BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 1 (1870), p. 41-59

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1870__1__41_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

BERTRAND (J.), membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collége de France. — TRAITÉ DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL. *Calcul intégral. Intégrales définies et indéfinies.* — In 4°, XII-725 pages ; 1870. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 30 francs.

« Ce Volume, qui fait suite au *Traité de Calcul différentiel,* publié il y a six ans déjà, en 1864, contient la première Section du Calcul intégral. Les intégrales définies et indéfinies y sont étudiées avec le développement que m'a paru comporter, sur ce sujet presque illimité, un livre qui, pour les géomètres, doit rester l'exposition élémentaire des principes. Mon intention, en effet, je tiens à le répéter, n'est pas de remplacer, par la lecture attentive d'un seul ouvrage, l'étude laborieuse des œuvres originales qui ont créé la science : une telle tâche, heureusement, serait impossible. Si je puis enseigner à ceux qui me prendront pour guide ce que j'appellerais volontiers la *Grammaire* et la langue des hautes Mathématiques, et accroître, loin de le diminuer, le nombre des lecteurs des Lagrange, des Gauss, des Abel, des Jacobi et des Cauchy, j'aurai rendu à la science un service très-modeste, mais de réelle importance. »

Ces quelques lignes, qui forment le début de l'Avertissement placé au commencement du Volume, indiquent, avec toute la netteté possible, le but que s'est proposé M. Bertrand. Tous les géomètres connaissent d'ailleurs et ont soigneusement étudié le Calcul différentiel dont la première édition est maintenant épuisée. Tandis que ce premier Volume amenait, comme le désirait l'auteur, les jeunes géomètres à l'étude des Mémoires originaux écrits par les maîtres de la science, il fournissait aux savants déjà exercés la première idée de remarquables travaux sur des points importants mis pour la première fois en lumière et développés avec la plus grande simplicité. Le Calcul intégral n'aura pas une influence moins heureuse, nous l'espérons, sur le progrès des études ; il était attendu avec impatience, et l'accueil qu'il recevra du public récompensera M. Bertrand du travail considérable qu'il a dû s'imposer pour la publication d'une œuvre aussi importante, et qui, dans l'état actuel de la science, paraissait presque au-dessus des forces d'une seule personne.

Avant d'entrer dans l'examen des différents Chapitres, disons quelques mots de la méthode qui nous paraît avoir été suivie dans l'exposition de ces théories si diverses et souvent si peu directes du Calcul intégral. Dès les premières pages, le lecteur appréciera sans doute l'ordonnance parfaite qui règne dans les différentes parties de l'exposition. Les géomètres très-habiles pourront, peut-être, désirer des démonstrations plus complètes et plus développées sur quelques points; l'essentiel, à nos yeux, c'est que les objections auxquelles peut prêter une démonstration généralement admise, les cas particuliers dans lesquels elle peut n'avoir aucune valeur soient indiqués avec précision, et c'est ce que ne manque jamais de faire M. Bertrand. Les jeunes étudiants, surtout, devront lui être reconnaissants de cette méthode par laquelle, sans les induire en erreur, on leur épargne ce que la science a de plus ardu et de moins intéressant, tout en leur donnant les moyens de continuer leurs études, et de lire avec fruit les Mémoires les plus difficiles, où les différentes questions sont traitées de la manière la plus complète et la plus détaillée.

Grâce aux limites imposées au développement des différents sujets, le livre, tout en étant suffisamment complet, se lit sans fatigue; chaque Chapitre et presque chaque page contiennent d'importantes démonstrations, propres à exciter vivement l'intérêt et présentées avec la clarté que connaissent les lecteurs et les élèves de M. Bertrand. C'est ainsi que nous avons réussi, pour la première fois, à bien comprendre le système nouveau et si difficile de représentation de Riemann. L'exposition rapide qu'en fait M. Bertrand aura le mérite, si la méthode de Riemann n'est pas abandonnée, de conduire plusieurs géomètres à l'étude des beaux Mémoires écrits par ce savant, dont la science entière déplore la mort prématurée et qui paraît avoir été aussi remarquable par les qualités aimables du cœur que par la distinction de son esprit (*).

L'Ouvrage se compose de trois Livres principaux dont nous allons indiquer rapidement le contenu.

LIVRE I. Intégrales définies et indéfinies.

CHAPITRE I^{er}. *Diverses méthodes pour l'intégration des différentielles.*

Préliminaires. Le § IV traite de quelques sommations réduites à

(*) Voir B. RIEMANN, *Équations aux dérivées partielles publiées par K. Hattendorf*, *Préface*, et *Notice sur Riemann* dans les *Actes de la Société de Göttingue.*

des intégrales, par exemple la somme

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

lorsque n croît indéfiniment. Fonctions hyperboliques.

