Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 1 (1870), p. 331-348

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1870__1__331_1>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

GIORNALE DI MATEMATICHE. 8e année. Juillet-décembre 1870 (**).

TOGNOLI (O.). — *Sur une extension de propriétés relatives à des courbes algébriques planes d'ordre quelconque, aux surfaces algébriques de degré quelconque.* (Suite et fin, 7 p.)

Les articles contenus dans cette partie du Mémoire ont pour titres : 1° De la pampolaire d'un faisceau et d'un réseau de surfaces; 2° Cordes tangentes; 3° Plans tangents en des points conjugués; 4° Points doubles d'un réseau et d'un faisceau de polaires internes.

(*) SPITZ (Dr C.), professeur à l'Institut Polytechnique de Carlsruhe. — *Premières Leçons de Calcul différentiel et intégral, avec un recueil de* 1450 *exemples et exercices*, à l'usage des écoles supérieures et des personnes qui étudient seules. — Leipzig et Heidelberg, Winter, 1871. 1 vol. in-8°, 629 p. Prix : $3\frac{1}{2}$ Thlr.

(**) Voir *Bulletin*, p. 152.

Cassani (P.). — *Sur le triangle conjugué de deux coniques.* (2 p.)

Détermination de ce triangle, en cherchant les points qui ont là même droite polaire par rapport à deux coniques.

Cassani (P.). — *Solution de la question n° 178 des* Nouvelles Annales. (2 p.)

Par un point donné, mener un cercle deux fois tangent à une parabole donnée.

Orlando (D.). — *Démonstration de quelques théorèmes de Géométrie.* (2 p.)

Del Grosso (R.). — *Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes.* (Suite et fin, 2 art., 49 p.)

Avec la suite du Chapitre VIII sur l'attraction des couches de niveau, se termine la Première Partie du Mémoire. La Seconde Partie traite de l'attraction d'une masse de densité variable, limitée par une surface peu différente de la sphère, et contient les Chapitres suivants : *Chap.* I. Développement en série de la valeur inverse de la distance de deux points. — *Chap.* II. Fonctions sphériques et leur propriétés principales. — *Chap.* III. Potentiel d'une couche sphérique de densité variable. — *Chap.* IV. Attraction d'un sphéroïde peu différent de la sphère.

Regis (D.). — *Sur une application des principes d'homologie à la perspective.* (4 p.)

Regis (D.). — *Sur le nombre des racines réelles que peut avoir l'équation* $x^m - px + q = 0$. (2 p.)

La démonstration est fondée sur la représentation géométrique des équations $y = x^m + q$ et $y = px$, x et y étant les coordonnées orthogonales d'un point.

Aschieri (F.). — *Sur un complexe du second degré. — Génération géométrique des complexes du premier degré.* (6 p.)

Quelques propriétés des complexes du second degré dont l'équation peut se réduire à contenir seulement les carrés des coordonnées de la ligne droite. Ces propriétés consistent en des relations harmoniques que les droites du complexe déterminent avec une série de surfaces du second degré conjuguées au tétraèdre fondamental. Quant à la génération géométrique des complexes du premier degré, l'auteur trouve le théorème suivant : « Par tout quadrilatère gauche, » formé avec quatre droites d'un complexe linéaire, est déterminée » une dépendance homographique, par laquelle le complexe est le » lieu des droites qui rencontrent suivant des systèmes de points en » involution deux faisceaux projectifs de plans, ayant pour axes un » couple de côtés opposés du quadrilatère. »

Jung (G.). — *Démonstration d'un théorème de Géométrie.* (6 p.)

D'Ovidio (E.). — *Note sur les points, plans et droites en coordonnées homogènes.* (44 p.)

Riche recueil de relations métriques très-générales, relatives aux angles entre les droites ou les plans, aux distances entre les points, aux aires des triangles, aux volumes des tétraèdres, aux moments géométriques.

Bitonti (V.-N.). — *Solution de quelques questions de Trigonométrie et de Géométrie, proposées dans l'*Educational Times. (5 p.)

Padova (E.). — *Sur deux théorèmes de M. Neumann.* (6 p.)

Démonstration de deux théorèmes relatifs à la théorie du potentiel, énoncés par M. Neumann dans le tome II des *Mathematische Annalen,* et extension de ces théorèmes à l'espace à *n* dimensions.

