Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 1 (1870), p. 73-87

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1870__1__73_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

PLUECKER (J.). — NEUE GEOMETRIE DES RAUMES, GEGRÜNDET AUF DIE BETRACHTUNG DER GERADEN LINIE ALS RAUMELEMENT. I Abth., 1868. II Abth. (herausg. von F. KLEIN), 1869. — Leipzig, Teubner. Prix : 5 thlr.

Dans les derniers temps de sa vie, Plücker avait repris ses recherches de Géométrie abandonnées depuis près de trente ans. Un Mémoire inséré aux *Transactions philosophiques* pour 1865, et qui a été traduit en français (*), pose les fondements d'une doctrine nouvelle dont le développement promet de conduire à d'importantes découvertes. L'impression d'un Ouvrage qui devait résumer ses travaux relatifs à la « Nouvelle Géométrie de l'espace » était commencée sous les yeux de l'auteur, quand la mort vint le surprendre, comme Archimède, au milieu de ses calculs. L'éditeur a fait paraître la première Partie de l'Ouvrage avec une préface de M. Clebsch ; la seconde Partie, achevée par M. Félix Klein, le collaborateur de Plücker et le confident de ses desseins, vient d'être mise en vente également. Quelques-uns des résultats contenus dans la première Partie avaient été déjà établis par M. Battaglini (**) en 1866 ; de son côté, M. Klein a développé les théories de Plücker, par les méthodes beaucoup plus élégantes de l'Algèbre supérieure, dans une Thèse et dans deux Notes insérées aux *Mathematische Annalen* (***). Nous allons essayer d'indiquer brièvement le point de départ de ces recherches et de donner une idée de leur portée.

L'équation

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 1$$

est celle d'un plan (ξ, η, ζ), considéré comme lieu géométrique des points (x, y, z), ou bien celle d'un point (x, y, z), considéré comme pivot des plans (ξ, η, ζ). Un point est donc déterminé par trois coordonnées x, y, z, un plan par trois coordonnées ξ, η, ζ. Une ligne droite serait complétement déterminée par quatre constantes ou coordonnées, mais l'on obtient des formules plus symétriques en intro-

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XI.

(**) *Atti della R. Acc. di Napoli*, t. III.

(***) *Math. Ann.*, t. II, p. 198 et 371.

duisant six coordonnées liées par une équation homogène, et qui n'entrent dans les équations de la droite que par leurs rapports.

Ces six coordonnées peuvent d'ailleurs être choisies de deux manières différentes, selon qu'on voudra définir la droite comme *rayon*, c'est-à-dire comme lieu géométrique des points (x, y, z), ou bien comme *axe*, c'est-à-dire comme intersection des plans (ξ, η, ζ).

Plücker prend pour *coordonnées radiales* de la droite les six quantités

$$X = x - x', \qquad Y = y - y', \qquad Z = z - z',$$
$$L = yz' - zy', \quad M = zx' - xz', \quad N = xy' - yx'.$$

Les trois premières sont les projections de la distance

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

de deux points de la droite; les trois dernières sont les projections de l'aire

$$S = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

qui représente le double du triangle formé par les deux points et par l'origine. On a

$$XL + YM + ZN = 0, \tag{1}$$

et les équations

$$Yz - Zy = L, \quad Zx - Xz = M, \quad Xy - Yx = N$$

sont celles des trois projections d'un rayon. Les rapports

$$\frac{X}{R}, \ \frac{Y}{R}, \ \frac{Z}{R}, \ \frac{L}{S}, \ \frac{M}{S}, \ \frac{N}{S},$$

déterminent la direction du rayon et son plan, c'est-à-dire le plan passant par l'origine qui le renferme; le rapport

$$r = \frac{S}{R}$$

donne la distance du rayon à l'origine. Si R représente une force, S sera le moment de cette force. Les valeurs absolues des composantes X, Y, Z, L, M, N la déterminent dans l'espace; ce sont les *six coordonnées radiales d'une force,* et elles représentent cinq constantes à cause de la relation (1). Si l'on supprimait cette relation, les six coordonnées deviendraient indépendantes. Les trois premières (X, Y, Z) donneraient la direction et l'intensité d'une force, les trois autres (L, M, N) l'axe et le moment d'un couple ; on pourrait donc les appeler les *six coordonnées d'un dyname*, en entendant par ce mot la cause qui produit le mouvement d'un système rigide.

