BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Sur les systèmes linéaires de coniques et de surfaces du second ordre

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 1 (1870), p. 348-358

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1870__1__348_1>

MÉLANGES.

SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE CONIQUES ET DE SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. G. DARBOUX.

On sait qu'on appelle *points conjugués* ou *pôles harmoniques* deux points tels, que le plan polaire ou la polaire de l'un passe par l'autre. La théorie des points conjugués communs à plusieurs surfaces ou coniques n'a pas encore été traitée complétement. Je me propose d'indiquer dans cette Note quelques-uns des résultats que j'ai obtenus dans l'étude de cette théorie.

Quand des surfaces passent par l'intersection de deux autres, on dit qu'elles forment un *faisceau*. On appelle *réseau* l'ensemble des surfaces passant par l'intersection de trois surfaces fixes, et, en général, *système linéaire du $n^{ième}$ ordre* ou à n constantes, le système des surfaces qu'on obtient en combinant linéairement les équations de $n+1$ surfaces. Ainsi l'équation

$$\Sigma_1^{n+1}\lambda_i U_i = 0$$

représente un système linéaire d'ordre n; on obtiendra toutes les surfaces du système en donnant aux paramètres λ_i toutes les valeurs possibles.

En même temps que les systèmes linéaires formés avec les équations en coordonnées *ponctuelles* des surfaces, nous emploierons les systèmes formés avec les équations en coordonnées *tangentielles,* ou systèmes formés de *surfaces enveloppes*. Ainsi le faisceau tangentiel sera formé de surfaces inscrites dans une même développable, le réseau tangentiel, de surfaces en général tangentes à huit plans, etc. Nous dirons qu'une quadrique, *lieu de points,* est conjuguée à une quadrique *enveloppe,* toutes les fois que cette quadrique sera circonscrite à un tétraèdre conjugué par rapport à la quadrique enveloppe. Cela posé, voici le théorème fondamental qui permet de ramener les uns aux autres les problèmes en apparence les plus différents.

A un système linéaire d'ordre n formé avec des équations en coordonnées ordinaires, correspond un système d'ordre $8-n$ formé de surfaces enveloppes. Toutes les quadriques du premier système sont conjuguées à toutes celles du second.

Ainsi, à une surface unique formant un système d'ordre 0 correspond le système d'enveloppes d'ordre 8, toutes conjuguées à cette surface. A un faisceau de quadriques correspond un système d'ordre 7 formé de surfaces conjuguées aux premières, etc., etc.

Dans la théorie des coniques, à un système d'ordre n correspond un système d'ordre $4-n$. Considérons, par exemple, un réseau : à ce réseau correspond un second réseau formé par les enveloppes conjuguées aux premières. Le lieu des points pour lesquels les premières coniques se décomposent en deux droites est une courbe du troisième ordre, la hessienne ou jacobienne du réseau, l'enveloppe des droites joignant les paires de points, dans lesquelles se décomposent les coniques enveloppes du second réseau, est une courbe de troisième classe qu'on appelle la *cayleyenne* du premier réseau. Les relations entre les deux réseaux de coniques expliquent la réciprocité si remarquable entre la cayleyenne et la hessienne, réciprocité qui a été mise en évidence par MM. Cayley et Cremona.

Voici un second exemple se rapportant aux coniques. Si l'on considère le système de quatre coniques, il y aura un faisceau de coniques enveloppes conjuguées à ces quatre coniques, les enveloppes seront inscrites dans un quadrilatère et les paires de sommets opposés donneront les trois couples de points conjugués aux quatre coniques. On obtient aussi la proposition suivante :

Quand deux coniques enveloppes sont conjuguées par rapport à une conique, toutes les coniques inscrites dans le quadrilatère circonscrit aux deux premières jouissent de la même propriété. Si l'on a deux couples de points conjugués par rapport à une conique, toutes les coniques inscrites dans le quadrilatère formé avec ces quatre points, et en particulier la troisième paire de sommets opposés du quadrilatère, sont conjuguées dans la conique.