Janni (G.). — *Exposition de la Nouvelle Géométrie de Plücker.* (25 p.)

Reproduction du Mémoire de Plücker sur les fondements de la Nouvelle Géométrie de l'espace, contenant principalement les propriétés des complexes, des congruences et des configurations linéaires.

Padova (E.). — *Du mouvement d'un ellipsoïde dans un fluide incompressible et indéfini.* (6 p.)

L'auteur, suivant la méthode employée par Riemann pour traiter le problème de la détermination du mouvement d'un corps homogène dans un fluide indéfini et incompressible, quand les forces qui sollicitent les divers points du corps sont égales entre elles en direction et en intensité, et pour appliquer la solution générale de ce problème au cas où le corps mobile est une sphère, traite le cas où le corps mobile est un ellipsoide à trois axes.

Mollame (V.). — *Solution de quelques questions de Géométrie, proposées dans l'*Educational Times. (4 p.)

Bitonti (V.-N.). — *Solution d'une question tirée du même recueil.* (3 p.)

Cassani (P.). — *Note sur la conique des neuf points et des neuf droites.* (3 p.)

L'équation de la conique est donnée sous la forme d'un déterminant jacobien. G. B.

COMPTES RENDUS hebdomadaires des séances de l'Académie Sciences, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (*).

T. LXX.

N° 23. Séance du 6 juin 1870.

P. Secchi. — *Sur le déplacement des raies observées dans le spectre solaire.*

M. Mannheim. — *Détermination du plan osculateur et du rayon de courbure de la trajectoire d'un point quelconque d'une droite que l'on déplace en l'assujettissant à certaines conditions.*

Si l'on considère le déplacement d'une droite dans l'espace, on peut se proposer de déterminer, pour la trajectoire d'un de ses points : 1° la tangente à cette trajectoire ; 2° le plan osculateur ; 3° le rayon de courbure. En faisant usage de la notion si importante de la droite conjuguée due à M. Chasles, M. Mannheim a donné la solution complète de la première question dans son *Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable* (**).

Pour les deux autres questions qui n'ont pas encore été traitées, M. Mannheim est conduit à introduire une nouvelle droite, qu'il propose d'appeler *deuxième conjuguée*, et qui permet d'obtenir, de la manière la plus simple, tous les éléments géométriques du second ordre.

M. C. Wolf. — *Observations relatives à la division décimale des angles et du temps, proposée par M. d'Abbadie.*

« Tout en appréciant les raisons que M. d'Abbadie vient de déve-

---

(*) Voir *Bulletin*, p. 316.

(**) *Mémoires des Savants étrangers*, t. XX, et *Journal de l'École Polytechnique*, 43e cahier.

lopper, pour la division décimale correspondante des angles et du temps, il me semble, dit M. Wolf, qu'on obtiendrait les mêmes avantages, d'une manière plus simple et même plus rationnelle, en appliquant la division décimale au cercle et au jour, et non pas au quart du cercle et au quart du jour. Dans le cercle et dans le jour, nous possédons des unités données par la nature; en prendre le quart pour une nouvelle unité, c'est introduire tout d'abord quelque chose d'arbitraire. Outre cela, la division décimale du jour est déjà en usage dans maints calculs astronomiques, tandis que, vraisemblablement, les Astronomes ne se prêteraient pas très-facilement à adopter le quart du jour en unité. »

M. d'Abbadie répond en ces termes :

« Le quart du cercle est l'unité naturelle, employée de tout temps pour les fonctions trigonométriques; je n'ai pas proposé de changer cette unité, mais bien de la diviser décimalement, en revenant aux idées si justes de Lagrange, Laplace, Ideler, Borda, etc. Les analystes ont toujours rapporté les fonctions de l'angle au quadrant et non au cercle entier. Si le jour tout entier était divisé en 10 ou en 100, on ne pourrait, sans une multiplication préalable, prendre le sinus, etc., d'un angle horaire, ainsi que le besoin s'en fait sentir continuellement. On a bien plus rarement la nécessité de diviser la circonférence par 10; mais, dans ce cas, il suffirait de diviser par 4 le fractionnement décimal proposé par Lagrange, et appliqué au temps, en prenant comme unité l'intervalle de six heures. J'ai peine à comprendre ce qu'il y a d'arbitraire dans le quart du cercle pris comme unité. »

Il nous semble que, en définitive, dans cette discussion, tout le monde a raison. S'il n'y avait que le temps à compter, le jour serait l'unité la plus naturelle; on ne peut méconnaître, d'autre part, que le quadrant ne soit l'unité désignée pour les angles. Si l'on veut, comme cela serait très-utile, faire concorder les deux divisions, il faut de toute nécessité sacrifier une des deux unités naturelles, mais nous ne pouvons admettre, avec M. Wolf, que le cercle entier soit l'unité naturelle des angles.

