BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 1 (1870), p. 233-237

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1870__1_233_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

CREMONA (Dr Luigi). — Preliminari di una Teoria geometrica delle Superficie; 1866, Milano, Zanetti. Traduction allemande par M. Curtze; 1870, Berlin, Calvary.

Depuis que les grands géomètres Poncelet, Chasles, Steiner, Möbius, Plücker ont donné à la Géométrie pure un essor jusque-là inconnu, ces géomètres eux-mêmes et ceux qui les ont suivis sont parvenus, non-seulement à mettre dans un nouveau jour toutes les parties qu'on croyait bien connues, mais aussi à apercevoir une foule de propriétés nouvelles et importantes, à pénétrer dans des régions très-élevées, à y découvrir des vérités, à y résoudre des problèmes dont on n'aurait pas même eu l'idée de s'occuper. Mais il ne suffit pas, pour les progrès ultérieurs de la science, d'accroître le nombre et l'importance des propositions; il est encore nécessaire d'établir un lien entre ces propositions obtenues par des voies si différentes, d'en constituer un corps de doctrine propre à pénétrer dans l'enseignement, à aider les étudiants avancés et même les savants désireux de connaître et de comprendre des théories, des propositions laissées souvent sans démonstration, et dans tous les cas obtenues par les procédés les plus variés. Des Ouvrages didactiques composés avec ordre, où rien n'est laissé sans démonstration, où tout est rattaché au même principe, sont d'une utilité inappréciable pour tous les géomètres désireux de s'instruire et de faire progresser la branche à laquelle ils se sont voués. Malheureusement de tels Ouvrages sont très-difficiles à faire. Ils ne peuvent être entrepris par de simples compilateurs; il faut, pour l'unité de l'œuvre, créer de nouveaux procédés de démonstration, suppléer à des parties incomplétement traitées : il est vrai que l'auteur est récompensé par les points de vue nouveaux qui s'offrent à lui et par la découverte de nombreux et importants théorèmes.

On comprend donc bien que la tâche dont nous parlons ne peut être entreprise que par les personnes qui se sont mises au premier rang des inventeurs dans la branche qu'elles cultivent. Cette condition se trouve heureusement remplie par les deux géomètres qui ont publié des Œuvres didactiques sur la théorie des courbes et des surfaces algébriques : M. Salmon, qui s'est placé à un point de vue analytique; M. Cremona, qui n'utilise que les méthodes de la Géométrie pure, appelée improprement synthétique. L'Ouvrage dont nous voulons parler aujourd'hui, traduit depuis peu en allemand (comme la *Théorie des courbes* du même auteur (*), vient compléter l'œuvre de M. Cremona, et sa publication en deux langues en permettra la lecture à tous les géomètres.

M. Cremona s'est proposé pour but principal de démontrer, par la méthode synthétique, les propositions les plus essentielles de la théorie des surfaces d'ordre quelconque, propositions établies analytiquement ou seulement énoncées dans les Ouvrages et Mémoires de MM. Salmon, Cayley, Chasles, Steiner, Clebsch, etc., et d'en augmenter ou compléter quelques parties par le résultat de ses *propres recherches*. Pour les jeunes géomètres, l'auteur commence par exposer, dans l'Introduction, des parties bien connues des savants; mais nous croyons que *tous ses lecteurs* seront très-heureux de voir clairement établir les relations des propriétés déjà connues avec celles qui leur paraîtront nouvelles. L'auteur d'ailleurs avait donné la mesure de ce qu'il sait faire à ce point de vue dans la *Théorie des courbes planes*.

Après un exposé des propriétés des cônes, analogue à la théorie des courbes, M. Cremona expose la théorie des surfaces développables et celle des courbes gauches; il donne notamment les formules de M. Cayley. Arrivant à une surface quelconque, il la considère : 1° comme lieu de ses points; 2° comme enveloppe de ses plans tangents. Dans le premier cas, la figure d'une surface autour d'un point est étudiée, au moyen de l'intersection de la surface avec son plan tangent, ou avec le cône des tangentes si le point est multiple. Dans le cas où la surface est regardée comme enveloppe de ses plans tangents, l'auteur a eu besoin du théorème de M. Dupin sur les tangentes conjuguées, ce qui nécessite l'introduction d'un Chapitre sur les surfaces du second ordre. M. Cremona expose ensuite le théorie des *systèmes linéaires d'ordre m*, c'est-à-dire d'un ensemble de surfaces assujetties à des conditions communes, et telles que chacune est déterminée si l'on ajoute aux conditions deja données celle de passer

(*) CREMONA (Ludwig). — *Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven.* Greifswald, 1865. C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.

par m points. Il termine la première partie de son livre par une belle recherche des propriétés générales des surfaces gauches. On trouve dans cette partie de l'Ouvrage les théorèmes de M. Cayley sur l'égalité de l'ordre et de la classe d'une surface gauche, sur la développable bitangente et sur l'ordre de la courbe double d'une surface, ainsi que de nouvelles démonstrations stéréométriques des théorèmes sur les séries projectives de points sur les courbes, théorèmes établis d'abord par Riemann avec le secours du Calcul intégral, et démontrés depuis par M. Clebsch par les procédés de l'Analyse algébrique.

La seconde Partie commence par un exposé des plus satisfaisants de la théorie des surfaces polaires, analogue à celui que M. Cremona a déjà donné pour les courbes planes. A la théorie des surfaces polaires viennent se joindre naturellement celle des enveloppes des plans polaires et celle des lieux formés par les pôles.