La partie de ce théorème relative au troisième couple de points conjugués dans la conique déduit des deux premiers a été donnée depuis longtemps par M. Hesse. Il résulte encore de la proposition précédente le théorème suivant :

On ne peut pas, en général, circonscrire à une conique un quadrilatère dont les sommets opposés soient conjugués par rapport à une conique donnée.

Autrement :

Si de deux points conjugués dans une conique, on mène des tangentes à une autre conique, ces tangentes forment un quadrilatère dont les autres paires de sommets opposés seront toujours conjuguées dans la première conique ou ne le seront jamais.

Je reviens aux surfaces de second ordre. Supposons qu'étant données n surfaces, on demande de trouver les couples de points conjugués communs à ces surfaces. Ces couples de points pourront être considérées comme formant une quadrique enveloppe conjuguée par rapport à toutes les surfaces. Elle devra donc faire partie du système adjoint d'enveloppes d'ordre $8 - n$. On aura donc à traiter la question suivante : Combien y a-t-il de paires de points? comment sont disposés ces points dans un système d'enveloppes, d'ordre $8 - n$; ou, ce qui revient au même, combien y a-t-il de couples de plans dans le système ordinaire de même ordre? Je commence par les cas les plus simples.

Faisceaux. — Dans ce cas, il y a sur toute droite une paire de points conjugués, un point a une infinité de conjugués en ligne droite. Il n'y a à considérer que les lignes droites, intersections communes des plans polaires d'un point par rapport à toutes les surfaces. Ces droites, ne dépendant que de trois constantes, forment un système de rayons rectilignes de la nature des systèmes appelés *complexes* par Plücker. On les définit par la propriété suivante : elles coupent les faces du tétraèdre conjugué commun aux deux surfaces en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Ce *complexe* de droites a été considéré par M. Chasles, et, dans ces derniers temps par MM. Reye, Klein et Lie. Il se transforme par l'homographie dans le complexe des normales aux surfaces homofocales du second ordre. Dans ce cas, on sait déterminer *tous* les systèmes d'ordre quelconque normaux à ces droites (*). Nous le rencontrerons aussi dans l'étude des réseaux. Signalons dès à présent cette propriété : Quand un point A décrit une surface d'ordre n, les droites correspondantes forment une *congruence* d'ordre n et de classe $3n - \alpha$, α étant le nombre de fois que la surface passe par des sommets du tétraèdre. Ainsi à une surface du second ordre correspondent tous les systèmes de rayons rectilignes d'ordre 2 et de classe égale ou inférieure à 6. On retrouve, comme cas particulier, le problème des normales à une surface du second ordre.

Réseaux. — Les réseaux sont, *en général*, formés de surfaces passant par huit points. Dans ce cas, à un point A correspond un seul conjugué A'. Les droites AA' coupent les surfaces suivant des segments en involution, elles forment un *complexe* très-important du troisième ordre. Ce complexe peut aussi être considéré comme formé des génératrices rectilignes de toutes les surfaces, ou, ce qui revient au même, des sécantes doubles ou des tangentes de toutes les courbes du quatrième ordre, intersections de deux quadriques du réseau. Toutes les droites passant par un point O forment un cône du troisième ordre, ayant pour directrice la courbe du quatrième ordre, intersection des surfaces du réseau passant en O. Les huit droites qui

(*) En général, étant données les normales à un système de surfaces, on peut déterminer sans intégration tous les systèmes de surfaces normales aux mêmes droites. Cette propriété, très-utile, et dont la démonstration est des plus simples, ne paraît pas connue; du moins elle n'est pas signalée dans les travaux recents sur les droites qui remplissent l'espace.

joignent O aux points communs, les vingt-huit droites qui, partant de ce point, sont des sécantes doubles des vingt-huit cubiques gauches passant par six des huit points communs, ces trente-six droites sont sur le cône du troisième ordre (*). Celles de ces droites qui sont dans un plan P enveloppent une courbe du sixième ordre et de la troisième classe, la cayleyenne du réseau des coniques sections des surfaces par le plan P.