Les *coordonnées axiales* d'une droite sont les six quantités $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, qu'on obtient en écrivant ξ, η, ζ à la place de x, y, z dans les expressions des coordonnées radiales. Elles satisfont à la relation homogène

$$(2) \qquad \mathfrak{X}\mathfrak{L} + \mathfrak{Y}\mathfrak{M} + \mathfrak{Z}\mathfrak{N} = 0,$$

et les trois équations

$$\mathfrak{Y}\zeta - \mathfrak{Z}\eta = \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{Z}\xi - \mathfrak{X}\zeta = \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{X}\eta - \mathfrak{Y}\xi = \mathfrak{N}$$

sont celles des points d'intersection d'un axe avec les plans coordonnés. En désignant encore par $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ les quantités analogues à R, S, on trouve, pour la même droite,

$$\frac{X}{\mathfrak{L}} = \frac{Y}{\mathfrak{M}} = \frac{Z}{\mathfrak{N}} = \frac{R}{\mathfrak{S}} = \frac{L}{\mathfrak{X}} = \frac{M}{\mathfrak{Y}} = \frac{N}{\mathfrak{Z}} = \frac{S}{\mathfrak{R}}.$$

Les six coordonnées axiales, multipliées par un certain facteur, déterminent une rotation. Si l'on supprime la relation (2), elles représentent les *six coordonnées d'un mouvement*, car elles déterminent alors une rotation autour d'un certain axe et une translation parallèle à un autre axe.

Toutes ces formules deviennent encore plus symétriques par l'introduction des coordonnées homogènes ou tétraédriques du point et du plan. Soit donc

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 + x_4\xi_4 = 0$$

l'équation d'un plan $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, ou celle d'un point (x_1, x_2, x_3, x_4). Les coordonnés radiales d'une droite seront les six déterminants

$$X_{\alpha\beta} = x_\alpha x'_\beta - x_\beta x'_\alpha,$$

qui satisfont à la relation

$$(3) \qquad X_{12}X_{34} + X_{13}X_{42} + X_{14}X_{23} = 0,$$

et la droite sera représentée par quatre équations de la forme

$$x_1 X_{23} + x_2 X_{31} + x_3 X_{12} = 0.$$

On obtiendra les coordonnées et les équations axiales en écrivant partout ξ pour x, et l'on aura généralement

$$X_{\alpha\beta}\mathfrak{X}_{\alpha\beta} = X_{\gamma\delta}\mathfrak{X}_{\gamma\delta},$$

ou bien

$$X_{\alpha\beta} = k.\mathfrak{X}_{\gamma\delta}, \tag{4}$$

en désignant par k une constante et en associant les indices $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ comme dans l'équation (3).

Considérons maintenant une équation $f = 0$, dont les variables soient les six coordonnées radiales $X_{\alpha\beta}$; elle représente ce que Plücker appelle un faisceau ou *complexe de dynames*. Si les X satisfont à la condition (3), l'équation $f = 0$ est celle d'un *complexe de forces*; si, de plus, f est une fonction homogène des X, l'équation $f = 0$ représente un *complexe de rayons*. Si nous remplaçons les coordonnées radiales par les coordonnées axiales, nous avons des *complexes de mouvements, de rotations simples* et *d'axes*.