Le reste de l'Ouvrage est consacré à des recherches sur les *systèmes linéaires projectifs*, c'est-à-dire dont les surfaces se correspondent une à une, et à la démonstration des propriétés formées par l'assemblage de plusieurs systèmes, appelé *complexe symétrique* par M. Cremona. Des Chapitres distincts traitent des systèmes linéaires projectifs du premier ordre (faisceaux), ou du second ordre (réseaux), ou du troisième ordre. On y trouvera le théorème fondamental de M. Chasles, et beaucoup de théorèmes nouveaux sur les lieux des points d'intersection des surfaces correspondantes, etc.; et les théorèmes ainsi obtenus sont appliqués à l'étude des lieux qu'on rencontre dans la théorie des surfaces polaires. Au nombre des autres applications, nous signalerons la démonstration des *caractéristiques* de la courbe d'intersection de deux surfaces qui se coupent déjà suivant une courbe donnée, et celle des propositions qu'a établies M. Salmon, sous une forme bien différente, dans un Mémoire sur l'ordre d'un système d'équations qui fait suite à son grand Ouvrage : *Geometry of three dimensions*.

Voilà l'indication très-rapide, nous l'avouons, des riches trésors contenus dans l'œuvre originale de M. Cremona. La traduction allemande de M. Curtze, faite avec le concours de l'auteur, contient encore un extrait comprenant les résultats, non donnés dans l'Ouvrage italien, du *Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre,* pour lequel l'Académie de Berlin attribua, en 1866, à M. Cremona, la moitié du prix Steiner, et qui est inséré au tome LXVIII du *Journal de Crelle-Borchardt* (*). Un Chapitre de ce Mémoire qui, dans la traduction de M. Curtze, est adjoint à la seconde Partie du Livre sur les surfaces, traite des surfaces *hessienne* et *steinerienne* déduites des surfaces d'un ordre quelconque. Les autres Chapitres, formant la troisième Partie du Livre, constituent une théorie des surfaces du troisième ordre. La traduction contient aussi d'autres additions semblables, dues à l'auteur de l'Ouvrage original. Nous nous bornerons à indiquer ici l'application de la théorie des surfaces polaires à celle des surfaces développables. Dans cette addition, M. Cremona introduit d'abord de nouvelles singularités dans les formules de M. Salmon, et donne une démonstration plus complète de ces formules; mais surtout la nouvelle démonstration a l'avantage de mettre en quelque sorte sous les yeux du lecteurs la figure que prend la surface aux environs d'un point singulier. La promesse ajoutée à la fin de l'édition italienne nous fait espérer que M. Cremona appliquera un jour la notion si claire des figures de l'espace qui lui a servi dans ces recherches, à la discussion géométrique des singularités ordinaires, et peut-être aussi à celle des singularités extraordinaires les plus importantes d'une surface quelconque, discussion dont beaucoup de difficultés ont déjà été levées par l'étude des surfaces développables.

Note. — Je viens d'indiquer un avantage considérable des méthodes de la Géométrie pure : celui de présenter une image claire des figures dont on cherche les propriétés. Cet avantage et bien d'autres sont bien prouvés par les résultats obtenus en si grand nombre dans l'Ouvrage de M. Cremona. Les méthodes géométriques tiennent maintenant leur place dans la science à côté des méthodes analytiques. Néanmoins, on élève quelquefois des doutes sur la sûreté des résultats qu'elles fournissent. Il ne me paraît pas que ce doute soit bien justifié. Certes, on peut se tromper dans les raisonnements géométriques difficiles, comme on peut, en analyse, faire des fautes de calcul, et comme l'analyste peut tirer de ses résultats algébriques de fausses conclusions géométriques; mais cela n'intéresse en rien la justesse des méthodes. Seulement on doit, afin de leur donner l'exactitude qu'elles doivent avoir, en indiquer une base assurée, alors même que

(*) L'autre moitie du prix fut donnee a M. Sturm, a Bromberg, qui a publie ses recherches dans un livre separe.

cette dernière base devrait être trouvée dans le domaine de l'analyse. On sait que le *principe de continuité* fournit des méthodes qui sont des plus fécondes en Géométrie pure. Je ne dis pas qu'il soit impossible d'établir ce principe géométriquement; mais pour cela, on aurait au moins besoin d'une définition géométrique des points d'intersection imaginaires. Sans elle, le théorème sur le nombre des points d'intersection de deux courbes est un emprunt à l'analyse qui est *permis*, bien entendu, à condition qu'on l'avoue. C'est pour cela que j'aurais désiré que M. Cremona eût admis, au commencement de son Ouvrage sur les courbes planes, le principe de continuité, en en renvoyant la démonstration à l'analyse, ou au moins qu'une remarque de cette nature précédât la définition, au n° 28, d'une courbe d'ordre m, et eût remplacé, au n° 32, la démonstration du théorème dont nous venons de parler.

Pour l'intersection d'une courbe gauche avec une surface, on peut raisonner de la manière suivante. L'analyse nous montre qu'une courbe d'ordre n, qui est l'*intersection complète* de deux surfaces, rencontre une surface d'ordre m en mn points. S'il faut ajouter à la courbe d'ordre n une courbe d'ordre n' pour avoir une intersection complète, on sait de même que ces deux courbes rencontrent une surface (m) en $m(n+n')$ points. Quant à la distribution de ces points sur les deux courbes, elle doit rester la même si la surface (m) varie; car au cas où des points d'intersection pourraient passer d'une courbe à l'autre, on devrait les regarder comme des branches d'une même courbe. On a ainsi justifié le procédé dont M. Cremona se sert au n° 21 de son Ouvrage sur les surfaces, sans le démontrer, celui de remplacer la surface par m plans.

H.-G. Zeuthen.