du second ordre une propriété analogue à celle qui, pour les coniques, est exprimée par le théorème de Desargues, on pourrait dire que le problème est résolu depuis longtemps. Sturm, en effet, dans un beau Mémoire inséré aux *Annales de Gergonne*, t. XVII, p. 180, a généralisé le théorème de Desargues et a montré que toutes les coniques passant par quatre points déterminent sur une droite des segments en involution. Cette proposition s'étend d'elle-même aux surfaces ayant une courbe commune d'intersection. Mais, dans l'espace, le théorème perd, au moins en apparence, son utilité; il ne conduit pas à une construction de la surface passant par neuf points, comme le théorème plan à la construction de la conique déterminée par cinq points. M. Serret obtient des généralisations différentes et plus utiles. Nos lecteurs pourront en juger en comparant les deux théorèmes correspondants que nous plaçons à côté l'un de l'autre :

Une corde xy et un quadrilatère $aba'b'$ étant inscrits à une conique, les extrémités de cette corde et ses traces sur les côtés opposés du quadrilatère forment trois couples de points conjugués par rapport à une ellipse infiniment aplatie qui se réduit à un système de deux points situés sur la corde donnée. (DESARGUES.)	Un quadrilatère plan et un octaèdre $abcda'b'c'd'$ étant inscrits à une surface du second ordre, les deux couples de côtés opposés de ce quadrilatère, les traces de son plan sur les faces opposées de l'octaèdre font six couples de droites conjuguées par rapport à un même ellipsoïde infiniment aplati qui se réduit à une conique située dans le plan du quadrilatère. (PAUL SERRET.)

De même pour la courbe gauche du quatrième ordre :

Un quadrangle inscrit à une conique et le système de deux points formé des traces de la courbe sur une droite quelconque sont l'un et l'autre conjugués à une *même ellipse infiniment aplatie* réduite à un système de deux points situés sur la droite considérée. (DESARGUES.)	Un pentagone inscrit à une courbe gauche du quatrième ordre et le quadrangle ayant pour sommets les traces de la courbe sur un plan quelconque, sont l'un et l'autre conjugués (*) à un même *ellipsoïde infiniment aplati*, réduit à une conique située dans le plan considéré. (PAUL SERRET.)

La ressemblance entre les propositions anciennement connues pour le plan, et les propositions nouvelles pour les surfaces est rendue évidente par les comparaisons précédentes. Mais, cette fois, l'analogie

(*) M. Serret dit qu'un pentagone est conjugué par rapport à un ellipsoïde quand le plan polaire de chaque sommet du pentagone passe par le côté opposé.

qui existe déjà dans les démonstrations des deux théorèmes subsiste encore dans leurs applications. M. Serret montre, en effet, que ses théorèmes conduisent à une construction de la surface du second ordre déterminée par neuf points, de la courbe gauche du quatrième ordre déterminée par huit points, et ont, par conséquent, la même utilité que le théorème de Desargues pour les coniques.

Il subsiste pourtant une différence que nous devons signaler entre ces propositions correspondantes. Le théorème de Desargues établit une relation entre six points *quelconques* d'une conique; la proposition de M. Serret ne donne la relation géométrique entre dix points de la surface que si quatre d'entre eux sont dans un même plan. Peut-être cette légère restriction tient-elle à la nature de la question; en tous cas, les théorèmes nouveaux ont le degré de généralité nécessaire pour les applications que l'auteur avait en vue.

M. Serret n'a pas négligé l'étude d'un problème célèbre dans la théorie des surfaces de second ordre. On sait que toutes les surfaces passant par sept points vont généralement passer par un huitième point. On doit donc se proposer de construire avec la règle ce huitième point quand on connaît les sept premiers. Ce problème, qu'on appelle quelquefois *construction du huitième point,* a été traité par M. Hesse, qui en a donné une très-belle solution (*). L'auteur examine soigneusement la construction de M. Hesse, il indique un cas dans lequel elle tombe en défaut sans que le problème soit réellement indéterminé; enfin il donne des solutions nouvelles et fort simples, déduites d'un principe uniforme.