Il est clair d'ailleurs que, dans l'équation homogène $f = 0$, on peut écrire les X à la place des $\mathfrak{X}$, ou *vice versâ*, à cause de la relation (4). On prévoit aussi que les coordonnées absolues d'un dyname pourront remplacer celles du mouvement dont il est la cause, puisqu'il y a proportionnalité entre la cause et l'effet; on pourra confondre le dyname et le mouvement. « Ainsi, dit Plücker, dans la ligne droite se résout la réciprocité du point et du plan, dans le dyname la réciprocité des forces et des rotations. Un complexe de droites peut se mettre en équation de deux manières, un complexe de dynames également. Les propriétés des deux espèces de complexes offrent une dualité analogue. »

On peut encore supposer que l'équation $f = 0$ soit homogène, mais que la condition (3) ne soit pas remplie. « Dans ce cas, dit Plücker, on se trouve en présence de lieux géométriques qui sont aux dynames ce que les lignes droites sont aux forces et aux rotations. » On s'assure facilement que l'équation $f = 0$ représente alors des complexes d'axes principaux.

Le degré d'un complexe est celui de son équation. Les coordonnées $X_{\alpha\beta}$, qui y figurent comme variables, peuvent être considérées comme des fonctions linéaires des coordonnées x_α, x' de deux points. Par conséquent, si l'un de ces points est donné, l'équation $f = 0$ représente un faisceau de droites, ou un *cône de degré n*, dont le sommet se trouve au point donné. En coordonnées axiales, elle représente une *courbe de la classe n*, située dans un plan donné. Les lignes droites appartenant à un complexe peuvent donc être groupées de deux manières : par cônes émanant de tous les points de l'espace, et par tangentes enveloppant une courbe dans tous les plans de l'espace.

Les droites communes à deux complexes forment une *congruence ;* celles qui appartiennent à trois complexes forment une surface réglée. Quatre complexes déterminent un nombre fini de droites dans l'espace. Les complexes de droites réalisent donc une Géométrie à quatre dimensions. On s'élève à six dimensions par la considération des dynames.

Plücker n'a élaboré que la théorie des complexes du premier et du second degré. Ceux du premier degré s'appellent *complexes linéaires.*

Toutes les droites d'un complexe linéaire qui passent par un point donné sont dans un plan, et toutes celles qui tombent dans ce plan se coupent en ce point. Chaque point de l'espace a donc son plan coordonné, et réciproquement. La ligne qui joint deux points, et l'intersection de leurs plans coordonnés, forment un couple de *polaires conjuguées.* Lorsqu'un plan tourne autour d'un axe, le point coordonné décrit un rayon qui est la polaire conjuguée de l'axe, et cette relation des deux droites est réciproque. Toute droite qui rencontre deux polaires conjuguées fait partie du complexe.

Un complexe linéaire est déterminé par cinq de ses droites, ou par une droite et deux polaires conjuguées. Les deux droites qui rencontrent quatre droites du complexe sont toujours deux polaires conjuguées.

Les points coordonnés à des plans parallèles forment une ligne droite que Plücker appelle le *diamètre du complexe.* Tous les diamètres du même complexe sont parallèles entre eux. Il y en a toujours un qui est perpendiculaire à ses plans : c'est l'*axe du complexe,* et ses plans s'appellent *sections principales.* Si nous prenons cet axe pour axe des z, l'équation du complexe ne renferme plus qu'une seule constante, le paramètre k; elle devient

$$\mathrm{N} + k\mathrm{Z} = 0, \quad \text{ou bien} \quad \mathcal{Z} + k\mathcal{N} = 0.$$

Un complexe linéaire n'est point altéré par une translation parallèle à son axe, ni par une rotation autour de cet axe. Le rapport de la composante Z d'une force dirigée suivant un rayon du complexe, au moment N de cette force par rapport à l'axe du complexe, est constant.

Un complexe linéaire peut être envisagé comme la réunion des tangentes menées à des hélices qui entourent l'axe du complexe. Le complexe est *droit* ou *gauche*, selon que le paramètre est positif ou négatif. Le plan coordonné à un point est un plan osculateur de l'hélice qui passe par ce point.

Dans une congruence linéaire, qui est, pour ainsi dire, l'intersection de deux complexes linéaires, chaque point de l'espace a sa droite *adjointe* qui le traverse (c'est l'intersection de ses deux plans coordonnés). Chaque plan renferme deux points qui lui sont coordonnés, et la droite qui les joint est la droite adjointe à ce plan. Ces relations définissent la congruence linéaire. On peut encore la définir : l'ensemble de toutes les droites qui coupent deux droites données (les *directrices* de la congruence). La droite adjointe à un plan est donc celle qui joint les points d'intersection de ce plan et des deux directrices.