MM. Klein et Lie. — *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces.*

Dans cette Note se trouvent rapidement résumés les résultats d'une étude neuve et importante, entreprise par les deux jeunes géomètres de Gœttingue et de Christiania.

Ces deux savants se sont proposés la question suivante : Trouver toutes les courbes et toutes les surfaces qui se transforment en elles-mêmes par une infinité de transformations linéaires ou homographiques, permettant d'amener, en général, chaque point de la courbe en tout autre point.

Parmi ces transformations, il y en a qui amènent tous les points dans des positions infiniment voisines. On est ainsi conduit à un système d'équations différentielles dont on obtient l'intégrale la plus générale.

Les courbes, résultat de cette intégration, et définies par la propriété que nous venons d'indiquer, sont appelées, pour abréger, des *courbes* V. On remarque parmi elles les paraboles, la spirale logarithmique, les courbes gauches du quatrième ordre avec rebroussement, les transformées linéaires de la loxodromie sur la sphère.

Quant aux surfaces V, elles comprennent toutes celles qui sont les transformées homographiques des surfaces comprises dans l'équation

$$x^a y^b z^c = \text{const.},$$

etc., etc.

La Note se termine par l'énoncé d'une proposition très-générale, relative à ces courbes et à ces surfaces.

N° 24. Séance du 13 juin 1870.

M. Yvon Villarceau. — *Remarques relatives à la division décimale des angles et du temps.*

M. Villarceau pense avec M. Wolf que l'unité naturelle des angles est le *cercle* ou le *tour*. Il croit qu'il y aurait avantage à adopter cette unité d'angle à la place du *quadrant,* dont le nom même rappelle qu'il ne peut être une unité.

M. Le Besgue. — *Démonstration de la méthode de Jacobi pour la formation de la période d'une racine primitive.*

Cette démonstration très-intéressante n'est malheureusement pas de nature à être analysée.

M. Combes. — *Note accompagnant la présentation de l'*Introduction à la Mécanique industrielle de Poncelet.

On sait que cet ouvrage de Poncelet a été publié en 1829; il était destiné à compléter les leçons que Poncelet professait, à cette époque, aux ouvriers de la ville de Metz. La deuxième édition, plus complète, fut mise à l'impression vers 1830; elle ne fut publiée qu'en 1839.

La nouvelle édition est augmentée de Notes dues à la plume de M. Kretz, et dans lesquelles sont exposées les notions essentielles sur la Théorie mécanique de la chaleur. Voici comment s'exprime M. Combes au sujet de cet ouvrage de Poncelet :

« L'*Introduction à la Mécanique industrielle* est une des œuvres les plus achevées de Poncelet. Elle porte l'empreinte de ce génie sagace, laborieux, patient, difficile pour lui-même, qui voulait et savait creuser son sujet jusqu'au fond. Quoiqu'elle sorte du cercle des sciences abstraites, elle a gardé et conservera dans l'avenir toute son utilité et sa valeur scientifique; elle restera un modèle des Traités de Mécanique appliquée, et ne contribuera pas moins que les travaux qui l'ont précédée à la gloire de notre confrère. »

M. A. Mannheim. — *Construction de l'axe de courbure de la surface développable enveloppe d'un plan dont le déplacement est assujetti à certaines conditions.*

Dans cette nouvelle Communication, M. Mannheim considère la figure invariable formée par un système de plans parallèles à une même droite, et il établit la liaison qui existe entre les courbures des surfaces développables que ces plans enveloppent pendant leur déplacement.

