BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 1 (1870), p. 139-163

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1870__1__139_1>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ZEUTHEN (H.-G.). — SUR LES SINGULARITÉS ORDINAIRES D'UNE COURBE GAUCHE ET D'UNE SURFACE DÉVELOPPABLE. — In-4, 43 p. *Annali di Matematica*, 2^e série, t. III, p. 175-217, 1869-70.

Tous les géomètres connaissent la polémique qu'eut à soutenir Poncelet avec Gergonne au sujet de la belle et féconde théorie des polaires réciproques. Gergonne reconnut, dès le commencement, l'importance de la découverte, et, adoptant les idées de Poncelet, les développant sous une forme plus claire et plus élémentaire, il dégagea le premier, de la manière la plus nette, le célèbre principe de *dualité* ou de *réciprocité* que mettaient en évidence la théorie des *polaires réciproques* pour les figures planes et, pour les figures sphériques, la notion beaucoup plus ancienne des figures *supplémentaires*.

Poncelet avait montré que la polaire réciproque d'une courbe du second degré est, dans tous les cas, une courbe du second degré. Trompé par l'analogie, Gergonne étendit ce théorème aux courbes de degré supérieur et affirma qu'une courbe de degré n a pour polaire réciproque une courbe de même degré. C'était admettre implicitement que, d'un point, on ne peut mener à une courbe qu'un nombre de tangentes égal à son degré. Gergonne énonça cette proposition avec sa clarté habituelle, notamment, si nos souvenirs sont bien précis, dans son article sur les lois générales qui régissent les surfaces courbes.

Plusieurs années auparavant, dans un travail dont Gergonne n'avait sans doute aucun souvenir (t. VIII des *Annales*), Poncelet avait déjà établi une proposition contradictoire avec la précédente, et montré qu'on peut, en général, mener, à une courbe de degré n, $n(n-1)$ tangentes passant par un point. Gergonne aurait pu contester l'exactitude de ce résultat. A cette époque, on n'avait que des idées très-imparfaites sur le théorème de Bezout. On savait bien que deux courbes quelconques des degrés m et n se coupent en général en mn points, mais on n'avait pas encore acquis la notion des solutions *infinies*, et l'on ne regardait le nombre mn, donné par le théorème de Bezout, que comme un maximum au-dessous duquel pouvait rester, dans certains cas, le nombre des solutions communes. Or les deux courbes considérées par Poncelet, et dont les points d'intersection étaient les points de contact cherchés, n'étaient pas indépendantes l'une de l'autre. C'est à peu près ce que dit Gergonne; mais, reconnaissant que sa proposition sur le nombre des tangentes n'était pas justifiée, il corrigea ses théorèmes à double colonne, en introduisant une idée très-importante, celle de *classe* d'une courbe.

Cette notion de la *classe* est restée dans la science, et nous croyons inutile de la définir à nos lecteurs. Le degré d'une courbe est égal à la classe de sa polaire réciproque. Toute courbe d'une classe égale à son degré a pour polaire réciproque une courbe de même degré ou classe. C'est ce qui explique le théorème relatif aux courbes du second degré, qui sont de la seconde classe.

Mais ici se présentait une difficulté nouvelle, dont la solution complète devait demander bien des efforts, mais aussi amener une longue suite de belles et importantes découvertes.

Soient une courbe de degré n et sa polaire réciproque de degré N.

On devrait avoir, d'après la proposition de Poncelet,

$$n = N(N-1),$$
$$N = n(n-1).$$

Ces deux équations sont évidemment incompatibles.

On pouvait sans doute expliquer d'une manière vague ce paradoxe en faisant remarquer que, si la courbe proposée est la courbe la plus générale parmi celles de son degré, n, il n'en est plus de même de la polaire réciproque; celle-ci ne contient pas, dans son équation, le nombre de coefficients indépendants que comporte l'équation générale du $N^{ième}$ degré, c'est une courbe très-particulière parmi celles de ce degré; il n'y a donc rien d'étonnant à ce que la *classe* de cette courbe subisse une grande réduction.

Poncelet ne se contenta pas heureusement de cette explication générale, et, dans le tome IV du *Journal de Crelle,* il donna quelques principes qui devaient mettre sur la voie d'une explication définitive.

Dans le *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques* (*Journal de Crelle,* t. IV) se trouvent énoncés deux résultats importants :

Tout point double abaisse la classe d'une courbe de deux unités;

A un point d'inflexion dans une courbe correspond un point de rebroussement dans la polaire.