Une congruence est déterminée par quatre de ses droites. Deux polaires conjuguées d'un complexe sont les directrices d'une congruence qui appartient à ce complexe. Les deux directrices d'une congruence sont deux polaires conjuguées de chacun des complexes dont cette congruence fait partie.

Trois complexes linéaires déterminent une surface du second ordre et de la deuxième classe. Plücker fait voir que toutes les propriétés de ces surfaces peuvent être déduites de la discussion des trois équations linéaires qui représentent trois complexes.

Les complexes du second degré donnent lieu à des théorèmes analogues.

Chaque plan de l'espace renferme une courbe de la deuxième classe, appartenant au complexe donné.

Un plan étant transporté parallèlement à lui-même, sa courbe décrit une *surface équatoriale ;* s'il tourne autour d'un axe, sa courbe décrit une surface *méridienne ;* ces surfaces sont du quatrième ordre et de la quatrième classe. Les courbes génératrices s'appellent respectivement *parallèles* et *méridiens* de la surface qu'elles engendrent.

Les centres des parallèles d'une surface équatoriale sont situés sur une droite : c'est le *diamètre* de la surface. Les pôles de l'axe d'une surface méridienne, pris par rapport aux méridiens successifs, forment aussi une droite, la *polaire* de la surface. Chaque point de l'axe d'une surface méridienne est d'ailleurs le sommet d'un cône du complexe qui enveloppe cette surface. Les plans polaires de l'axe, pris par rapport à tous ces cônes, enveloppent la polaire de la surface méridienne. Une surface équatoriale est enveloppée par une infinité de cylindres parallèles au plan dont le mouvement engendre la surface en question.

Le diamètre d'une surface équatoriale est un diamètre du complexe; on l'appelle *axe du complexe*, s'il est perpendiculaire au plan qui engendre la surface. Un complexe du second degré a trois axes rectangulaires, qui sont parallèles aux axes d'une surface de la deuxième classe dont le centre et les dimensions restent indéterminés; Plücker l'appelle la *caractéristique* du complexe. A trois diamètres conjugués de la caractéristique correspondent trois diamètres conjugués du complexe, qui sont parallèles aux premiers, mais qui généralement ne se coupent pas. Les complexes du second degré ont, en général, un centre. Dans certains cas, ils enveloppent une surface du second degré.

Dans un complexe du second degré, à chaque plan correspond un point, qui est le *pôle* de ce plan, et à chaque point un plan, qui est le *plan polaire* de ce point. Cette correspondance est réciproque, si le complexe enveloppe une surface du second degré.

Plücker appelle *point singulier* du complexe un point dont le cône se réduit à deux plans, et *plan singulier* un plan dont la courbe se réduit à deux points. La ligne d'intersection des deux plans et la ligne de jonction des deux points sont des *droites singulières* du complexe. Les points singuliers d'un complexe du second degré forment une surface du quatrième ordre et de la quatrième classe, qu'enveloppent les plans singuliers, et qui possède 16 points doubles et 16 plans doubles.

Nous ne suivrons pas l'auteur dans la discussion des cas particuliers qui peuvent se présenter, ni dans sa classification des surfaces appartenant aux complexes du second degré. Il fait voir qu'il est facile de construire ces surfaces de manière à en avoir l'intuition géométrique. M. Epkens a fait, sous la direction de Plücker, de nombreux modèles de surfaces de ce genre.