Pour la développable enveloppe d'un plan, M. Mannheim emploie la droite d'intersection de deux plans normaux infiniment voisins menés par deux génératrices voisines de la surface, et il appelle cette droite *axe de courbure*. En employant les théorèmes relatifs au déplacement d'un solide invariable démontrés dans ses études précédentes, l'auteur est conduit à la solution du problème suivant :

« Quatre plans parallèles à une même droite G forment une figure de grandeur invariable se déplaçant en touchant respectivement quatre surfaces données; construire, à un instant quelconque, l'axe de courbure de la développable enveloppe d'un plan invariablement lié aux premiers, et qui est aussi parallèle à G. »

M. Norman-Lockyer. — *Observations spectroscopiques du Soleil.*

M. Winnecke. — *Éphéméride de la nouvelle comète observée.*

MM. Klein et Lie. — *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces.*

Dans cette Note, MM. Klein et Lie complètent la Communication faite par eux dans la séance du 6 juin, en ajoutant un grand nombre de théorèmes importants à ceux qu'ils ont déjà donnés.

M. J. Boussinesq. — *Essai sur la théorie de l'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi* (suite).

(*Voir* la séance du 31 janvier, *Bulletin*, p. 32.)

M. Clausius. — *Sur une quantité analogue au potentiel et sur un théorème y relatif.*

Dans cette Note, M. Clausius établit le théorème suivant de Mécanique : Soit donné un système de points matériels m, m', m'',... de coordonnées x, y, z; x', y', z';..., qui sont soumis à des forces dont les composantes sont X, Y, Z; X',.... Formons la somme

$$\sum \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$

ou, en désignant par v, v', v'',.. les vitesses des points, la somme $\sum \frac{mv^2}{2}$, appelée *force vive du système,* et formons de plus la somme

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}(\mathrm{X}x + \mathrm{Y}y + \mathrm{Z}z),$$

dont M. Clausius appelle la valeur moyenne le *viriel du système.* On peut énoncer le théorème suivant :

La force vive moyenne du système est égale à son viriel.

M. Maurice Levy. — *Mémoire sur les équations générales des mouvements ultérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état.* Mémoire présenté. (Extrait.)

Dans ce Mémoire se trouvent établies pour des mouvements quelconques dans l'espace, et aussi pour ceux du cas important où tout est symétrique autour d'un axe, les équations générales de ces mouvements de déformation des masses ductiles, qui avaient été données par M. de Saint-Venant, dans une Note du 7 mars 1870, pour le seul cas de mouvements tous semblables dans des plans parallèles, où l'on peut abstraire la dimension qui leur est perpendiculaire, et ne considérer que deux des trois coordonnées des points.

M. G. DARBOUX. — *Sur la surface des centres de courbure d'une surface algébrique.*

Dans cette Note se trouvent déterminés l'ordre, la classe, et quelques-unes des singularités de la surface des centres de courbure. Il faut indiquer que déjà, dans un Mémoire sur les caractéristiques des systèmes de surfaces du second ordre, inséré aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. VII, 2e série), M. Zeuthen avait résolu quelques-unes des questions traitées par M. Darboux.

N° 26. Séance du 27 juin 1870.

M. HOÜEL. — *Sur le choix de l'unité angulaire.*

Cette Note se rapporte à la discussion dont nous avons déjà parlé plus haut; elle nous paraît concluante.

M. YVON VILLARCEAU. — *Observations relatives à l'objet de la Communication qui précède.*

M. HOPPE. — *Corollaire au théorème de M. Crofton.*

Cette Note se rapporte à un théorème dont nous avons déjà parlé et qui a été donné dans les *Comptes rendus* (t. LXV, p. 994). M. Hoppe fait au sujet de ce théorème et de la démonstration qui en a été donnée par M. Serret une remarque ingénieuse. L'expression de l'intégrale étendue à l'aire se compose de trois parties, l'une algébrique, l'autre circulaire et enfin la dernière est le produit d'un logarithme par la surface d'un polygone. Or on sait que ces trois formes sont irréductibles l'une à l'autre. Alors en séparant ces trois espèces de termes, le théorème de M. Crofton se décompose en trois autres.

M. F. LUCAS. — *Nouvelles propriétés de la fonction potentielle.*

Cette Note traite surtout des propriétés du potentiel dans un système d'atomes. Nous rendrons compte du travail *in extenso* publié dans le journal de M. Liouville.

M. MARTIN DE BRETTES. — *Détermination de l'épaisseur du blindage en fer que peut traverser un projectile dont on connaît le poids, le calibre et la vitesse d'arrivée.*

T. LXXI.

N° 1. Séance du 4 juillet 1870.