Le cône du troisième ordre se décompose en un cône du second ordre et un plan dans deux cas différents. On sait que les cônes du réseau ont leurs sommets sur une courbe du sixième ordre K_6. Toutes les fois que le point O se trouve sur cette courbe, le cône du complexe se décompose en un plan et en un cône du second ordre, qui est le cône du réseau ayant son sommet en O. Les cônes du système enveloppent une surface de la huitième classe et du vingt-quatrième ordre, pour les points de laquelle le cône du complexe acquiert une génératrice double. Les plans dans lesquels se décompose le cône quand O est sur K_6, enveloppent une surface développable de la quatorzième classe. Il y a des théorèmes analogues relatifs aux droites situées dans un plan. Enfin, quand le point O se trouve sur une des vingt-huit cubiques gauches du réseau, le cône du complexe se dé-décompose en un cône du second ordre contenant la cubique gauche, et un plan passant par les deux points communs aux surfaces non situés sur la cubique considérée.

La courbe K_6 a été étudiée par M. Hesse (*Journal de Crelle*, t. XLIX), dans un de ses plus importants Mémoires. Elle n'est jamais sur une surface du second ordre et six de ses points ne sont jamais sur une conique. On reconnaît facilement dans quel cas elle se décompose, ce qui est important pour l'étude qui va suivre.

Puisqu'à un point A correspond un autre point conjugué A′ et inversement, on a un mode de transformation *involutive*, analogue à la transformation de Mœbius. A une surface d'ordre n contenant la ligne K_6 comme ligne multiple d'ordre q correspond une surface d'ordre $3n - 8q$ contenant K_6 comme ligne multiple d'ordre $n - 3q$.

(*) Il faut ajouter à ces vingt-huit droites, vingt-huit autres droites passant par O, coupant à la fois une des cubiques gauches, et la droite qui joint les deux points communs aux surfaces qui ne sont pas sur cette cubique.

C'est ainsi qu'à un plan correspondent toutes les surfaces du troisième ordre contenant K_6, à une surface du quatrième ordre contenant K_6 correspond une surface de même genre, etc. A une courbe d'ordre n, coupant la courbe des sommets en α points, correspond une courbe d'ordre $3n - \alpha$ coupant en $8n - 3\alpha$ points, etc.

Les sécantes triples de la courbe K_6 forment une surface réglée du huitième ordre, qui est la jacobienne du système des surfaces du troisième ordre passant par la courbe, et qui contient six droites de chacune des surfaces.

Il n'est pas exact que les équations de trois quadriques puissent être ramenées à la forme canonique

$$\begin{aligned} f &= \Sigma_1^5 \lambda_i P_i^2 = 0, \\ f_1 &= \Sigma_1^5 \mu_i P_i^2 = 0, \\ f_2 &= \Sigma_1^5 \nu_i P_i^2 = 0. \end{aligned}$$

Les trois seconds membres contiennent bien trente constantes, mais on peut montrer que, si la transformation est possible d'une manière, elle le sera d'une infinité d'autres manières, et l'on est ainsi conduit au théorème suivant :

En général, on ne peut pas trouver de pentagone dont les sommets non adjacents soient conjugués à la fois dans trois surfaces, et quand on trouve un de ces pentagones, il y en a une infinité d'autres jouissant de la même propriété. Leurs sommets décrivent la courbe K_6, *leurs plans enveloppent une cubique gauche et leurs côtés décrivent la surface réglée du huitième ordre engendrée par les sécantes triples de la courbe* K_6 (*).