Chapitre II. *Intégration des fractions rationnelles.*

Chapitre III. *Intégration des différentielles algébriques irrationnelles.*

C'est à la fin de ce Chapitre qu'est traitée la réduction des intégrales elliptiques à la forme normale. Cette disposition offre l'avantage de dégager et de simplifier à l'avance la théorie des fonctions elliptiques. La méthode de réduction employée est celle qui résulte de la *transformation linéaire* de la forme

$$y=\frac{\alpha x+\beta}{\alpha' x'+\beta'}.$$

L'auteur termine par l'examen de quelques intégrales se ramenant aux intégrales elliptiques.

Chapitre IV. *Intégration des fonctions trigonométriques et exponentielles.*

Chapitre V. *Sur l'impossibilité de certaines intégrations.*

Cet important Chapitre contient le résumé des travaux d'Abel et de M. Liouville sur l'impossibilité de certaines intégrations. L'étude de ces travaux est justifiée par leur intérêt propre, l'ordre d'idées suivi l'amenait d'ailleurs d'une manière nécessaire. Après avoir exposé les différentes méthodes d'intégration, après avoir montré qu'elles ne réussissent que dans un nombre restreint de cas, il était bon d'expliquer que certaines intégrations sont tout à fait impossibles avec le nombre limité de *signes de fonctions* adoptés par les géomètres. Le Chapitre contient l'exposé des démonstrations de M. Liouville, au moins dans les cas les plus simples, et se termine par une application de la méthode d'Abel au cas où l'intégrale $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$ contient un seul logarithme.

Chapitre VI. *Calcul direct des intégrales définies.*

Chapitre VII. *Emploi des séries dans le calcul des intégrales définies.*

On trouvera, à la fin de ce Chapitre, quelques formules très-générales dues à Poisson, Abel, Jacobi, Kummer, et contenant des fonctions arbitraires. Ces formules, néanmoins, sont soumises à quelques restrictions qui sont soigneusement indiquées. Toutefois la formule suivante

$$\int_0^\pi \varphi^{(i)}(\cos x)\sin^{2i} x\,dx = 3.5\ldots(2i-1)\int_0^\pi \varphi(\cos x)\cos ix\,dx$$

est vraie dans tous les cas, comme cela résulte de la seconde démonstration donnée p. 174.

CHAPITRE VIII. *Différentiation et intégration sous le signe* $\int$. *Application au calcul des intégrales définies.*

CHAPITRE IX. *Intégrales définies obtenues par des méthodes diverses.*

Théorème de Cauchy. Formules de Frullani, de Fourier. Intégrale de Dirichlet $\int \frac{\sin nx}{\sin x}\varphi(x)\,dx$, lorsque n croît indéfiniment.

Ces quatre derniers Chapitres forment un recueil bien complet d'intégrales définies, dans lequel les recherches sont facilitées par une division méthodique et par la Table analytique placée à la fin de l'Ouvrage.

CHAPITRE X. *Intégrales eulériennes.*

Théorie développée des intégrales eulériennes de première et de seconde espèce.

Définition. Formule d'Euler. Évaluation de $\Gamma(x)$ pour x très-grand. Expression $\Gamma(n)$ sous forme de produit infini. Développement de $l\Gamma(n+1)$ en série. Calcul numérique des intégrales eulériennes. Étude de la fonction $\psi(x) = \frac{dl\Gamma(x)}{dx}$. Application au calcul des probabilités. Intégrales eulériennes de première espèce. Tables d'intégrales eulériennes.

Ce Chapitre contient, on le voit, un ensemble de propositions de la plus grande importance. On y retrouvera avec plaisir une très-ingénieuse démonstration de Gauss, pour calculer la fonction $\psi(x)$, lorsque x est commensurable.

CHAPITRE XI. *Intégrales prises entre des limites imaginaires.*

C'est à Cauchy, on le sait, que revient l'immortel honneur d'avoir créé cette théorie des intégrales à limites imaginaires, destinée à renouveler le Calcul intégral. Jusqu'à l'apparition du Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, on pouvait croire que le cercle d'idées ouvert par Newton et Leibnitz avait été exploré dans ses parties essentielles. Quelques théories paraissaient seules manquer au développement du Calcul intégral, et, au commencement du siècle, Lagrange, Laplace, Fourier avaient surtout étudié les applications du Calcul différentiel à la Mécanique, à l'Astronomie et à la Physique mathématique. Cauchy, par sa théorie, a ouvert une voie nouvelle dans laquelle l'ont suivi, avec le plus grand succès, les plus éminents géomètres de notre époque. MM. Puiseux, Weierstrass, Riemann, Briot et Bouquet, Clebsch et Gordan ont déjà fondé, en prenant tous pour base les travaux de Cauchy, des théories importantes dont l'étude s'impose à tous les géomètres désireux de s'instruire et de faire progresser à leur tour le Calcul intégral. Grâce aux notions dues à Cauchy et aux développements récents que nous venons de signaler, on a été conduit à une manière nouvelle de poser tous les problèmes du Calcul intégral, qui promet à notre époque de nombreuses et importantes découvertes. M. Bertrand expose, avec les développements nécessaires, la théorie de Cauchy; mais il commence par une remarque nouvelle sur un Mémoire de Poisson.