M. DELAUNAY. — *Note sur les pyramides de Villejuif et de Juvisy.*

M. Serret. — *Rapport sur un Mémoire de M. Bouquet, relatif à la théorie des intégrales ultra-elliptiques.*

« Le Mémoire de M. Bouquet dont l'Académie nous à chargés de lui rendre compte se rapporte au célèbre théorème d'Abel sur les transcendantes ultra-elliptiques, et il a exclusivement pour objet la démonstration d'un théorème nouveau qui peut être regardé comme un complément de celui d'Abel, au moins en ce qui concerne le cas le plus simple des transcendantes de *première espèce* d'une *classe* quelconque. Ce cas est le seul que l'auteur ait developpé, mais l'analyse dont il a fait usage est assurément susceptible d'extension.

» Dans le cas dont il s'agit, le théorème d'Abel assigne une valeur constante à une certaine somme d'intégrales du même élément différentiel, prises avec des signes convenables; on peut supposer que les limites inférieures de ces intégrales soient zéro, et les limites supérieures sont des variables liées entre elles par des équations algébriques.

» C'est l'étude de la *constante* du théorème d'Abel que M. Bouquet a entreprise, et cet habile géomètre est parvenu à démontrer qu'on en obtient la valeur en ajoutant entre eux un certain nombre d'*éléments fixes,* après les avoir multipliés par des nombres entiers, qui peuvent être positifs, nuls ou négatifs. Les éléments dont je parle sont des intégrales définies qui répondent au même élément différentiel que celles à la limite supérieure variable auxquelles se rapporte le théorème d'Abel; elles sont prises, comme celles-ci, à partir de zéro, et leurs limites supérieures sont les valeurs de la variable pour lesquelles l'élément différentiel devient infini.

» La démonstration que M. Bouquet a donnée de son théorème est remarquable par sa simplicité. Prenant pour point de départ des résultats importants dus à ses devanciers et particulièrement à M. Puiseux, l'auteur a su mettre habilement à profit la considération, reconnue aujourd'hui indispensable, de l'intégration exécutée suivant des contours quelconques.

» Le résultat obtenu par M. Bouquet remplit un *desideratum* signalé à plusieurs reprises par Legendre. L'illustre fondateur de la théorie des fonctions elliptiques a développé dans le tome III de son ouvrage (3^{me} supplément) un grand nombre d'applications du théorème d'Abel; et il s'est occupé, à l'égard de quelques transcendantes particulières, de la détermination de la constante. « Cette question,

» dit-il, dont il ne paraît pas qu'on puisse donner la solution *a priori* » et d'une manière générale, mérite de fixer l'attention des analystes » par les résultats très-peu variés et très-simples qu'on obtient cons- » tamment dans les cas particuliers. » Traitant à un autre endroit des mêmes transcendantes particulières, il affirme, quoiqu'il n'en ait pas la démonstration, que la constante peut toujours s'exprimer par les deux mêmes *éléments*, quel que soit le nombre des intégrales dont la somme algébrique a pour valeur cette constante; et il ajoute : « Des exemples nombreux appuient cette assertion, que la théorie » n'a pas jusqu'à présent établie d'une manière absolument cer- » taine. »

» La généralité de ce fait analytique, qu'admettait Legendre, est mise hors de doute par le théorème de M. Bouquet, duquel elle résulte immédiatement.

» En résumé, le Mémoire de M. Bouquet renferme un résultat nouveau et intéressant. Nous proposons donc à l'Académie de lui accorder son approbation, et d'en ordonner l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

MM. C. Wolf et Rayet. — *Sur lal umière de la comète de Winnecke.* (Comète I, 1870.)