Les réseaux de quadriques présentent plusieurs cas particuliers dignes d'attention. Si les quadriques ont une droite commune, le

(*) Le théorème précédent est analogue aux théorèmes de Poncelet. Voici d'autres propositions du même genre qu'on déduit de notre théorème fondamental :

L'équation $\Sigma_1^9 \lambda_i P_i^4 = 0$ contient trente-six constantes, une de plus qu'il n'y en a dans l'équation générale des surfaces du quatrième ordre ; cependant elle ne peut représenter la surface générale de cet ordre ; pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'un invariant du dixième ordre par rapport aux coefficients soit nul, et alors la transformation précédente est possible d'une infinité de manières, les plans P restant tangents à une surface du second degré.

Si l'on peut trouver un polygone circonscrit à une conique et dont tous les sommets soient sur une courbe algébrique, il y en aura une infinité d'autres jouissant de la même propriété.

complexe des génératrices se divise en deux, les génératrices d'un système vont rencontrer la droite commune, les autres forment un *complexe du second ordre identique* à celui que nous avons rencontré dans l'étude des faisceaux.

Systèmes du troisième ordre. — Les systèmes généraux du troisième ordre ont été peu étudiés. La *jacobienne* du système est une surface très-remarquable du quatrième ordre. On sait qu'elle peut être considérée de trois manières différentes : 1° comme le lieu des sommets des cônes du système ; 2° comme le lieu des paires de points conjugués par rapport à toutes les surfaces ; 3° comme le lieu des points où se touchent deux surfaces du système. La *hessienne* d'une surface du troisième ordre, qui est la jacobienne d'un réseau particulier, a été étudiée par plusieurs géomètres, notamment par M. Cremona (*Journal de Borchardt*, t. LXVIII). Mais la jacobienne la plus générale, qui n'a pas de point double, mérite une étude spéciale. Si on lui adjoint une surface du quatrième ordre, que j'appellerai la *discriminante*, on a un système très-important de deux surfaces qui se partagent, au grand avantage de la netteté, les propriétés de la hessienne d'une surface cubique.

La jacobienne contient, on le sait, les dix droites qui sont les arêtes des couples de plans du système. Elle contient en outre : 1° dix cubiques gauches, sécantes doubles chacune de neuf droites ; 2° cent-vingt cubiques gauches sécantes de trois droites ; 3° quarante-cinq séries de courbes du quatrième ordre rencontrant huit droites, auxquelles il faut associer quarante-cinq autres séries de courbes de même ordre ne rencontrant que deux droites. Les propriétés des points conjugués sont les mêmes que pour la hessienne et se démontrent de la même manière.

La *discriminante* contient en général dix points doubles et ne contient pas de droite. Chaque point commun aux surfaces du système ajoute un point double à la discriminante (et à la jacobienne), en sorte que le système des surfaces passant par six points a pour discriminante la surface à seize points singuliers, et pour jacobienne une surface ayant vingt-cinq droites et six points doubles. Ces deux surfaces se correspondent point par point, comme dans le cas général.

Les dix points doubles de la discriminante ne sont jamais sur une surface du second ordre. Le théorème suivant donne la relation entre ces points :

Si de l'un des points doubles on fait la perspective des neuf autres sur un plan, les neuf projections appartiennent à une infinité de courbes du troisième ordre; le cône circonscrit à la surface, et ayant pour sommet l'un des points doubles, se décompose en deux cônes du troisième ordre.

En examinant les relations entre les points des deux surfaces J et D, on est conduit à des relations analogues à celles que M. Hesse a données entre la courbe plane du quatrième ordre et la courbe K_6; mais notre théorème fondamental permet, de plus, de faire correspondre non-seulement les points des deux surfaces, mais encore des éléments en dehors de ces deux surfaces. C'est ainsi qu'à un plan correspond une surface du troisième ordre à quatre points doubles, tangente à D, en tous les points d'une courbe du sixième ordre. Les lignes asymptotiques de cette cubique se déterminent sans difficulté, grâce au mode de correspondance indiqué ici (*).

