BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

J. HOÜEL

Notice sur la vie et les travaux de N.-I. Lobatchefsky.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 1 (1870), p. 384-388

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1870__1__384_1>

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX DE N.-I. LOBATCHEFSKY.

Troisième article.

TRAVAUX GÉOMÉTRIQUES DE LOBATCHEFSKY.

M. Ianichefsky, professeur de Mathématiques à l'Université de Kazan, publie en ce moment une nouvelle édition des *Œuvres géométriques de N.-I. Lobatchefsky* (Геометрическія сочиненія Н. И. Лобачевскаго, Kazan, gr. in-4°). Cinquante-trois feuilles de ce volume ont déjà paru. Elles contiennent les Mémoires désignés dans notre précédent article (*) sous les nos 2, 9, 11 et 12, rangés par ordre chronologique. Pour donner une idée de cet ensemble de recherches, nous suivrons de préférence l'ordre naturel des matières.

(*) Voir *Bulletin*, p. 324.

Le nom de Lobatchefsky est connu surtout, jusqu'à présent, par ses découvertes relatives à la théorie des parallèles. Il s'en faut de beaucoup cependant que les services rendus par lui à la science soient limités à cette question spéciale. On lui doit un Traité complet sur les fondements de la Géométrie, où il a présenté sous une forme neuve et originale les principes essentiels de la science de l'espace.

Ces principes, connus depuis plus de vingt siècles, ont été, par malheur, acceptés trop tôt comme évidents et immuables. L'exposition qu'en a donnée Euclide a paru tellement satisfaisante, qu'on ne s'est pas occupé de savoir s'il n'existait pas d'autres manières plus rationnelles de coordonner les vérités géométriques, et les esprits éminents, quand ils ont traité la question, l'ont plutôt considérée au point de vue métaphysique qu'au point de vue mathématique.

Cependant les travaux de Gauss, de Lobatchefsky, de J. Bolyai, de Riemann, de Helmholtz, et d'autres grands géomètres ont mis hors de doute qu'il reste quelque chose à faire sur ce sujet. Lors même qu'on ne serait pas encore parvenu au but désiré, lors même qu'on n'aurait pas encore découvert la méthode la plus scientifique et, par suite, la plus simple pour organiser l'enchaînement des vérités de la Géométrie, on ne devrait pas moins une vive reconnaissance à ces novateurs qui ont *remué des idées* et fait sortir cette question de l'état de stagnation où elle était restée pendant deux mille ans. Si à cette heure la solution n'est pas encore complète, on en possède du moins presque tous les éléments. La mise en œuvre des matériaux acquis serait une tâche bien digne de tenter l'ambition d'un géomètre habile, et l'utilité d'un livre fondé sur des bases vraiment rationnelles serait immense pour l'enseignement élémentaire, qui se trouverait ainsi délivré de tant de Traités reposant sur des conceptions fausses.

Nous allons essayer d'indiquer les principales modifications à la méthode ordinaire, proposées par Lobatchefsky dans son grand travail intitulé : Новыя начала Геометріи, съ полной теоріей параллельныхъ (*), et publié, comme nous l'avons dit dans un article précédent (**) dans les *Mémoires de l'Université de Kazan* pour les

(*) Nouveaux principes de Géométrie, avec une Théorie complète des parallèles, en six articles, comprenant 470 pages in-8°.

(**) *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*; 1870, p. 324.

années 1835-1838. Lobatchefsky n'emploie dans ce travail que les procédés habituels de la Géométrie élémentaire. Il cherche à réduire les axiomes au moindre nombre possible, et à faire ressortir le rôle que chacun d'eux joue séparément dans l'ensemble de la théorie.

L'ouvrage, divisé en treize Chapitres, est précédé d'une INTRODUCTION (30 pages), dans laquelle l'auteur discute les démonstrations du principe des parallèles, données par Legendre et par Bertrand (de Genève), et en démontre rigoureusement l'insuffisance. Nous reviendrons sur cette question, lorsque nous aurons vu ce que devient la Trigonométrie plane, tant qu'on n'a pas encore prononcé sur la question de l'axiome XI d'Euclide.