M. E. Catalan. — *Remarques sur une Note de M. Darboux, relative à la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde.*

Dans une précédente Communication (*), M. Darboux a eu à considérer l'équation différentielle des lignes de courbure, et il avait énoncé la proposition générale suivante :

Étant donnée une équation différentielle

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

si l'on cherche le lieu des points du plan pour lesquels deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ fournies par l'équation précédente deviennent égales, le lieu de ces points n'est pas en général l'enveloppe des solutions particulières. C'est un lieu de points de rebroussement pour les courbes

(*) Voir *Bulletin*, p. 339.

représentant les différentes solutions particulières. Par exemple, si l'on considère l'équation simple

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + B\frac{dy}{dx} + C = 0,$$

l'équation

$$R = B^2 - 4AC = 0$$

représente une courbe pour les points de laquelle les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ deviennent égales; mais cette courbe n'est pas en général l'enveloppe des courbes représentant les solutions particulières. Ce théorème est confirmé par plusieurs exemples géométriques très-généraux. Ainsi, si l'on considère, sur une surface d'un ordre supérieur à 2 la courbe parabolique séparant les points pour lesquels la courbure de la surface est négative de ceux pour lesquels les rayons de courbure sont de même signe, cette ligne parabolique n'est pas tangente en général aux lignes asymptotiques; celles-ci ne peuvent pénétrer dans la région où la surface est convexe, elles viennent couper la ligne parabolique sous un angle fini et ont, sur cette ligne, un point de rebroussement.

Mais la proposition générale qui précède est, par sa nature même, sujette à des exceptions. Il est bien vrai, pour citer un exemple semblable, qu'en général une courbe n'a qu'une seule tangente en un point, qu'en général on ne sait pas intégrer une équation différentielle. M. Catalan a cependant contribué lui-même à réduire le nombre de celles qu'on ne sait pas intégrer. Aussi n'est-il pas difficile de donner une infinité d'exemples dans lesquels la proposition de M. Darboux est en défaut. Pour l'infirmer, il faudrait prouver qu'elle n'a pas lieu en général, et c'est ce que M. Catalan ne fait pas. Il y a là un simple malentendu.

M. Catalan indique encore dans sa Note certaines formules relatives à la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde, comme ayant été données par lui dans ses *Mélanges mathématiques*, p. 263. Enfin, il termine par trois propositions sur cette surface. Voici l'une de ces propositions :

Le long d'une même ligne de courbure de l'ellipsoïde, le rayon principal varie en raison inverse de la distance du centre au plan tangent.

N° 2. Séance du 11 juillet 1870.

Séance publique (*).

N° 3. Séance du 18 juillet 1870.

M. Duhamel *fait hommage à l'Académie du volume qui forme la quatrième partie de son ouvrage :* Des Méthodes dans les Sciences de raisonnement.

« J'ai l'honneur de présenter à l'Académie la dernière Partie de mon ouvrage sur les Méthodes dans les Sciences de raisonnement. Dans la première partie, j'ai exposé d'une manière générale la marche que l'on doit suivre dans la recherche ou la démonstration de la vérité, et dans l'établissement d'une science de raisonnement. J'en ai fait d'abord l'application aux sciences les plus simples, celle des nombres et celle de l'étendue : je considère aujourd'hui la science des forces.

» Les données des deux premières sont fondées, jusqu'à un certain point, sur l'observation ; mais elles sont d'une telle nature, que l'esprit conçoit qu'elles subsisteraient lors même que le monde matériel serait anéanti. Il n'en est pas de même de la science des forces ; elle dépend de la nature de ce monde, qui aurait pu être créé différent de ce qu'il est, et soumis à d'autres lois. Les données de cette science doivent donc reposer sur l'observation de ces lois, et sur des expériences propres à les manifester.

» Il est un point sur lequel nous espérons obtenir l'assentiment des géomètres et des philosophes : jusqu'ici, dans l'étude du mouvement produit par les forces, on a commencé par considérer ce qu'on appelle le *mouvement absolu ;* et ce n'est qu'après en avoir établi la théorie qu'on passe à celle du mouvement relatif. Nous nous sommes placé dans un ordre d'idées tout différent : nous ne fondons rien sur le mouvement ou le repos absolu ; nous n'en parlons même que pour combattre cette notion, qui ne repose que sur la fixité supposée des points de l'*espace absolu,* c'est-à-dire sur un cercle vicieux, où entre la considération d'un être purement imaginaire. »

M. de Saint-Venant. — *Démonstration élémentaire de la formule de propagation d'une onde ou d'une intumescence dans un canal prismatique, et remarques sur la propagation du son et de la lumière, ainsi que sur la distinction des rivières et des torrents.*

(*) Voir *Bulletin*, p. 254

M. Painvin. — *Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable, définie par ses équations tangentielles.*

Cette communication remplit une lacune qui existait dans les formules relatives aux courbes. Étant donnée une courbe définie par ses équations ordinaires, on saura trouver, en appliquant les formules usuelles, les éléments géométriques se rapportant à cette courbe. Mais il arrive assez souvent qu'une courbe ne peut être définie d'une manière simple que par ses plans osculateurs, ou, si l'on veut, par ses équations tangentielles. M. Painvin donne le moyen d'obtenir directement tous les éléments de la courbe.