Mais pour compléter l'ensemble des relations géométriques, il est nécessaire d'adjoindre aux surfaces précédentes une troisième surface beaucoup plus compliquée. C'est la surface *focale* de la congruence

---

(*) Les lignes asymptotiques de cette surface donnent celles de la surface de Steiner. On déduit, du reste, les lignes asymptotiques de beaucoup de surfaces du théorème suivant : *Soit une surface pour laquelle les coordonnées de l'un des points s'expriment par les formules*

$$x = A(\rho - a)^m(\rho_1 - a)^n,$$
$$y = B(\rho - b)^m(\rho_1 - b)^n,$$
$$z = C(\rho - c)^m(\rho_1 - c)^n,$$

l'équation différentielle des lignes asymptotiques sera

$$m(m-1)\frac{d\rho^2}{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)} = n(n-1)\frac{d\rho_1^2}{(\rho_1-a)(\rho_1-b)(\rho_1-c)}.$$

Ce théorème donne les lignes asymptotiques de la *surface des centres de courbure* de l'ellipsoïde, de la surface de Steiner, etc.

J'ajouterai que les lignes asymptotiques de la surface de Steiner ont deja été déterminées par MM. Clebsch et Gordan (*Journal de Borchardt*, t. LXVIII, p. 1).

La proposition qui précède conduit en particulier à cette consequence, qu'on sait déterminer les lignes asymptotiques des surfaces comprises dans l'equation

$$Ax^m + By^n + Cz^n + Dt^n = 0.$$

Ces surfaces remarquables, considérees par Lamé et plusieurs autres géomètres, comprennent, comme cas limite, les surfaces dont l'équation est

$$x^m y^n z^p = C,$$

et qui ont été étudiées par M. J.-A. Serret et M. Combescure.

En se bornant au cas du troisième ordre, on voit qu'on sait déterminer les lignes asymptotiques de la surface dont la Hessienne se reduit à quatre plans.

formée par les droites joignant deux paires de points conjugués. Ces droites sont celles qui coupent toutes les surfaces du système suivant des segments en involution. Elles forment un système de rayons rectilignes d'ordre 7 en général, et de classe 3. Leur surface focale est en même temps l'enveloppe des cônes du système. On construit géométriquement les points de contact de chaque rayon, les plans tangents en ces points : les propriétés de la surface rappellent celles de la cayleyenne d'un réseau de coniques. Les huit droites qui joignent les huit points communs à trois surfaces quelconques du système sont tangentes doubles de cette surface. Elle est en général de l'ordre 24 et de l'ordre 16. Son ordre diminue de quatre unités, sa classe de deux unités pour chaque point commun aux quadriques du système. Le cas le plus simple, celui où six points sont communs aux surfaces, est très-important. La surface se réduit à une cubique gauche passant par les six points, et l'on retrouve ce beau théorème de M. Paul Serret :

Toute droite qui coupe en involution quatre des systèmes de plans passant par six points est sécante double de la cubique gauche des six points.

Dans le cas où les surfaces ont un, deux, trois, quatre et cinq points communs, on retrouve les surfaces si remarquables à onze, douze,... et quinze points singuliers que M. Kummer a rencontrées dans ses belles études sur les rayons rectilignes. Tous les résultats qu'a trouvés M. Kummer s'expliquent ainsi géométriquement, les différents systèmes de rayons correspondant aux génératrices des surfaces du second ordre passant par les points fixes, les points doubles se divisant naturellement en deux classes, etc. Il faut cependant signaler une exception importante : l'on n'obtient pas la surface du douzième ordre sans plan singulier. Nous avons déjà rencontré cette surface dans un problème relatif aux faisceaux.