Il n'y a que peu de choses à ajouter à ces deux principes pour lever la difficulté qui préoccupait Poncelet; pourtant, plusieurs années après, cet illustre géomètre, dans l'*Analyse des transversales* (*Journal de Crelle*, t. VIII, p. 391), n'avait rien ajouté d'essentiel, et il ne revient sur la question que pour corriger une erreur qu'il avait commise sur les points multiples d'ordre supérieur à 2. Il montre qu'un point multiple d'ordre p abaisse la classe de $p(p-1)$ unités, et non de p unités, comme il l'avait affirmé dans son précédent Mémoire; mais aucun pas nouveau n'est fait vers la solution définitive du problème. Poncelet montre cependant qu'un point de rebroussement (dont il n'indique pas l'ordre) abaisse la classe d'au moins trois unités.

C'est à Plücker, déjà connu à cette époque par de belles recherches de Géométrie, qu'il était réservé de donner, en s'appuyant toutefois sur les théorèmes de Poncelet, la solution la plus complète et la plus satisfaisante de la question.

Dans un Mémoire de quelques pages, inséré au *Journal de Crelle* (t. XII, p. 105), Plücker ajoute au théorème de Poncelet sur le points doubles le suivant :

Tout point *double de rebroussement* abaisse la classe de trois unités.

D'après cela, dit-il, étant donnée la courbe la plus générale du degré m, cette courbe a un nombre de points d'inflexion $M = 3m(m-2)$, et un nombre de tangentes doubles $N = \frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9)$.

La courbe polaire réciproque, du degré $m(m-1)$ aura donc M points de rebroussement correspondant aux M points d'inflexion et N points doubles correspondant aux tangentes doubles de la proposée. Sa classe qui devait être

$$\frac{1}{2}m(m-1)\left[\frac{1}{2}m(m-1)-1\right],$$

se réduit donc de $2N+3M$ unités et redescend ainsi à m.

Dans le cas de $m=3$, la réduction provient des points d'inflexion de la proposée, qui sont au nombre de 9.

Dans le cas de $m=4$, elle provient des 24 points d'inflexion et des 28 tangentes doubles de la courbe du quatrième degré. Et ainsi de suite.

Plücker n'indique pas ici comment il avait trouvé le nombre N des tangentes doubles, et le nombre M des points d'inflexion. Mais ses publications postérieures nous permettent de combler cette lacune. Il avait déterminé, par une analyse directe et rigoureuse, le nombre M des points d'inflexion; quant au nombre N des tangentes doubles, il l'avait déduit de l'explication même du paradoxe signalé par Poncelet, en écrivant que $2N+3M$ est égal à la réduction connue *a priori*

$$\frac{1}{2}m(m-1)\left[\frac{1}{2}m(m-1)-1\right]-m$$

de la classe de la polaire réciproque.

C'est Jacobi qui a donné des démonstrations directes, à la fois pour le nombre des tangentes doubles et celui des points d'inflexion, dans un beau Mémoire du *Journal de Crelle* (t. XL, *Beweis des Satzes, dass eine Curve n Grades im Allgemeinen* $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ *Doppeltan-*

genten hat). Jacobi, toutefois, dans le préambule de son Mémoire, nous paraît avoir été injuste pour Plücker. Certainement Poncelet avait, avec une grande sagacité, reconnu la réduction de la classe, due aux points multiples, mais il n'avait pas su faire disparaître les difficultés moins grandes qui restaient à surmonter, et, malgré tous ses efforts, il n'avait pu, comme il le reconnaissait lui-même (*), donner une solution complète de la question que, le premier, il avait posée aux géomètres.

C'est dans la *Théorie des courbes algébriques* (**) publiée en 1839, à Bonn, que Plücker a réuni (p. 209) tous les résultats qu'il avait trouvés sur les points singuliers et donné pour la première fois d'une manière complète les formules qui lient entre elles les singularités. Soient

n l'ordre d'une courbe ou la classe de sa polaire;
m sa classe ou l'ordre de la polaire;
x le nombre de ses points doubles, ou des tangentes doubles de la polaire;
y le nombre de ses points de rebroussement, ou des points d'inflexion de la polaire;
u le nombre de ses tangentes doubles, ou des points doubles de la polaire;
v le nombre de ses points d'inflexion, ou des points de rebroussement de la polaire.