Dès 1811, on ne peut le contester, Poisson avait rencontré la difficulté relative aux imaginaires et avait fait un pas notable vers la solution. Cette remarque n'enlève rien, du reste, dans l'esprit de l'auteur, aux droits de Cauchy : « Ce passage très-remarquable, dit-il (p. 294), contient la définition précise des intégrales imaginaires qui ont joué depuis un rôle si important; mais, satisfait d'avoir écarté une difficulté singulière qui l'avait un instant étonné, Poisson n'a suivi aucune des conséquences de son ingénieuse explication, en laissant à Cauchy l'honneur de créer la théorie nouvelle. »

Les exemples choisis et développés feront bien comprendre l'utilité des idées nouvelles proposées par Cauchy; l'auteur justifie quelques démonstrations dans lesquelles les intégrales imaginaires ont été introduites sans examen suffisant; en sorte que son exposition peut être considérée comme la préparation la plus convenable à l'étude des ouvrages spéciaux où l'on glisse beaucoup trop rapidement sur les commencements de la théorie. Le Chapitre se termine par les conséquences les plus importantes : variation brusque d'une intégrale imaginaire; nombre des racines dans un contour; recherches de M. Puiseux; aperçu sommaire des méthodes de représentation des imaginaires suivies par Riemann.

Chapitre XII. *Calcul numérique de la valeur approchée d'une intégrale définie.*

Méthode des trapèzes, de Cotes, de Simpson. Méthode de Gauss par les fonctions X_n. Application à un exemple. Formule d'Euler. Cette formule si importante est celle qu'on peut écrire de la manière suivante

$$\Delta u_x = h u'_x + \frac{h}{2}\Delta u'_x - \frac{B_1}{1.2} h^2 \Delta u''_x + \ldots .$$

La démonstration en est présentée avec la plus grande simplicité, grâce à des développements préliminaires que M. Bertrand avait eu la prévoyance de placer dans le premier Volume.

LIVRE II. Applications et développements.

Chapitre I^er. *Évaluation des aires planes et des arcs de courbe.*

Théorèmes de Steiner sur les roulettes, de M. Holditch, de Pascal, de Fagnani, de M. Chasles sur les arcs d'ellipse, et de M. Talbot.

Chapitre II. *Évaluation des surfaces courbes.*

Emploi des coordonnées curvilignes. Surface de l'ellipsoïde traitée par les méthodes les plus simples. Introduction des rayons de courbure dans l'expression de la surface, etc.

Chapitre III. *Détermination des volumes.*

Chapitre IV. *Calcul de l'attraction des corps solides.*

Loi générale de l'attraction. Solide de plus grande attraction. Attraction d'une sphère, d'un ellipsoïde. Potentiel. Principe des images.

Chapitre V. *Théorie des intégrales multiples.*

Formule de Poisson. Méthode de Dirichlet. Changement de variables. Courbure totale d'une surface fermée. Formule de Green. Théorie des surfaces de niveau par M. Chasles. Théorème de M. Crofton. Le dernier théorème est celui qui a été communiqué à l'Académie des Sciences, et qui établit une relation entre une intégrale double étendue à l'extérieur d'une courbe convexe, l'aire et le périmètre de cette courbe. Nous croyons nouvelle la démonstration que propose M. Bertrand et qui est fondée sur le calcul des probabilités.

Chapitre VI. *Calcul inverse des intégrales définies.*

Transformation d'une série en intégrale définie. Série hypergéométrique de Gauss. Fonctions génératrices d'Abel.

Les problèmes qui font l'objet de ce Chapitre ne sont pas susceptibles d'une définition précise. On peut, d'une infinité de manières, exprimer une quantité par une intégrale définie. M. Bertrand a réuni les exemples les plus élégants. Nous avons plus particulièrement remarqué le problème général traité par Abel, à l'occasion de la tautochrone dans le vide.

Chapitre VII. *Quelques développements en série.*

Formule de Taylor. Théorème de Laurent. Fonctions bien définies. Série de Lagrange, démontrée par la méthode si simple de M. Rouché. Séries trigonométriques conformément aux principes de Dirichlet. Fonctions Y_n de Laplace. Développements en séries ordonnées suivant ces fonctions.

Chapitre VIII. *Intégrabilité des fonctions différentielles.*

Cette question, on le sait, a fait l'objet des recherches de plusieurs géomètres et de M. Bertrand en particulier. On trouvera, dans ce Chapitre, des résultats élégants obtenus par l'auteur et quelques autres géomètres, Poisson, Joachimsthal, etc.

LIVRE III. Théorie des fonctions elliptiques.