Ce qui précède suffira pour donner au lecteur une idée des résultats auxquels conduit la méthode du géomètre allemand. M. Félix Klein, à qui nous devons la publication de la seconde Partie de l'Ouvrage, achevée par lui à l'aide de ses souvenirs, a déjà consacré à la théorie des complexes plusieurs Mémoires, où il traite le sujet à un point de vue nouveau. Il suppose que l'équation de condition (3), à laquelle satisfont les coordonnées d'un complexe de droites, a été transformée par une substitution linéaire de telle manière qu'elle ne renferme plus que les carrés des nouvelles variables :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Les équations $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... sont alors celles de six complexes linéaires, que M. Klein appelle les *complexes fondamentaux*, et dont deux quelconques sont « en involution ». L'équation d'un complexe du second degré, étant transformée à l'aide des mêmes variables, devient

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \ldots + k_6 x_6^2 = 0.$$

C'est en discutant ces formes canoniques de l'équation du complexe et de l'équation de condition que M. Klein arrive à une série de théorèmes très-intéressants sur les surfaces de Kummer (surfaces du quatrième ordre, qui sont ici formées par les points singuliers d'un complexe du second degré).

Nous nous arrêtons là, pour ne pas dépasser les limites imposées à un compte rendu sommaire. Il est fort possible que les nouvelles théories que Plücker a léguées à ses successeurs conduisent un jour à des applications d'une grande importance. Il en a déjà indiqué une, en traitant par la méthode des complexes la double réfraction d'un faisceau lumineux dans un cristal.

R. Radau.

BALTZER (Dr Richard), Professor am städtischen Gymnasium zu Dresden, Mitglied der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. — Die Elemente der Mathematik. Erster Band : *Gemeine Arithmetik, Allgemeine Arithmetik, Algebra.* — Dritte verbesserte Auflage. In-8°; 1868. Leipzig, Verlag von S. Hirzel (*).

Le succès de ces Éléments, dans un pays où les traités classiques ne manquent pas plus que chez nous, et où la concurrence n'est pas

(*) *Éléments de Mathématiques,* par le Dr R. Baltzer, professeur au Gymnase de la Ville à Dresde, Membre de la Société royale des Sciences de Saxe à Leipzig (actuellement professeur à l'Université de Giessen). Tome Ier : *Arithmétique élémentaire, Arithmétique générale, Algèbre.* 3e édit., revue et corrigée. Leipzig, chez S. Hirzel ; 1868. In-8°.

entravée par des programmes uniformes, est une preuve de la haute valeur de cet Ouvrage, dont la première édition a paru en 1860, et que M. Cremona a traduit en 1865 pour l'usage des écoles publiques de l'Italie.

Nous avons déjà rendu compte, dans un autre Recueil (*), des Éléments de Géométrie, qui forment la seconde Partie du cours de M. Baltzer, et dont la seconde édition a été imprimée en 1867. Il nous reste à parler avec détail de la première Partie.

En parcourant la Table des matières de ce mince volume de 289 pages, on est tenté de croire qu'on n'y rencontrera qu'un simple recueil d'énoncés. En lisant l'Ouvrage, on est surpris d'y trouver, sous une forme concise, mais claire et complète, les démonstrations et les développements de tant de théories diverses, dont un autre auteur aurait pu remplir plusieurs gros volumes.

Comme nous l'avons fait remarquer ailleurs, ce livre n'est point destiné aux personnes qui veulent étudier sans maître, et qui ont besoin d'une exposition beaucoup plus détaillée et ne laissant rien à deviner. Mais s'il s'agit d'un précis à mettre entre les mains des jeunes gens qui suivent les leçons d'un professeur, le cadre adopté par M. Baltzer nous semble réunir au plus haut degré toutes les conditions désirables. Nous nous permettrons d'insister d'autant plus sur ce point, que les livres élémentaires qui se publient dans notre pays semblent s'éloigner de plus en plus de cet idéal, les auteurs cherchant à dissimuler la banalité du fond par la surcharge des accessoires; d'où il résulte ce double inconvénient, de ne point s'adapter à la méthode d'enseignement d'un autre professeur, et d'empêcher les élèves de chercher par eux-mêmes, en leur présentant, qu'on nous passe le mot, la besogne toute mâchée (**). Le livre de M. Baltzer, au contraire, ne donnant que le résumé des démonstrations, laisse le professeur libre de les développer à sa guise, et ses sommaires sont

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. II, p. 124-132.