Il nous resterait à signaler plusieurs belles propriétés des sphères et des polyèdres rencontrées par l'auteur dans ses consciencieuses études. Ne pouvant tout citer, nous indiquerons les deux suivantes comme étant des plus simples et des plus élégantes:

Pour que les milieux des diagonales d'un octaèdre soient dans un même plan, il faut et il suffit que ses six plans soient parallèles à six plans tangents d'un cône de second ordre;

Tout ellipsoïde (**) *qui divise harmoniquement quatre des diagonales d'un quadrilatère complet divise harmoniquement les six autres.*

(*) Voir *Journal de Crelle,* t. XXVI.

(**) M. Serret appelle, pour abreger, *ellipsoïde* toute surface à centre du second degre.

Nous bornerons là l'examen de cet Ouvrage, qui se recommande aux géomètres par le nom de l'auteur et l'importance des résultats obtenus. Le Livre de M. Paul Serret introduit en Géométrie analytique un principe nouveau et fécond; il sera consulté par toutes les personnes qui voudront se tenir au courant des progrès récents de la Géométrie des surfaces du second ordre.

L'auteur a placé au commencement une Préface écrite avec beaucoup de verve. Cette Préface soulève bien des questions délicates; elle contient plus d'une assertion à laquelle nous ne voudrions pas nous associer. M. Serret nous pardonnera de faire quelques réserves sans entrer dans un examen approfondi que ne comporte pas le plan de cette publication.

G. D.

CASORATI (Dott. Felice), prof. di Calcolo differenziale ed integrale nella R. Università di Pavia. — TEORICA DELLE FUNZIONI DI VARIABILI COMPLESSE. Volume primo. — Grand in-8; 1868. Pavia, tipografia dei Fratelli Fusi. Prix : 10 francs.

L'Ouvrage dont nous venons de transcrire le titre doit compter, sans contredit, parmi les plus importantes productions scientifiques de ces dernières années. Son but est l'exposition complète de cette branche de l'Analyse que Cauchy a fondée, et dont Riemann a été le second créateur.

Les découvertes de Cauchy ont trouvé dans notre pays de lumineux interprètes et doivent aux géomètres français d'importantes additions. Mais jusqu'ici la doctrine de Riemann ne nous était guère connue que par les Ouvrages de ses disciples, écrits presque tous dans une langue dont l'étude est malheureusement trop sacrifiée chez nous aux prétendues exigences littéraires de l'esprit français. Aussi devons-nous nous réjouir de la publication d'un livre dont la langue est facilement intelligible à tout Français un peu lettré, et composé, en outre, avec un remarquable talent par un géomètre qui, tout jeune encore, a su déjà si bien se rendre maître du vaste ensemble des théories qui gravitent autour de son sujet principal.

Le premier volume, le seul qui ait paru jusqu'à ce jour, se compose de deux Parties principales, dont la première, sous le titre d'*In-*

troduction, contient un aperçu historique du développement de la théorie des quantités complexes. Cet aperçu, qui formerait à lui seul un excellent Mémoire, est un résumé substantiel et méthodique des plus grandes découvertes de l'Analyse moderne, où la part de chaque géomètre est indiquée et appréciée avec autant de clarté que de profondeur. Les cent quarante-trois pages que l'auteur a consacrées à cet objet seront un précieux secours pour tous ceux qui voudront se mettre au courant des hautes théories analytiques, et qui, privés de ce fil conducteur, ne sauraient comment s'orienter au milieu de tant de travaux, différents par l'esprit comme par la forme, et dont rien ne leur indique d'avance la dépendance mutuelle, non plus que l'ordre dans lequel il convient de les étudier.

Cette Introduction est divisée en deux Chapitres, dont le premier contient l'histoire de la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes, une des plus importantes applications des quantités complexes, dans laquelle l'emploi de ces quantités a été la condition nécessaire des découvertes d'Abel et de Jacobi. M. Casorati trace le tableau des progrès successifs de cette branche de l'Analyse, depuis les travaux de Fagnani et d'Euler, jusqu'à ceux de Cayley, d'Eisenstein, d'Hermite, de Weierstrass.

Le second Chapitre traite plus particulièrement des variables complexes et des fonctions de ces variables. L'auteur commence naturellement par l'exposé des travaux de Cauchy sur ce sujet; il établit nettement et avec impartialité la part qui revient à ce grand analyste dans des découvertes dont quelques auteurs allemands semblent parfois trop disposés à attribuer tout l'honneur à leurs compatriotes.