Ce Livre, le dernier du volume, contient seulement les points essentiels de la théorie. Les fonctions elliptiques ont acquis aujourd'hui une grande importance; pour les traiter complétement, il faudrait leur consacrer au moins tout un volume. Si M. Bertrand nous avait donné une étude aussi complète, nous lui en aurions été certainement très-reconnaissants, mais il faut bien avouer qu'un tel développement aurait établi une grande disproportion entre les différentes parties de l'œuvre. On sait que deux méthodes principales et tout à fait différentes peuvent être adoptées dans l'exposition de la théorie. Jacobi et M. Hermite, laissant de côté le Calcul intégral, ont commencé par la théorie développée des fonctions Θ. M. Bertrand est resté fidèle à l'ordre historique. La méthode qu'il a suivie et qu'il avait déjà développée dans son cours du Collége de France, est celle qui a son origine dans les travaux d'Abel et de Cauchy.

Chapitre I$^{\text{er}}$. *Théorèmes relatifs à l'addition des intégrales.*

Méthodes de Lagrange, de Jacobi. Théorèmes de Poncelet. Théorème d'Abel. Interprétation géométrique de M. Clebsch.

Le théorème d'Abel ne nous a pas paru développé d'une manière suffisamment complète. Espérons que, dans la prochaine édition, M. Bertrand lui consacrera une place plus honorable, ainsi qu'à la théorie des fonctions abéliennes qui a fait dans ces derniers temps des progrès si considérables.

Chapitre II. *Double périodicité des fonctions elliptiques.*

Addition des arguments. Définition précise des fonctions elliptiques. Théorèmes généraux sur les fonctions périodiques. Proposition de M. Liouville : l'auteur fera un emploi fréquent de cette importante proposition qui introduit tant de simplicité dans la théorie. Elle remplace, en effet, d'une manière avantageuse, la considération des fonctions symétriques des racines qui a été le point de départ d'Abel dans ses Mémoires sur la multiplication et la transformation.

Nous avons aussi remarqué une démonstration géométrique très-simple de l'impossibilité d'une troisième période. Cette démonstration avait été déjà donnée dans le cours de M. Bertrand, mais il est juste d'indiquer, à cause de l'importance du principe employé, que Dirichlet avait fait usage de considérations semblables dans son *Mémoire sur la réduction des formes quadratiques ternaires*, inséré au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2$^{\text{e}}$ série, t. IV, p. 217.

Chapitre III. *Multiplication et division de l'argument.*

D'après la méthode d'Abel, simplifiée par Jacobi. Application aux points d'inflexion des courbes du troisième ordre.

Chapitre IV. *Expressions des fonctions elliptiques sous forme de produits.*

La théorie de la multiplication indique, comme pour les fonctions circulaires, la forme de ces développements qui sont ensuite établis en toute rigueur. Influence de l'ordre des facteurs dans les produits infinis. Théorèmes de M. Cayley.

Chapitre V. *Fonctions* $\mathrm{H}(x)$, $\Theta(x)$ *de Jacobi.*

Développements en série. Intégrales de deuxième et de troisième espèce.

Chapitre VI. *Transformation des fonctions elliptiques.*

Transformations linéaires. Échelle des modules de Lagrange, de Gauss. Principe algébrique de Jacobi. Théorie d'Abel.

Chapitre VII. *Calculs numériques. Tables.*

Ce dernier Chapitre est consacré à des applications et à des calculs très-intéressants. Il se termine par quatre Tables donnant les valeurs numériques des fonctions elliptiques.

C'est avec la théorie des fonctions elliptiques que se termine ce premier Volume de Calcul intégral. L'analyse rapide que nous venons d'en faire ne peut donner qu'une idée bien imparfaite des nombreuses richesses réunies et mises en œuvre dans ce volume de plus de 700 pages, dont la lecture est pourtant si facile et si attrayante. Espérons que nos jeunes mathématiciens sauront mettre à profit les leçons d'un maître si dévoué, et lui fournir l'occasion d'ajouter de nouveaux Chapitres à son livre dans la prochaine édition. En tous cas, nous serons l'interprète de tous auprès de l'auteur en le remerciant sincèrement, et en le priant de toutes nos forces de hâter l'impression du troisième Volume dont tant de parties sont déjà préparées et communiquées aux savants par l'enseignement même de M. Bertrand.

G. D.

DURÈGE (Dr H.), ord. Professor am Polytechnicum zu Prag. — Theorie der elliptischen Functionen. *Versuch einer elementaren Darstellung.* — Zweite Auflage; 1868. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. Prix : 3 Thlr. (*).

M. Durège, à qui l'on doit le premier Ouvrage spécial qui ait paru sur la *Théorie des quantités complexes* (**), avait déjà, en 1861, publié, le premier, un traité élémentaire des fonctions elliptiques,

(*) *Théorie des Fonctions elliptiques. Essai d'une exposition élémentaire;* par le Dr H. Durège, professeur ordinaire à l'Institut Polytechnique de Prague. 2e édit. Leipzig, chez B.-G. Teubner; 1868. In-8°, xii-388 pages.

(**) *Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse, mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemanns bearbeitet von* Dr H. Durège, ordentl. Professor am Polytechnicum zu Prag. Leipzig, Druck und Verlag von B.-G. Teubner; 1864. In-8°, xii-228 pages.

destiné à remplacer le livre déjà vieilli de Verhulst. Le succès de ce traité, attesté par l'écoulement rapide de la première édition, est dû aux qualités de rédaction qui le distinguent et au choix heureux du plan le plus propre à faciliter aux commençants l'étude de cette branche importante du Calcul intégral.