L'application de ces formules à la surface développable circonscrite à une surface du second ordre et à une sphère a conduit M. Painvin à des résultats très-dignes d'intérêt. En particulier, l'arête de rebroussement de cette surface est *rectifiable*.

M. F. Lucas. — *De la possibilité d'obtenir des signaux de feu à longue portée.*

M. Sonrel. — *Étude photographique du Soleil à l'Observatoire de Paris.*

N° 4. Séance du 25 juillet 1870.

P. Secchi. — *Nouvelles remarques sur les spectres fournis par divers types d'étoiles.*

M. Faye. — *Sur une brochure nouvelle de M. Hirn.*

M. Bertrand. — *Rapport sur un Mémoire de M. Massieu, intitulé :* Mémoire sur les fonctions des divers fluides et sur la théorie des vapeurs.

Dans ce Rapport, M. Bertrand rend compte d'un important travail de M. Massieu, qui constitue un progrès des plus sérieux dans la théorie nouvelle de la chaleur.

« Le Mémoire de M. Massieu, dont nous venons rendre compte à l'Académie, nous semble conçu dans un excellent esprit. Acceptant sans les discuter et sans s'arrêter à les démontrer de nouveau les deux théorèmes importants dont on a fait la base de la théorie mathématique des effets calorifiques, M. Massieu s'attache d'abord à les résumer sous la forme la plus simple, et son travail apporte à cette théorie tant étudiée un progrès réel et incontestable.

» Le problème dont la solution rendrait la théorie parfaite et définitive serait celui-ci.

« Exprimer pour chaque corps, en fonction de deux variables » indépendantes, la température et la pression, par exemple, les » divers éléments physiques qui en dépendent, tels que le volume et » les deux caloriques spécifiques. En se bornant à ces trois inconnues » qu'il semble impossible de séparer, la théorie generale, résumée » dans deux théorèmes, dont l'un peut s'appeler *théorème de Carnot* » ou *de Clausius,* et l'autre *théorème de Mayer* ou *de Joule,* fournit » deux équations seulement entre trois inconnues, qui restent par » conséquent indéterminées, et il ne saurait en être autrement, » puisque les relations à obtenir changent complétement de forme » — cela paraît évident — avec la nature et l'état des corps. »

» La première partie du travail de M. Massieu, consacrée à ce problème général, en donne la solution complète et fort simple, dans l'expression de laquelle figure explicitement une fonction arbitraire qu'il nomme *caractéristique,* et dont la forme, variable d'une substance à l'autre, peut servir à caractériser chacune d'ellés en déterminant tous ses éléments calorifiques.

» L'intégration complète de deux équations différentielles partielles du second ordre doit sembler, dans l'état de la science, une bonne fortune inespérée qu'aucune méthode connue ne pourrait promettre. Aussi n'est-ce pas par cette voie que M. Massieu aborde le problème. Les deux équations dont il s'agit expriment, on le sait, que certaines expressions sont des différentielles exactes; c'est en prenant pour inconnues leurs intégrales, ou plutôt en les considérant comme données, que l'on obtient la solution dont l'extrême simplicité accroît plutôt qu'elle n'amoindrit le mérite. Nous croyons utile de donner ici l'expression complète des formules les plus simples définitivement adoptées par M. Massieu.

» Soit dQ la quantité de chaleur nécessaire pour faire passer un corps, de la température t à la température $t + dt$, et du volume v au volume $v + dv$; on sait que, p désignant la pression, et A un coefficient constant pour tous les corps, les expressions

$$dQ - Apdv,$$

$$\frac{dQ}{T},$$

où T désigne la température *absolue* comptée à partir de — 273 degrés, doivent être des différentielles exactes; et que c'est ainsi que peuvent se traduire les deux théorèmes fondamentaux de la théorie nouvelle.