Citons, à ce propos, quelques pages de la remarquable étude que M. Beltrami a consacrée au Livre de M. Casorati, dans le *Giornale di Matematiche* de Naples, t. VII, 1869, p. 36 et suiv. Ces pages nous paraissent éminemment propres à faire saisir les points de contact entre l'œuvre de Cauchy et celle de Riemann, et à montrer ce que le second doit au premier :

« Un de ces points de contact se présente dès les premiers pas que l'on fait dans la théorie générale des fonctions, savoir : dans la conception même de la fonction. Déjà Cauchy avait reconnu qu'il convient de faire abstraction de toute supposition, explicite ou implicite, de l'existence d'une formule analytique de nature quelconque, et de ne considérer que la dépendance qui doit avoir lieu entre la valeur de la variable et celle de la fonction. Mais, dans le passage de la variabilité réelle à la variabilité complexe, Cauchy avait donné à ce principe une extension trop grande, ce qui l'avait conduit à distinguer par une appellation spéciale (*monogènes*) les fonctions auxquelles Riemann, mieux inspiré, a cru devoir réserver exclusivement la dénomination de *fonctions* (d'une variable complexe). Ce point est très-clairement exposé par M. Casorati dans son préambule historique, ainsi que dans les premiers Chapitres de la deuxième Section...

» Quant à la définition d'une fonction au moyen de propriétés caractéristiques suffisantes, ce sujet n'est pas encore traité dans le volume publié, bien que l'auteur laisse entrevoir à plusieurs reprises dans l'*Introduction* (p. 134-136, par exemple) toute l'importance de ce nouveau point de vue, qui, employé primitivement dans les méthodes de la Physique mathématique, et introduit ensuite avec beaucoup d'avantages dans l'Analyse pure, semble se rapprocher singulièrement de celui de la Géométrie moderne, suivant lequel les propriétés des figures s'établissent comme conséquences de quelques données caractéristiques, sans faire aucun usage des équations analytiques.

» Parmi les nombreux mérites qui appartiennent à Cauchy en ce qui touche au perfectionnement général de la science, on doit mettre en première ligne celui d'avoir constamment soutenu, dès le commencement de sa carrière scientifique, la nécessité de bien délimiter l'étendue et la signification de tout symbole que l'on veut introduire et employer dans l'Analyse. En revenant sans cesse sur la discussion des meilleures règles à suivre pour parvenir à ce but, règles qu'il a successivement modifiées sans jamais aboutir à leur donner une forme définitive, il a montré clairement que, si l'on n'était par encore entré dans la seule voie qui conduit sûrement au but, la nécessité d'atteindre ce but ne lui en paraissait pas moins absolue. Et en cela il était dans le vrai. Seulement Cauchy, entraîné, comme cela se voit si souvent, au delà des justes bornes par son ardeur à réagir contre l'abus du symbole, a péché par l'excès contraire, en établissant plus d'une fois ses définitions de façon à interrompre arbitrairement la continuité des variables, et à perdre ainsi de vue le guide infaillible qui aurait dû le diriger.

» Malgré l'imperfection des résultats, l'idée première est tellement vraie, et les considérations qu'il a développées en plusieurs endroits sont si justes, que plus d'un lecteur du tome IV des *Exercices d'Ana-*

lyse et de Physique mathématique a dû trouver de lui-même la véritable voie qui mène à la solution de la difficulté....

» La première Section de l'Ouvrage de M. Casorati est, en grande partie, consacrée à l'exacte détermination du sens qu'il faut attacher aux fonctions simples d'une variable complexe, et les exemples qu'il a choisis nous semblent on ne peut mieux appropriés à ce but, sous le double rapport de la continuité et de la conservation des propriétés caractéristiques.