Dans l'intervalle qui s'est écoulé entre les deux éditions, ont paru deux autres Ouvrages sur le même sujet et destinés au même but que celui de M. Durège. Le premier de ces Ouvrages est le volume publié à Berlin en 1864 par M. Schellbach, et intitulé : *Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen*. L'auteur de ce livre a choisi le mode d'exposition recommandé par Jacobi vers la fin de sa vie, en prenant pour point de départ les fonctions Θ, définies d'abord comme des produits infinis. Une fois que l'on a établi les propriétés fondamentales de ces fonctions, on en déduit, avec une grande facilité, les formules relatives aux fonctions elliptiques. Le traité de M. Schellbach se recommande par le recueil complet de formules qu'il contient et par le soin avec lequel sont exposées les méthodes de calcul numérique. Seulement on est forcé de convenir que les commencements sont présentés sous une forme synthétique assez pénible à suivre, et laissent parfois quelques inquiétudes sous le rapport de la rigueur des déductions. Un autre inconvénient, au point de vue des commençants, résulte des changements que l'auteur a cru devoir apporter aux notations classiques (*) proposées par Jacobi, ce qui peut causer quelque embarras, lorsqu'on veut entreprendre la lecture d'un autre livre que celui qu'on a étudié.

L'autre traité dont il est question fait partie du second Volume du *Compendium der hoheren Analysis* de M. Schlömilch (Brunswick, 1866), et comprend 186 pages de ce volume. Il se divise en deux Chapitres, dont le premier traite des *intégrales* elliptiques, d'après la méthode de Legendre. Le second Chapitre est consacré à l'étude des *fonctions* elliptiques, en partant de la double périodicité des fonc-

(*) Il serait temps, croyons-nous, que les géomètres s'entendissent pour faire cesser la variété si grande des notations employées pour représenter les fonctions elliptiques et leurs périodes. Pourquoi n'adopterait-on pas uniformément les notations de Jacobi

$$\sin\operatorname{am} u, \quad \cos\operatorname{am} u, \quad \Delta\operatorname{am} u,$$

en les remplaçant, quand les formules seraient trop longues, par les notations abrégées de Gudermann

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn} u?$$

G. D.

tions inverses de l'intégrale de première espèce, et passant de là aux fonctions Al de Weierstrass et aux fonctions Θ de Jacobi.

Malgré les avantages que peuvent présenter, à certains égards, les méthodes suivies par ces deux auteurs, M. Durège a maintenu à très-peu près le plan qu'il avait suivi dans sa première édition, et dont nous allons essayer de donner une idée, en analysant rapidement les diverses Sections du nouveau volume.

Section I. *Définition des fonctions elliptiques.*

Ces fonctions sont définies comme formées avec les lignes trigonométriques de la fonction $\varphi = \operatorname{am} u$, inverse de l'intégrale

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

L'auteur adopte la notation de Jacobi, en indiquant les abréviations très-commodes proposées par Gudermann. Comme exemple, il applique ces fonctions à la théorie du pendule circulaire.

Section II. *Périodicité des fonctions elliptiques.*

La double périodicité de ces fonctions est établie d'après la méthode de Jacobi, qui est la plus simple, quoique laissant à désirer du côté de la rigueur. Mais l'auteur revient sur cette question dans la dernière Section, où il emploie une méthode à l'abri de toute objection. Il continue à prendre pour exemple l'application des résultats obtenus au problème du pendule circulaire.

Section III. *Réduction des intégrales elliptiques à la forme normale.*

Cette question est traitée d'après le Mémoire de Richelot : *Ueber die Substitutionen der ersten Ordnung und die Umformung der elliptischen Integrale in die Normalform* (*Journal de Crelle*, t. XXII). Applications au pendule circulaire et à la rectification de la lemniscate.

Section IV. *Des trois espèces d'intégrales elliptiques.*

L'auteur suit la marche de Legendre. Comparaison des notations de Legendre et de Jacobi. Arcs d'ellipse et d'hyperbole.

Section V. *Sur une substitution du second ordre pour la réduction des intégrales elliptiques à la forme normale.*

Cette substitution sert à ramener à des valeurs du module et de la limite supérieure moindres que l'unité l'intégrale

$$\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\lambda^2 v^2)}},$$

où λ et v sont quelconques. Application au pendule.

Section VI. *Le théorème d'addition.*

Intégration de l'équation différentielle elliptique par les méthodes de Sturm, d'Euler et de Lagrange. Formules fondamentales qui donnent les valeurs de sin am $(u+v)$, cos am $(u+v)$, etc., et recueil des formules les plus importantes qui s'en déduisent.