(**) Nous ne saurions trop recommander aux professeurs un Ouvrage peu connu en France et conçu dans le même esprit que le cours de M. Baltzer :

J. H. VAN SWINDEN'S *Elemente der Geometrie*, aus dem Holländischen übersetzt und vermehrt, von C. F. A. JACOBI, Professor an der Landesschule Pforta. Iena, Fr. Frommann; 1834. In-8°.

Ce livre est précieux par le grand nombre d'énoncés de problèmes qu'y a joint le traducteur.

cependant assez étendus pour que l'élève y trouve la substance des leçons, avec des exemples bien choisis pour la fixer dans l'esprit.

Un des principaux mérites qui distinguent les Ouvrages de M. Baltzer, c'est l'érudition aussi sûre qu'étendue dont il fait preuve dans les courtes notes placées au bas des pages, et indiquant l'origine de chaque proposition et de chaque dénomination. L'ensemble de ces notes forme un précieux résumé de l'histoire des Mathématiques élémentaires.

Le Volume, comme l'indique le titre, se divise en trois Livres, subdivisés eux-mêmes en Paragraphes, et dont nous allons faire connaître brièvement le contenu.

LIVRE I. — *Arithmétique élémentaire* (p. 3-58).

§§ 1, 2, 3. Les quatre opérations fondamentales. — Nous y trouvons entre autres cette indication, de commencer la multiplication par la gauche du multiplicateur, ce qui est très-commode pour la pratique de la multiplication abrégée.

§ 4. Calcul des mesures exprimées en fractions duodécimales. Calcul du temps.

§ 5. Proportionnalité des nombres.

§ 6. Règles de trois, d'intérêts, etc.

§ 7. Propriétés élémentaires des nombres entiers : Divisibilité, nombres premiers, etc.

§§ 8-11. Opérations sur les fractions ordinaires.

§ 12. Règle de trois avec des fractions et des mesures duodécimales. — La complication de ces calculs est de nature à faire désirer l'établissement universel du système métrique décimal.

§ 13. Partages proportionnels, règles d'alliage, etc. (*Voir* ci-après, Livre III, § 1.)

§§ 14-17. Opérations sur les fractions décimales.

§ 18. Calculs d'approximation; opérations abrégées.

LIVRE II. — *Arithmétique générale* (p. 61-197).

§ 1. Préliminaires : Définitions et notations.

§§ 2-4. Opérations directes (addition, multiplication, élévation aux puissances). — A partir d'ici, l'auteur indique, pour chaque Paragraphe, les exercices correspondants du Recueil de HEIS (*).

§ 5. Opérations inverses

§ 6. Formules.

§ 7. Soustraction. Nombres positifs et négatifs; quantités opposées. — L'auteur laisse au professeur le soin de donner, sur la question délicate des quantités négatives, les développements nécessaires.

§§ 8-9. Addition, soustraction, multiplication des polynômes.

§§ 10-12. Division des polynômes.

§ 13. Propriétés des nombres entiers : Divisibilité, nombres premiers et composés. Combien il y a de nombres premiers à un nombre donné et moindres que lui. Résidus des puissances. Théorèmes de Fermat et d'Euler. Résidus et non-résidus quadratiques. Théorème de Wilson.

§§ 14-15. Carré et racine carrée d'un nombre décimal.

§ 16. Radicaux carrés. Nombres rationnels et irrationnels. Nombres réels, imaginaires, complexes.

§§ 17-18. Puissances et racines. Exposants négatifs et fractionnaires. Racines de l'unité; racines primitives.

§ 19. Logarithmes des divers systèmes.

§§ 20-21. Logarithmes décimaux. Construction et usage des tables. Calculs au moyen des logarithmes. Logarithmes d'addition et de soustraction. — L'auteur aurait pu indiquer la méthode très-simple de Briggs pour calculer les logarithmes décimaux, en déterminant, par de simples multiplications abrégées, le nombre des chiffres dont se compose la puissance 10^n d'un nombre donné. Il n'emploie pas la manière adoptée en France pour écrire les caractéristiques négatives et qui est cependant beaucoup plus commode que celle dont on fait usage en Allemagne. Il calcule tous ses exemples numériques au moyen des Tables de logarithmes à 4 décimales de J.-H.-T. Müller (**).