L'application de la discriminante sur un plan double s'effectue conformément à la méthode de M. Clebsch. La courbe de passage se compose de deux courbes du troisième ordre. La correspondance entre la surface à seize points singuliers D et la surface J, lieu des sommets des cônes passant par six points, est très-remarquable. Aux six points doubles de J correspondent six points doubles de D; les dix autres points doubles de cette surface correspondent aux dix droites, arêtes des couples de plans passant par les six points. Les seize coniques singulières de D correspondent à la cubique gauche des six points et aux quinze droites joignant les six points. Enfin, les tangentes doubles de D se divisent en six systèmes correspondants aux systèmes de droites passant par les six points doubles de J.

Si l'on se propose de ramener les quatre équations des surfaces du système à la forme canonique,

$$f = \Sigma_1^6 \lambda_i P_i^2 = 0,$$

les quatre équations ainsi obtenues contiennent quarante-deux constantes. Il est possible cependant de montrer que si l'on a obtenu ces équations, on peut les transformer de manière à y introduire trois arbitraires; elles ne sont donc pas applicables à un système de quatre surfaces quelconques. On obtient ainsi le théorème suivant :

On ne peut pas, en général, trouver un hexaèdre dont les sommets opposés soient conjugués à la fois par rapport à quatre surfaces, et, quand il y a un hexaèdre satisfaisant à cette définition, il y en a une infinité d'autres. Les plans de ces différents hexaèdres enveloppent une surface du second ordre, leurs vingt sommets décrivent la jacobienne du système (*).

Systèmes du quatrième ordre. — A ces systèmes formés de cinq surfaces correspond un réseau d'enveloppes du même ordre. Il y a à considérer une courbe K_{10} du dixième ordre, et une développable D_{10} de dixième classe, réciproque de la première courbe.

Toute surface du quatrième ordre passant par K_{10} est la jacobienne de quatre surfaces du système, toute surface de quatrième classe inscrite dans D_{10} est la jacobienne tangentielle de quatre surfaces du système conjugué. Les points de K_{10} et les plans de D_{10} se groupent par paires aa', AA' conjuguées les unes par rapport aux autres.

Les droites aa' forment une surface réglée du dixième ordre R_{10}; par chacune de ces droites on peut mener quatre plans tangents à D_{10}.

Les droites AA' forment une surface réglée du même ordre R'_{10} coupant chaque jacobienne suivant dix droites et suivant K_{10} qu'elle

(*) Dans certains cas, l'indétermination des plans de l'hexaèdre est plus grande; cela se présente en particulier pour la hessienne d'une surface cubique.

a pour ligne triple. Cette surface réglée est le lieu des arêtes des couples de plans du système (*).

Ces propriétés sont évidentes, quand on connaît les relations des deux systèmes.

Ici se termine, grâce au théorème fondamental qui réduit de moitié le nombre des problèmes, l'étude des questions proposées. J'indiquerai en terminant les théorèmes suivants :

L'équation

$$\Sigma_1^7 \lambda_i P_i^2 = 0$$

représente toutes les surfaces conjuguées aux surfaces enveloppes inscrites dans les sept plans P_i. On peut toujours mettre les équations de sept surfaces sous la forme précédente, et cela de huit manières différentes.

Des équations de la forme

$$\Sigma_1^8 \lambda_i P_i^2 = 0$$

représentent toutes les surfaces conjuguées aux surfaces inscrites dans une même développable ; douze équations de la forme précédente contiennent cent-vingt constantes, et paraissent pouvoir représenter douze surfaces. Cependant on ne peut employer ces équations que pour huit surfaces.

L'équation

$$\Sigma_1^9 \lambda_1 P_1^2 = 0$$

représente toutes les surfaces conjuguées à la surface inscrite dans les neuf plans. Quoique 27 équations de cette forme renferment 270 constantes, on ne peut pas les appliquer à plus de neuf surfaces.

On obtient ainsi comme cas particulier la proposition fondamentale dont M. Paul Serret a fait usage dans son livre sur la *Géométrie de Direction*.