Les singularités que nous venons de signaler sont celles qu'on appelle *ordinaires*, parce qu'elles se trouvent toujours sur une courbe ou sur sa polaire. Cela posé, on aura, entre les nombres qui précèdent, les relations suivantes, dont *trois* seulement sont distinctes :

$$m = n(n-1) - 2x - 3y, \tag{1}$$

$$n = m(m-1) - 2u - 3v, \tag{2}$$

$$v = 3n(n-2) - 6x - 8y, \tag{3}$$

$$y = 3m(m-2) - 6u - 8v, \tag{4}$$

(*) Dans son *Mémoire sur la Théorie des Polaires réciproques* déjà cité.

(**) Plücker (Dr Julius) : *Theorie der algebraischen Curven gegründet auf eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie.* Mit einer Tafel. Bonn, Adolph Marcus, 1839.

$$(5)\qquad u=\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)-(2x+3y)[n(n-1)-6]$$
$$+2x(x-1)+\frac{9}{2}y(y-1)+6xy,$$

$$(6)\qquad x=\frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9)-(2u+3v)[m(m-1)-6]$$
$$+2u(u-1)+\frac{9}{2}v(v-1)+6uv.$$

Ces relations présentent bien, prises deux à deux, la symétrie qu'exige le principe de dualité et leur ensemble n'est pas altéré, si l'on échange les singularités de la courbe avec celles de la polaire. Plücker les démontre toutes directement, et trouve ainsi dans leur accord une vérification de ses raisonnements. En les combinant, on obtient les deux relations simples

$$(7)\qquad m-n=\frac{1}{3}(v-y),$$

$$(8)\qquad (m-n)(m+n-9)=2(u-x), \text{ etc., etc.}$$

Elles se déduisent toutes, d'ailleurs, des trois premières. Enfin on peut les retrouver très-simplement en se rappelant les deux principes suivants, dont elles sont la traduction :

1° Tout point double abaisse la classe de 2 unités, et tout point double de rebroussement de 3 unités;

2° Tout point double diminue de 6, et tout point de rebroussement de 8 unités, le nombre des points d'inflexion, qui en général est égal à $3n(n-2)$.

Les formules qui précèdent constituaient une découverte très-importante, elles donnaient un exemple de relations numériques entre des nombres qu'on aurait pu croire indépendants. C'était là un fait tout nouveau en Analyse; ces relations ouvraient la voie à tout un ordre de recherches importantes dans lequel Plücker a été suivi et imité par un grand nombre de géomètres.

Pourtant, on fit d'abord quelque difficulté d'attribuer ces formules à Plücker; Steiner les appelait les *formules connues* (*) : il y avait là une injustice, réparée promptement par les savants qui ont donné

(*) *Voir*, par exemple, un Memoire inséré au tome XVIII du *Journal de M. Liouville*, p. 309, où Steiner donne les formules sans citer Plücker.

aux relations précédentes le nom de celui qui les avait découvertes.

Avant de quitter les courbes planes, rappelons que les formules précédentes ne s'appliquent pas aux singularités dites élevées, points triples, tangentes multiples, etc., etc. C'est M. Cayley qui, le premier, dans un Mémoire inséré au *Quarterly Journal*, t. VII, a résolu cette difficile question et montré que toute singularité élevée peut s'évaluer au moyen d'un certain nombre de singularités ordinaires (*). Ainsi, un point multiple pourra, dans les formules, se remplacer, par exemple, par seize points doubles, un point d'inflexion, cinq points de rebroussement, six tangentes doubles, etc. On pourra consulter aussi, à ce sujet, un Mémoire de M. de la Gournerie dans le *Journal de M. Liouville*, décembre 1869 et janvier 1870.

C'est encore à M. Cayley qu'était réservé l'honneur d'étendre aux courbes gauches les formules de Plücker. Les principaux résultats obtenus par ce savant se trouvent consignés au tome X du *Journal de M. Liouville*, p. 245. Les singularités y sont définies avec beaucoup de clarté, et, au risque de paraître trop long, nous essayerons d'en donner une idée à nos lecteurs.

Une courbe gauche, étant considérée dans l'espace, les plans osculateurs de la courbe enveloppent une surface développable, dont les génératrices rectilignes sont les tangentes à la courbe. Cette surface développable et la courbe forment ce que M. Cayley appelle *un système simple*. Les points de la courbe sont les *points* du système; les génératrices de la surface, tangentes de la courbe, sont les *lignes* du système; enfin les plans tangents de la surface, plans osculateurs de la courbe, sont les *plans* du système.

On appelle *ligne par deux points* une ligne passant par deux points non consécutifs du système; *ligne par deux plans* une ligne située dans deux plans tangents du système. Les expressions *point dans deux lignes* (du système) et *plan par deux lignes* s'expliquent de la même manière.