(*) *Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra*. 23te Aufl. Köln, Du Mont-Schauberg, 1869. Prix : 1 Thlr.

(**) *Vierstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen und Winkelfunctionen*. Halle,

§ 22. Progressions géométriques. Intérêts composés. Annuités.

§ 23. Formule du binôme pour un exposant entier et positif. Limite des racines d'un binôme.

§§ 24-25. Permutations, arrangements, combinaisons.

§ 26. Déterminants (*).

§ 27. Produits et puissances des polynômes.

§ 28. Nombres figurés et progressions arithmétiques.

§ 29. Notions sur le calcul des probabilités.

§ 30. Fractions continues.

§§ 31-32. Série exponentielle. Exposants imaginaires. Théorème de Moivre. Série du binôme. Série logarithmique. Influence de l'ordre des termes sur la valeur d'une série dont la convergence dépend des signes des termes.

LIVRE III. — *Algèbre* (p. 201-289).

§ 1. Proportions. Grandeurs commensurables, incommensurables. Moyenne entre des quantités données.

§ 2. Variables, fonctions. Proportionnalité. Continuité. Fonctions algébriques et transcendantes. Fonctions homogènes. Fonctions symétriques et alternées.

§ 3. Méthode analytique. Calculs, constructions.

§ 4. Équations. Identités. Équations non identiques, leurs racines. Équations transformées équivalentes. Degré d'une équation. Équations algébriques et transcendantes.

§ 5. Systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Équations déterminées et indéterminées. Résolution d'un système d'équations linéaires, déterminées ou indéterminées.

---

xiv-25 p., gr. in-8°. Il serait temps de renoncer en France à la coutume peu rationnelle d'employer dans l'enseignement des tables à sept décimales. Ce luxe de chiffres ne sert qu'à masquer les méthodes de calcul, et à faire naître l'idée fausse d'une précision que les éléments du calcul ne peuvent jamais fournir. Une table à trois décimales, sur une carte grande comme la main, remplacerait bien utilement les gros in-octavo, qui font perdre tant de temps aux élèves, et les empêchent d'apprendre à calculer.

(*) Les éléments de la théorie des déterminants font partie de tous les Traités modernes d'Algèbre edités en Allemagne, en Angleterre, en Italie.

§ 6. Équations du second degré. Maximum ou minimum d'une fonction du second degré. Réduction d'une forme quadratique. Systèmes d'équations non linéaires. Exercices sur les systèmes d'équations symétriques qui se ramènent à des équations du second degré.

§ 7. Équations du troisième et du quatrième degré. Équations réciproques. Calcul approché de la plus grande racine réelle de l'équation $x^m - x - a = 0$.

§ 8. Équations transcendantes. Résolution des équations numériques. Méthode de Newton.

§ 9. Résolution des équations indéterminées. Résolution des équations linéaires en nombres entiers. Équation de Pythagore, équation $x^y = y^x$, etc.

§ 10. Théorèmes sur les fonctions algébriques. Diviseurs d'une fonction entière. Diviseurs rationnels. Une équation du $n^{ième}$ degré a n racines. Racines multiples. Règle de Descartes. Théorèmes de Sturm et de Cauchy. Valeurs conjuguées d'une fonction algébrique. Norme d'une fonction irrationnelle. Résultante de deux fonctions entières.

J. Hoüel.

BRIOT (Ch.), professeur suppléant à la Faculté des Sciences. — Théorie mécanique de la chaleur. — In-8, avec figures dans le texte, XII-352 pages; 1869. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 7 fr. 50 c.

« La Théorie mécanique de la Chaleur date seulement d'un petit nombre d'années, mais elle s'est développée avec une telle rapidité, qu'elle constitue aujourd'hui un vaste corps de doctrines appuyé sur de nombreuses recherches expérimentales. M. Briot en donne, dans son livre, une exposition théorique; il s'est attaché à mettre en relief les principes et les hypothèses fondamentales, ainsi que les conséquences les plus importantes, sans insister sur les points de détail, sur la discussion des expériences ni sur les questions encore controversées.