Le CHAPITRE Ier (16 pages), intitulé : *Premières notions de Géométrie,* traite des diverses manières dont un corps peut être divisé, et contient les définitions des surfaces, des lignes et des points. Lobatchefsky établit ces définitions de la manière même dont on y a été conduit par l'expérience. On parvient, par exemple, à l'idée de surface en amincissant indéfiniment un corps dans le voisinage de sa limite, et les propriétés des surfaces sont celles vers lesquelles convergent les propriétés d'un tel corps infiniment mince.

L'objet du CHAPITRE II (26 pages) est la démonstration de l'existence du plan et de la ligne droite, en partant d'un axiome unique : l'existence de la sphère.

Jusqu'à présent on avait admis comme première hypothèse de la Géométrie l'existence d'une suite continue de points, qui restent immobiles, lorsqu'un système solide dont ils font partie tourne autour de deux de ces points, supposés fixes ; et l'ensemble de tous ces points immobiles forme une ligne, indéfinie dans les deux sens, et que l'on appelle *ligne droite.*

De la notion de la ligne droite on peut déduire celle du plan, lieu des positions d'une droite mobile qui glisse sur deux droites fixes partant d'un même point (*).

Mais la constatation expérimentale de l'immobilité de certains points d'un système rigide ne peut se faire qu'au moyen de mesures approximatives, et l'on ne peut jamais vérifier l'hypothèse en toute rigueur. A cette hypothèse, qui repose seulement sur une induction,

(*) *Voyez* une Note de M. Valeriani (*Giornale di Matematiche*, t. VII, décembre 1869).

Lobatchefsky et J. Bolyai (*) ont voulu en substituer une autre, n'empruntant à l'expérience que des relations de situation, toujours exactement vérifiables.

Étant admise la notion indéfinissable de la solidité, la distance de deux points A, B est dite *égale* à celle de deux autres points A′, B′, si l'on peut faire coïncider successivement les deux mêmes points d'un système solide d'abord avec A et B, puis avec A′ et B′.

La sphère est le lieu des points équidistants d'un point fixe. C'est une surface simple et complétement fermée.

D'un centre donné on peut toujours décrire une sphère, et une seule, qui passe par un point donné.

Une sphère ne peut avoir qu'un seul centre.

Si, de deux centres fixes et avec une distance convenable, on décrit deux sphères égales, l'intersection de ces sphères est un *cercle,* ayant les deux centres fixes pour *pôles.*

Le lieu des cercles décrits des mêmes pôles est une surface indéfinie, superposable à elle-même par retournement, et que l'on appelle *plan.*

Si l'on fait tourner un plan autour de deux de ses points, supposés fixes, il y a un ensemble de points qui restent immobiles (ou du moins qui reviennent sur eux-mêmes au bout d'une demi-révolution); ces points forment une ligne indéfinie dans les deux sens, que l'on appelle *la ligne droite.*

Deux droites qui ont deux points communs se confondent.

Une droite qui a deux points dans un plan y est située entièrement.

Deux plans qui ont trois points communs non en ligne droite se confondent.

On établit ensuite les propriétés fondamentales de la sphère, du cercle, du plan, de la ligne droite, les caractères des positions relatives de deux sphères ou de deux cercles, etc.

Si cet enchaînement de propositions pouvait s'établir d'une manière à la fois simple et rigoureuse, il n'est pas douteux que les principes de la Géométrie n'eussent ainsi acquis une base plus solide et plus indépendante des erreurs de l'expérimentation. Cette méthode

(*) *Kurzer Grundriss eines Versuchs u. s. w.* Maros Vásárhely, 1851.

conduirait en même temps plus directement à un grand nombre de propriétés des figures formées par des droites ou par des plans.

Il nous semble malheureusement que les déductions de Lobatchefsky et de J. Bolyai sont mêlées de suppositions qui nécessitent de nouveaux appels à l'expérience, et que, tout au plus, leur raisonnement démontre l'existence de la ligne droite *dans le plan,* mais non celle de la ligne droite *dans l'espace* (*). Nous laissons de côté la question de simplicité qui est d'un intérêt secondaire tant qu'il ne s'agit pas d'une application à l'enseignement élémentaire.

Il ne faut pas toutefois renoncer à l'idée de voir un jour les fondements de la Géométrie établis sur cette base d'une manière pleinement rigoureuse. Des tentatives récentes, encore inédites, dues à un géomètre qui a profondément étudié la question, nous font espérer une prochaine solution des difficultés qui restent encore à vaincre.

J. H.