Les *lignes par deux points* sont, on le voit, des sécantes doubles de la courbe. Si un observateur avait l'œil placé en un de leurs points, deux branches de courbe paraîtraient se couper dans la direction de la ligne. C'est ce qu'on appelle un *point double apparent*. Ces lignes

(*) *Voir* aussi *Journal de M. Borchardt*, une *Note sur les singularités supérieures des courbes planes;* t. LXIV, p. 369.

sont aussi les arêtes doubles des cônes ayant leur sommet en un de leurs points et contenant la courbe.

La *ligne dans deux plans* est l'intersection de deux plans tangents à la surface développable; c'est donc une tangente double de la surface développable.

Le *point dans deux lignes* se trouve sur deux génératrices de la développable; il est donc sur la *ligne double* de cette surface.

Enfin, le *plan par deux lignes* contenant deux tangentes à la courbe est un plan tangent double pour les cônes passant par la courbe et ayant leur sommet dans ce plan.

Désignons par

m l'ordre de la courbe, c'est-à-dire le nombre de points qu'elle a dans un plan quelconque;

r le nombre de lignes du système rencontrant une droite, c'est-à-dire l'ordre de la surface développable;

n le nombre de plans du système passant par un point, c'est-à-dire la classe de la surface développable.

Voici les singularités considérées par M. Cayley :

Quand quatre points consécutifs du système, ou trois lignes consécutives, sont dans un même plan, il y a deux plans consécutifs identiques. On dit qu'il y a un *plan stationnaire*. Soit

α le nombre des plans stationnaires.

Cette singularité corrrespond à l'inflexion dans les courbes planes.

Si quatre plans consécutifs, ou trois lignes consécutives, se rencontrent en un même point, c'est-à-dire si deux points consécutifs deviennent identiques, on dit qu'il y a un *point stationnaire*. Cette singularité correspond au rebroussement. Soit

β le nombre des points stationnaires.

Les autres singularités correspondent aux points doubles et aux tangentes doubles. Leur définition était indiquée par les méthodes de démonstration de M. Cayley. Soient :

g le nombre des *lignes en deux plans* qui passent en un point, c'est-à-dire des tangentes doubles qu'on peut mener du point à la surface développable;

h le nombre des *lignes par deux plans* passant en un point, c'est-à-dire le nombre des *points doubles apparents* pour un observateur placé d'une manière quelconque;

x le nombre de *points en deux lignes* contenus dans un plan, c'est-à-dire l'*ordre de la ligne double* de la surface développable ;

y le nombre de plans par deux lignes passant en un point, c'est-à-dire de plans tangents doubles du cône contenant la courbe et ayant son sommet en ce point.

Il suffit, pour obtenir les relations entre les neuf éléments que nous avons successivement définis, d'appliquer les formules de Plücker à une section plane de la développable et à un cône contenant la courbe. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} n &= r(r-1) - 2x - 3m, \\ r &= n(n-1) - 2g - 3\alpha, \\ \alpha &= 3r(r-2) - 6x - 8m, \\ m &= 3n(n-2) - 6g - 8\alpha, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r &= m(m-1) - 2h - 3\beta, \\ m &= r(r-1) - 2y - 3n, \\ n &= 3m(m-2) - 6h - 8\beta, \\ \beta &= 3r(r-2) - 6y - 8n. \end{aligned}$$

Par exemple, pour la cubique gauche, on a le système suivant de valeurs :

m	n	r	α	β	g	h	x	y
3	3	4	0	0	1	1	0	0.

Ces formules si importantes de Plücker et de M. Cayley ont déjà rendu de grands services. Elles ont permis d'abord de diviser les courbes en *genres*, d'après la nature de leur *déficient*, chacun des genres répondant à une classe de fonctions abéliennes, comme l'ont montré Riemann et M. Clebsch. Il y a là un champ étendu de recherches qui a déjà fourni une ample moisson de belles découvertes.

Les recherches de M. Clebsch sont exposées dans le *Journal de M. Borchardt*, t. LXIV, p. 98. Comme ces recherches complètent celles de Plücker, et offrent dans un grand nombre de questions un secours tout à fait inattendu, il est bon que nous en disions ici quelques mots.

Dans un Mémoire antérieur (*), M. Clebsch avait déjà trouvé d'importantes relations entre la théorie des courbes algébriques et celle des fonctions abéliennes. D'après ces travaux, les courbes algébriques se divisent non plus d'après leur ordre, ni d'après leur classe, mais d'après *la classe de fonctions abéliennes* dont dépend leur théorie. C'est le nombre

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - x - y = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - u - v,$$

appelé aussi *déficient*, qui détermine le *genre* de la courbe.