Section VII. *Liaison entre les fonctions elliptiques et la Trigonométrie sphérique.*

Triangle sphérique dont les côtés sont am$u$, am$v$ et am$(u \pm v)$. Déduction des formules de Gauss au moyen des propriétés des fonctions elliptiques. Démonstration du théorème d'addition par la Trigonométrie sphérique.

Section VIII. *Le théorème d'addition pour les intégrales de seconde et de troisième espèce.*

Section IX. *Le théorème d'Abel.*

Cette Section constitue l'addition la plus importante que l'auteur ait introduite dans sa seconde édition. Il reproduit la démonstration donnée par Abel dans son Mémoire intitulé : *Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes* (*Journal de Crelle,* t. III, et *Œuvres d'Abel,* t. I, p. 288). Cette démonstration est restreinte au cas où les intégrales contiennent un radical carré portant sur un polynôme entier quelconque, M. Durège n'ayant pas cru qu'il fût nécessaire, dans un Ouvrage élémentaire sur les fonctions elliptiques, de parler du cas le plus général, traité par Abel dans ses derniers travaux. De ce théorème on déduit, comme cas particulier, le théorème d'addition pour les intégrales elliptiques des trois espèces. La méthode d'Abel est exposée d'ailleurs avec la plus grande clarté et les plus heureux éclaircissements.

Section X. *Construction géométrique du théorème d'addition, d'après Jacobi.*

Cette construction est tirée du Mémoire publié par Jacobi, dans le tome III du *Journal de Crelle,* et intitulé : *Ueber die Anwendung der* *elliptischen Transcendenten auf ein Problem der Elementargeometrie*, et l'auteur indique les additions qu'y a faites Richelot (*). Elle est fondée sur la considération d'une ligne polygonale inscrite à un cercle et circonscrite à un autre, intérieur au premier. Intégration géométrique de l'équation différentielle elliptique. Condition pour que le polygone se ferme; application aux polygones de trois, de quatre, de cinq côtés.

SECTION XI. *Transformation de Landen.*

Démonstration géométrique au moyen de la Section précédente. Applications au calcul numérique des intégrales elliptiques.

SECTION XII. *Développement des fonctions elliptiques en produits infinis.*

SECTION XIII. *Développement des fonctions elliptiques en séries.*

SECTIOX XIV. *Développement en séries des intégrales de seconde espèce.*

SECTION XV. *Développement en séries des intégrales de troisième espèce.*

Dans ces trois dernières Sections, l'auteur a suivi les méthodes indiquées par Jacobi dans ses *Fundamenta.*

SECTION XVI. *La fonction de Jacobi.*

M. Durège désigne sous ce nom, proposé par Dirichlet, la fonction Θ, à laquelle les travaux de Jacobi ont donné une si grande importance. Il expose, d'après les *Fundamenta,* les propriétés de cette fonction, et les relations de ces propriétés avec la théorie des nombres. Démonstration du théorème, que tout nombre est la somme de quatre carrés.

SECTION XVII. *Expression des fonctions elliptiques au moyen de la fonction de Jacobi.*

(*) *Voir* aussi *Journal de Mathématiques de M. Liouville,* t. X, p. 435; — JACOBI : « Sur l'application des transcendantes elliptiques à ce problème connu de la Géométrie » élémentaire : Trouver la relation entre la distance des centres et les rayons de deux » cercles dont l'un est circonscrit à un polygone irregulier, et dont l'autre est inscrit à » ce même polygone ». T. XI, p. 25; — RICHELOT : « Application des transcendantes ellip- » tiques aux polygones spheriques qui sont inscrits à un petit cercle de la sphère, et » circonscrits à un autre petit cercle, simultanément ».

SECTION XVIII. ***Des transcendantes elliptiques de troisième espèce.*** Étude de ces transcendantes, exprimées à l'aide de la fonction Θ. Exposé de la belle découverte de Jacobi.

SECTION XIX. ***Mouvement du pendule sphérique.***

SECTION XX. ***Fonctions d'une variable complexe, et valeurs multiples d'une intégrale définie.***

Cette Section contient un abrégé de la théorie des quantités complexes d'après Cauchy, Puiseux, Riemann, et se termine par l'application de cette théorie à la démonstration rigoureuse de la double périodicité, telle qu'on la trouve dans l'Ouvrage de MM. Briot et Bouquet.

J. HOÜEL.

SALMON (G.), professeur au Collége de la Trinité, à Dublin. — LEÇONS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE. Traduit de l'anglais par M. Bazin, Ingénieur des Ponts et Chaussées, et augmenté de NOTES par M. Hermite, Membre de l'Institut. — In-8°, XII-247 pages; 1868. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 7fr,50.

Lorsque, dans la première moitié de ce siècle, on voyait se multiplier les découvertes dues aux méthodes si fécondes de la Géométrie moderne, on pouvait croire cette dernière appelée à prendre le pas sur l'ancienne méthode de Descartes toutes les fois qu'il s'agirait d'arriver à des vérités nouvelles. Guidée par la synthèse en quelque sorte intuitive, la méthode analytique devait, disait-on déjà, se borner à vérifier, à généraliser les résultats obtenus sans elle. Il lui manquait, en effet, un principe général qui pût conduire directement à des théorèmes nouveaux, analogues à ceux de la Géométrie supérieure.