» Dans un premier Chapitre, l'auteur développe les principaux théorèmes de mécanique dont on fera particulièrement usage, les propriétés générales des systèmes, la définition de l'énergie et les différentes formes sous lesquelles elle se présente dans les phénomènes. L'Ouvrage est ensuite divisé en deux Parties, dont l'une comprend la *Chaleur* proprement dite et l'autre l'*Électricité*.

» L'étude de la Chaleur repose sur deux principes, dont le premier, appelé *Principe de l'équivalence de la Chaleur et du Travail mécanique*, est la conséquence directe de l'assimilation de la chaleur à un mouvement moléculaire. Le second principe, établi d'abord par Carnot dans l'hypothèse de la matérialité du calorique, conserve toute son importance dans la nouvelle théorie ; on n'en peut pas donner une démonstration rigoureuse, parce qu'il renferme un élément, la *température*, dont on ne connaît pas les conditions mécaniques, mais on peut le considérer comme une définition de la température.

» Ces deux principes, joints aux données de l'expérience, permettent d'établir les propriétés générales des gaz et des vapeurs, le jeu des machines à feu, l'écoulement des fluides, etc.

» Jusque-là on a laissé complétement indéterminée la constitution moléculaire des corps ; une première tentative dans cette voie nouvelle a été faite par M. Clausius pour les gaz ; l'examen de cette théorie des gaz termine la première Partie de l'Ouvrage.

» L'électricité statique repose sur la notion des fluides électriques, dont les molécules obéissent à la loi de Coulomb ; tous les phénomènes deviennent des conséquences de cette loi élémentaire, et la *théorie du potentiel* donne à cette partie de la science un remarquable caractère de précision et d'élégance.

» Pour la théorie des courants électriques, il faut une nouvelle hypothèse, celle de la force électromotrice, que la plupart des physiciens attribuent aujourd'hui au simple contact de deux corps, comme l'avait énoncé Volta.

» Dans la théorie de l'Électrodynamique, on admet qu'il existe entre deux éléments de courant une force dirigée suivant la droite qui joint leurs centres, et l'expérience indique qu'elle varie en raison inverse du carré de la distance. Cette loi d'Ampère n'est pas liée à celle de Coulomb, et ne suffit pas pour expliquer les phénomènes d'induction. Il y a là une lacune que M. Weber a essayé de combler, en admettant que l'action de deux molécules électriques dépend non-seulement de leur distance, mais encore de leurs vitesses. Cette formule de Weber a l'inconvénient d'entraîner l'hypothèse de deux fluides électriques ; mais elle a l'avantage de renfermer les lois de Coulomb et d'Ampère, et de rendre compte des phénomènes d'induction. »

Les lignes précédentes, extraites du *Bulletin de l'Association scientifique,* expliquent, mieux que nous ne saurions le faire, la nature des questions traitées dans le livre de M. Briot. Cet important sujet des lois de la transformation des forces physiques est maintenant, s'il est permis d'employer ici une expression parlementaire, à l'ordre du jour. Verdet, M. Briot l'ont successivement exposé à la Faculté des Sciences ; M. Bertrand l'a pris cette année pour texte de ses leçons au Collége de France. M. Briot aura donc contribué, à la fois par son enseignement si apprécié et par son livre, à la diffusion de ces belles et récentes idées qui paraissent destinées à renouveler la Physique tout entière. Il serait superflu, d'ailleurs, de louer la forme que l'auteur a su donner à son exposition. Ceux qui nous lisent connaissent les Ouvrages élémentaires de M. Briot qui rendent tant de services aux élèves de nos Lycées ou de nos Facultés, la *Théorie des fonctions doublement périodiques* publiée en collaboration avec M. Bouquet, et l'*Essai sur la théorie mathématique de la lumière* dont l'intérêt et le succès sont attestés par la traduction récente qui vient d'en être faite en Allemagne.

G. D.