» Posons donc

$$\frac{dQ}{T} = dS,$$

$$dQ - Apdv = dU;$$

nous en conclurons

$$dU + Apdv + SdT = SdT + TdS = d(TS);$$

on a donc

$$SdT + Apdv = d(TS - U).$$

Posons

$$H = TS - U,$$

nous aurons

$$dH = SdT + Apdv.$$

La fonction H est *caractéristique* du corps, et M. Massieu montre très-aisément que, cette fonction étant connue, l'on peut, par de simples différentiations, exprimer toutes les propriétés calorifiques du corps correspondant, au moyen de cette fonction H et de ses dérivées. On a, par exemple, pour représenter les deux chaleurs spécifiques,

$$k = T\left[\frac{d^2H}{dt^2} - \frac{\left(\frac{d^2H}{ds\,dv}\right)^2}{\frac{d^2H}{dv^2}}\right],$$

$$k' = T\frac{d^2H}{dt^2}.$$

Le coefficient de dilatation β à pression constante, c'est-à-dire le rapport de la dérivée du volume $\frac{dv}{dt}$ au volume lui-même, est

$$\beta = -\frac{1}{v}\frac{\frac{d^2H}{dv\,dt}}{\frac{d^2H}{dv^2}},$$

et le coefficient de dilatation à volume constant β' est

$$=\frac{\dfrac{d^2H}{dv\,dt}}{\dfrac{dH}{dv}}.$$

» Quoique cette première partie du Mémoire de M. Massieu ne contienne aucun principe théorique nouveau, et qu'elle se résume dans l'expression plus simple et plus élégante de deux théorèmes très-connus, nous n'hésitons pas à la déclarer très-digne de l'approbation de l'Académie; l'introduction de la fonction caractéristique dans les formules qui résument toutes les conséquences possibles des deux théorèmes fondamentaux semble, pour la théorie, un service analogue et presque équivalent à celui qu'a rendu M. Clausius, lorsqu'il a donné au théorème de Carnot l'expression si élégante et si lumineuse qui le rattache à la fonction nommée par lui *entropie*.

» M. Massieu, après avoir proposé pour l'étude des corps l'emploi nouveau de la fonction caractéristique, recherche l'expression de cette fonction pour les gaz parfaits d'abord, pour les vapeurs saturées et pour les vapeurs surchauffées.

» L'étude des gaz parfaits, c'est-à-dire des fluides qui suivraient rigoureusement les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, ne laisse subsister qu'une inconnue : le calorique spécifique à pression constante; en admettant, ainsi que l'a trouvé M. Regnault pour quelques gaz, qu'on puisse le considérer comme constant, le problème est entièrement résolu. M. Massieu pourtant y applique ses formules et donne l'expression de la fonction caractéristique en fonction du volume et de la température.

» En étudiant ensuite les vapeurs saturées, M. Massieu retrouve d'une manière élégante des résultats célèbres et déjà classiques, découverts par M. Clausius, et son seul but est, comme il le déclare, de montrer par ces applications la simplicité et la généralité de sa méthode.

» Le chapitre relatif aux vapeurs surchauffées laisse plus de place à l'incertitude; l'expérience ici n'a pas encore suffisamment préparé le terrain, et dans les formules générales ingénieusement obtenues par M. Massieu subsistent des inconnues sur lesquelles on en est réduit à des hypothèses plus ou moins plausibles.

» M. Massieu avait adopté d'abord celle de la constance du calorique spécifique à volume constant, en assimilant, sous ce point de vue très-important au moins, les vapeurs à un gaz parfait; il y substitue ensuite une loi empirique qui permet une plus grande approximation, sans présenter toutefois une plus grande garantie d'exactitude théorique.

» M. Massieu a eu néanmoins, sur cette question difficile, le mérite de donner une formule indépendante de toute hypothèse, par laquelle toutes les questions relatives à l'étude physique des vapeurs se trouveront résolues le jour où l'on aura déterminé, pour chaque température et pour chaque pression, les valeurs du calorique spécifique à pression constante.

» *Conclusions.* — En résumé, le Mémoire de M. Massieu nous paraît très-digne d'être approuvé par l'Académie, et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

M. Laussedat. — *Restauration d'un cadran solaire conique sur un fragment rapporté de Phénicie par M. Renan.*

M. Darboux. — *Réponse aux observations de M. Catalan, du 4 juillet dernier.*