Ce principe est fourni par la théorie des *invariants* et des *covariants*. On appelle ainsi les fonctions des coefficients et des variables d'une expression algébrique qui ne changent pas de valeur lorsque les variables sont soumises à une transformation linéaire. La considération de ces fonctions doit évidemment conduire à la découverte de propriétés des courbes et des surfaces qui sont indépendantes du choix des axes. En outre, on prévoit l'importance de ces théories pour l'étude des propriétés projectives des figures, puisque la perspective repose sur une substitution linéaire.

On appelle *forme* une expression algébrique rationnelle, entière et homogène. Toute fonction des coefficients d'une forme, qui ne change pas de valeur lorsque les coefficients changent par suite d'une substitution linéaire effectuée sur les variables, est un invariant absolu de cette forme; on l'appelle *invariant relatif,* ou simplement *invariant,* si sa nouvelle valeur ne diffère de la valeur primitive que par une puissance du module de la substitution. C'est ainsi que l'expression $ac - b^2$ est un invariant de la forme quadratique binaire

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

parce que $a'c' - b'^2 = (ac - b^2)\Delta^2$, si nous désignons par a', b', c' les valeurs des coefficients après la transformation, et par Δ le module de la transformation.

Généralisant la définition des invariants, on appelle *covariant* une fonction comprenant à la fois les coefficients et les variables d'une forme, et dont les valeurs successives, obtenues par des substitutions linéaires, ne diffèrent que par un facteur égal à une puissance du module,

$$\varphi(a', b', \ldots, x', y', \ldots) = \Delta^p . \varphi(a, b, \ldots, x, y, \ldots).$$

Un *contrevariant* est un covariant qui, au lieu des variables x, y,... de la forme donnée, renferme d'autres variables ξ, η, ..., qui sont transformées en même temps que les premières, mais par la substitution inverse, c'est-à-dire qu'on fera

$$x = \lambda_1 x' + \mu_1 y' + \ldots, \quad y = \lambda_2 x' + \mu_2 y' + \ldots, \quad \ldots,$$

et

$$\xi' = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \ldots, \quad \eta' = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \ldots, \quad \ldots.$$

Une corrélation de ce genre a lieu, par exemple, entre les coordonnées trilinéaires d'un point et les coordonnées tangentielles d'une droite; elle a lieu encore entre les variables x, y,... et les caractéristiques D_x, D_y, ..., puisque

$$D_{x'} = \lambda_1 D_x + \lambda_2 D_y + \ldots, \quad D_{y'} = \mu_1 D_x + \mu_2 D_y + \ldots, \quad \ldots.$$

Les *divariants* ou covariants mixtes renferment les deux séries de variables x, y, ..., et ξ, η, ..., et ainsi de suite.

A côté des invariants et des covariants d'une forme unique, on peut encore considérer les invariants et les covariants d'un *système de formes*. C'est ainsi que le déterminant d'un système d'équations linéaires est un invariant du système. Le déterminant d'un système de formes quelconques est un covariant, auquel on donne le nom de *Jacobien*.

L'un des invariants les plus simples est le *discriminant;* on l'obtient en cherchant la résultante des dérivées partielles d'une forme, prises par rapport à chacune des variables. Le discriminant est d'ailleurs égal au carré du produit des différences de toutes les racines de la forme (c'est-à-dire de toutes les racines de l'équation qu'on obtient en égalant cette forme à zéro). Il s'ensuit que la réduction à zéro du discriminant d'une équation exprime la condition nécessaire pour que cette équation ait des racines égales. Si l'équation représente une courbe ou une surface, la réduction à zéro du discriminant exprime la condition nécessaire pour que la courbe ou la surface ait un point double. Le discriminant de la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2$ est $ac - b^2$; c'est le seul invariant que possède la forme quadratique binaire.

Les deux équations

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$
$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 = 0,$$

représentent deux couples de points sur une ligne droite, ou bien deux couples de droites passant par un même point; elles ont en commun l'invariant

$$ac' + a'c - 2bb',$$

dont la réduction à zéro exprime la condition qui doit être remplie pour que les quatre points ou les quatre droites soient en relation harmonique. Les covariants auxquels on donne le nom d'*émanants* représentent en Géométrie les courbes ou surfaces polaires d'un point par rapport à une courbe ou surface donnée.

Ces quelques exemples suffiront pour faire comprendre l'importance géométrique de la théorie des invariants et des covariants, mais elle n'est pas moins féconde en résultats qui intéressent l'Algèbre ordinaire et la Théorie des nombres. La Statique et la science du mouvement, ainsi que la Physique mathématique, y trouveront elles-mêmes un moyen de simplifier l'énoncé de leurs résultats.