» Les restrictions qui, comme nous le disions tout à l'heure, ont été imposées mal à propos par Cauchy à la continuité de la variable complexe qui entre dans une fonction donnée, proviennent surtout de ce qu'il prétendait séparer les diverses séries de valeurs dont est susceptible une fonction à plusieurs déterminations, et considérer chacune d'elles comme une fonction séparée. De cette manière, en supposant les valeurs de la fonction placées sur les valeurs correspondantes de la variable (ce que toutefois Cauchy n'avait pas coutume de faire), le champ des valeurs de la fonction devenait simple, mais contenait inévitablement des lignes de discontinuité. Riemann, le premier, a remarqué que, en concevant les divers champs correspondants de cette manière aux diverses séries de valeurs de la fonction, chacun d'eux présentait bien de telles lignes de discontinuité; mais que chacun de ces champs devait nécessairement se raccorder en formant la continuité avec un autre le long d'une de ces lignes, et que l'on pouvait ainsi obtenir un champ entièrement continu, composé de plusieurs couches superposées et connexes, et comprenant la totalité des valeurs de la fonction. Cette remarque a été, sans doute, un trait de génie; mais nous ne porterons pas atteinte à la sagacité de l'illustre novateur, en affirmant que son admirable invention ne pouvait plus se faire longtemps attendre, du jour où l'on commencerait à pénétrer au fond des idées de Cauchy. Ce qui frappe le plus, en effet, dans cette découverte, ce n'est pas tant la conception primitive que la sûreté avec laquelle Riemann s'en rend maître, et en dévoile, du premier coup, la puissance et la fécondité, par la construction de l'édifice colossal et majestueux que quelques instants lui ont suffi pour élever. »

Indiquons maintenant rapidement le contenu des divers Chapitres de la seconde Partie du volume, où l'auteur entre dans l'exposition de la théorie.

Cette Partie est divisée en quatre Sections, comprenant chacune plusieurs Chapitres.

SECTION I. Opérations arithmétiques et formules simples correspondantes.

CHAPITRE I. *Opérations arithmétiques. Extension de l'idée de nombre, et, par suite aussi, des opérations. Continuité.*

CHAPITRE II. *Représentation géométrique des nombres, et constructions correspondantes aux opérations arithmétiques.* — L'auteur y donne une démonstration très-précise et très-complète du célèbre théorème de Jacobi, sur l'impossibilité de l'existence d'une fonction monodrome d'une seule variable, ayant plus de deux périodes. Le Chapitre se termine par une exposition de la représentation sur la sphère des valeurs d'une variable complexe, suivant la méthode indiquée par Riemann, dans ses leçons orales, et publiée par Neumann (*Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*).

CHAPITRE III. *Conventions particulières pour e^z et lz.*

SECTION II. Idée de fonction et distinctions fondamentales qui s'y rapportent.

CHAPITRE I. *Fonctions réelles d'une variable réelle.* — L'auteur y traite avec détail des diverses espèces de discontinuité, qui avaient déjà été distinguées par M. Neumann (*). Seulement, M. Casorati ne classe pas parmi les discontinuités les valeurs infinies que M. Neumann désigne sous le nom de *discontinuités polaires*, les valeurs réciproques de la fonction étant continues, et les infinis pouvant disparaître au moyen d'une transformation homographique analogue à celle qui changerait toutes les sections coniques en ellipses.

CHAPITRE II. *Fonctions réelles de plusieurs variables réelles.*

CHAPITRE III. *Fonctions complexes de variables réelles.*

CHAPITRE IV. *Fonctions d'une variable complexe.* — Une fonction de $z = x + yi$ est une fonction dont la valeur ne dépend que de celle du binôme $x + yi$, et qui ne changerait pas si l'on remplaçait les va-

(*) *Voyez* aussi NATANI, *Die hohere Analysis, besonders abgedruckt aus dem Matematischen Worterbuche*, p. 462.

leurs réelles de x et de y par des valeurs complexes quelconques, pourvu que le binôme $x + yi$ restât invariable. Une telle fonction w a une dérivée déterminée par rapport à z. Elle satisfait à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{i}\frac{dw}{dy};$$

et si l'on pose $w = u + vi$, u et v étant réels, chacune de ces dernières quantités satisfait à l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{d^2\omega}{dy^2} = 0.$$

Cette question est traitée avec beaucoup de détails particuliers à l'auteur, et qui jettent un grand jour sur cette question délicate.

Chapitre V. *Interprétations géométriques de la condition renfermée dans l'idée de fonction d'une variable entièrement indépendante. Recherches géométriques relatives à certaines fonctions particulières.* — Après avoir exposé l'interprétation géométrique des conditions

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \quad \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx},$$

telle qu'on la retrouve dans l'Ouvrage de MM. Briot et Bouquet (*), l'auteur s'occupe de celle qui a été donnée par Gauss, et qui consiste en ce que les réseaux infinitésimaux qui représentent les valeurs correspondantes de la variable et de la fonction sont composés d'éléments semblables chacun à chacun. Discussion de la représentation des fonctions z^2, z^n, e^z, $\sin z$, $\sin \operatorname{am} z$ et de leurs fonctions inverses.

SECTION III. Revue des expressions analytiques.

Chapitre I. *Classification.* — Distinction des fonctions en algébriques et transcendantes, monodromes et polydromes, etc.

Chapitre II. *Séries.* — Influence de l'ordre des termes d'une série. Opérations rationnelles sur les séries; différentiation, intégration. Séries ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une va-

---

(*) *Théorie des Fonctions doublement périodiques et en particulier des Fonctions elliptiques*, p. 8. In-8; 1859. Librairie Gauthier-Villras (*rare*).

riable; cercle de convergence. Séries contenant des puissances négatives. Séries simples ou doubles, à périodicité simple ou double. Influence du groupement des termes d'une série double. Étude des séries Θ, simples ou multiples. Cette étude, fondée sur une application de la série de Fourier, et présentée par l'auteur avec une remarquable simplicité, semble destinée à entrer, tôt ou tard, dans les Traités d'Algèbre, à la suite de la théorie des fonctions exponentielles et circulaires.

Chapitre III. *Produits infinis.* — La théorie de ces produits, tant simples que multiples, est traitée d'une manière analogue à la théorie des séries infinies.

Chapitre IV. *Intégrales.* — Ce Chapitre renferme l'exposé des découvertes capitales de Cauchy. L'auteur développe avec beaucoup de soin l'idée d'intégration le long d'un contour donné. Le théorème fondamental relatif à l'intégration d'une différentielle exacte

$$u\,dx + v\,dy$$

le long d'un contour fermé est démontré de deux manières différentes: d'abord par la méthode de Cauchy, reproduite par les auteurs français; puis par la méthode de Riemann, fondée sur des considérations analogues à celles que Gauss avait employées dans son Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes. Examen des intégrales des fonctions $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2+1}$, $\frac{1}{(z-\gamma)^{n+1}}$.

SECTION IV. Analyse des manières dont les fonctions peuvent se comporter, dans l'hypothèse de la monodromie, autour des diverses valeurs de la variable.

Chapitre I. *Comment une fonction se comporte autour d'une valeur de la variable pour laquelle elle est monodrome, continue et finie.* — Démonstration de la formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(x)\,dx}{x - z}.$$

Théorème de Cauchy sur le développement d'une fonction monodrome, continue et finie suivant les puissances entières et positives de $z - \gamma$. Conséquences. Indices d'ordre des zéros.

CHAPITRE II. *Comment une fonction se comporte autour d'une valeur de la variable pour laquelle elle est monodrome, continue et infinie* (dans le sens indiqué au Chapitre I de la Section II). — Détermination d'une fonction rationnelle, infinie de la même manière que la fonction proposée. Indices d'ordre des infinis. Expression de l'indice d'un point au moyen de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int dlw$.

CHAPITRE III. *Comment une fonction se comporte autour d'une valeur de la variable pour laquelle, isolément, elle est discontinue.* — Théorème de Laurent. Propriétés des fonctions fondées sur la distinction des discontinuités en séparées et non séparées des infinis.

CHAPITRE IV. *Examen des manières dont une fonction peut se comporter pour la valeur* ∞ *de la variable, en supposant qu'autour de cette valeur elle doive être monodrome et continue.* — L'auteur emploie la représentation sur la sphère de Riemann, considérée comme résultant de la déformation du plan. Il introduit le plan antipode, dont l'idée est due à M. Neumann, et qui correspond au changement de la variable z en $\frac{1}{z}$.

CHAPITRE V. *Comment se comportent, autour de chaque valeur de la variable, la dérivée et l'intégrale d'une fonction, par comparaison avec la fonction elle-même.*

Ces indications, nécessairement incomplètes, ne peuvent donner qu'une idée bien imparfaite de la richesse des matières contenues dans le volume de M. Casorati. Tous ceux qui liront cet Ouvrage désireront, comme nous, avec impatience, que le savant professeur nous donne bientôt la suite, qui doit traiter des parties plus élevées de la théorie qu'il a si bien approfondie, et qu'il expose avec tant de lucidité.

J. HOÜEL.