La théorie en question forme déjà une nouvelle branche de l'Algèbre supérieure, que l'on appelle quelquefois l'*Algèbre des transformations linéaires*. On peut en faire remonter l'origine aux travaux de Gauss sur les formes quadratiques; peut-être même faut-il en voir le premier germe dans la découverte des déterminants par Leibniz (1693), renouvelée par Cramer vers 1750; mais ce n'est que depuis vingt ans que la nouvelle branche d'Algèbre s'est constituée en corps de doctrine, grâce aux travaux de Cayley, Sylvester, Hermite, Aronhold, Clebsch, Brioschi, et de quelques autres géomètres. Ce qui en rend l'accès un peu difficile au premier abord, c'est l'introduction d'une foule de termes nouveaux, choisis avec plus ou moins de bonheur; mais cette terminologie est d'un grand secours pour abréger le langage, et les inconvénients qu'elle offre seraient bien moins sensibles, si l'on pouvait s'accorder sur les dénominations à employer, de manière à en restreindre un peu le nombre.

La nouvelle Algèbre fait l'emploi le plus large des méthodes symboliques. On s'habitue ici à manier les symboles d'opérations comme des quantités, à les soumettre aux procédés de calcul ordinaires; cela abrége le raisonnement, à peu près comme les lettres de change, substituées au numéraire, abrégent les opérations commerciales. Ainsi nous pouvons, dans un contrevariant, remplacer les variables $\xi, \eta, \ldots$ par les symboles $D_x, D_y, \ldots$, et nous obtiendrons un symbole d'opération qui ne varie pas lorsque les variables $x, y, \ldots$ sont transformées par une substitution linéaire; en l'appliquant à la forme primitive ou à l'un de ses covariants, nous aurons un nouveau covariant, ou même un invariant, si les variables disparaissent par la différentiation. De même nous pouvons, dans un covariant, remplacer $x, y, \ldots$ par $D_\xi, D_\eta, \ldots$, pour opérer sur un contrevariant, etc.

La méthode très-simple que M. Cayley a donnée pour la formation des invariants et des covariants repose sur les mêmes principes. Étant données plusieurs formes U, V, W, ..., nous pouvons donner aux variables $x, y, \ldots$, dans U l'indice 1, dans V l'indice 2, etc. Or, d'après la règle de la multiplication des déterminants, le symbole

$$\overline{123}\ldots = (D_{x_1}, D_{y^2}, D_{z_3}, \ldots)$$

n'est pas altéré par une transformation linéaire des variables (en faisant toujours abstraction du facteur numérique Δ^p), puisque les caractéristiques $D_x, D_y, \ldots$ se transforment par la substitution inverse.

Il s'ensuit que le résultat de l'opération

$$\overline{123}^{\alpha}.\overline{134}^{\beta}\ldots UVW\ldots$$

sera un invariant, si les variables ont disparu, ou bien un covariant, s'il en reste et si l'on supprime les indices. Ainsi, en faisant

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad V = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2,$$

on aura, en supprimant le facteur numérique 4,

$$\overline{12}^2\, UV = ac' + a'c - 2bb'.$$

Rien n'empêche d'ailleurs de prendre pour U, V, W,... la même fonction; ainsi

$$\overline{12}^2\, UU = ac - b^2.$$

MM. Aronhold et Clebsch ont modifié ce procédé comme il suit. En mettant x_1, x_2, x_3, pour x, y, z, la forme ternaire de degré n peut s'écrire

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^n,$$

où il faut, après développement, remplacer le produit $a_i\, a_k\, a_l$ par le coefficient a_{ikl}. Si l'on fait encore $b_i b_k b_l = c_i c_k c_l = \ldots = a_{ikl}$, on aura, par exemple, un invariant de la forme cubique ternaire ($n = 3$) en développant le produit des déterminants

$$(a_1b_2c_3)(b_1c_2d_3)(c_1d_2a_3)(d_1a_2b_3) = \overline{123}.\overline{234}.\overline{341}.\overline{412}.$$

Nous n'insistons pas plus longuement sur le détail de ces méthodes ingénieuses et fécondes; ceux qu'elles intéressent les trouveront exposées d'une manière très-lucide dans l'Ouvrage du Rév. George Salmon, dont M. Bazin vient de nous donner la traduction. M. Salmon, professeur au Collége de la Trinité à Dublin, a publié en outre une *Géométrie analytique des sections coniques* et une *Géométrie à trois dimensions,* où les nouvelles méthodes sont appliquées d'une manière magistrale; ses Ouvrages sont devenus classiques en Angleterre, et les excellentes traductions de M. Fiedler les ont popularisés en Allemagne. M. Bazin a certainement rendu service à la science en faisant connaître en France un abrégé substantiel des *Lessons introductory to the modern higher Algebra,* complété par quelques applications empruntées aux traités de Géométrie du même auteur. M. Hermite a bien voulu enrichir le livre de plusieurs Notes extraites de ses Recherches sur l'équation du cinquième degré. On peut donc espérer que les *Leçons d'Algèbre supérieure* trouveront en France l'accueil que cet Ouvrage mérite à un si haut degré.

R. Radau.