Par exemple, les courbes du troisième ordre les plus générales, les courbes du quatrième ordre à deux points doubles, du cinquième ordre à cinq points doubles, etc., etc., appartiennent au même genre. On a pour toutes $p = 1$. Leur théorie dépend d'ailleurs des fonctions elliptiques, comme l'a montré M. Bertrand dans son *Traité de Calcul intégral,* p. 612.

Le *genre* dépend, on le voit, à la fois du degré de la courbe et du nombre des points singuliers. Inversement, si le genre était connu *a priori,* on aurait une équation nouvelle entre les singularités, et il suffirait de connaître deux d'entre elles pour déterminer toutes les autres. Ainsi, toutes les fois qu'on connaîtra le genre d'une courbe, il ne sera plus nécessaire de connaître trois singularités pour avoir toutes les autres : deux suffiront.

Il y a précisément un théorème très-important dû à M. Clebsch, et qui permet, dans un grand nombre de cas, d'assigner le genre de la courbe : Toutes les fois que deux courbes se correspondent de manière qu'à un point de l'une corresponde un seul point ou une seule tangente de l'autre, les deux courbes seront du même genre; pour elles p prendra la même valeur.

Prenons, par exemple, une courbe et sa développée : d'après le théorème précédent, ce sont deux courbes du même déficient. Or on trouve facilement que la classe de la développée m' est égale à

$$n^2 - 2x - 3y,$$

et que le nombre u' de ses points d'inflexion est égal au nombre y des points de rebroussement de la proposée. Cela suffit pour la détermination de toutes les autres singularités.

(*) *Journal de M. Borchardt*, t. LXIII, p. 189.

Pour les courbes gauches, il y a des théorèmes tout pareils; le genre se détermine d'après la formule

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - h - \beta = \frac{(r-1)(r-2)}{2} - y - n$$
$$= \frac{(r-1)(r-2)}{2} - x - m = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - g - \alpha.$$

C'est encore grâce aux formules de M. Cayley que M. Salmon a pu édifier une théorie et une classification très-rationnelle des courbes gauches algébriques. Mais pour ces détails nous renverrons aux Ouvrages si clairs du savant auteur.

Les recherches et les résultats qui précèdent présentent un ensemble très-satisfaisant pour les amis de la Géométrie; mais les progrès de la science réclamaient une étude plus approfondie. Cette étude a été commencée par les travaux de MM. Cayley, Salmon, Spottiswoode et de quelques autres géomètres. Dans son intéressant Mémoire, M. Zeuthen, de Copenhague, jeune géomètre déjà bien connu par plusieurs travaux, a beaucoup ajouté à ce que l'on savait déjà sur la question; il a repris l'étude des singularités ordinaires, mais il en a distingué un plus grand nombre que M. Cayley.

Il est, en effet, bien facile de voir que les singularités d'une courbe gauche sont en nombre *illimité*. Considérons par exemple la surface développable formée par les tangentes de cette courbe gauche. Cette surface a, en général, une ligne double, dont nous avons désigné l'ordre par x. Voilà donc une nouvelle courbe dérivée de la première, dont on peut rechercher toutes les singularités. Sa classe, par exemple, a déjà été donnée par M. Salmon (*Geometry of three dimensions*, 2e édit., p. 460). De cette deuxième courbe, on peut faire dériver une troisième, et ainsi de suite. De même, considérons la surface enveloppée par les plans tangents doubles de la courbe primitive, on aura un nouveau système dérivé. Enfin, les droites, rencontrant *trois* fois la courbe proposée, forment une surface gauche dont un certain nombre de génératrices rencontrent quatre fois la courbe, etc., etc.

Le Mémoire dont nous rendons compte contient les plus intéressants et les plus importants des nombres que l'on doit déterminer. M. Zeuthen a d'ailleurs égard à trois singularités qui n'avaient pas été introduites par M. Cayley. Ce sont : 1° les *points doubles réels*, dont il désigne le nombre par H; 2° les *plans biosculateurs* (plans tangents doubles de la développable), dont il désigne le nombre par G, et 3° les *tangentes d'inflexion* (droites passant par trois points consécutifs de la courbe, ou situées sur trois plans consécutifs de la développable), dont le nombre est supposé égal à v. De telles singularités n'existent pas évidemment dans toutes les courbes, ni dans leurs polaires. Par exemple, un plan osculateur ne dépendant que d'un paramètre, il est impossible, en général, que le plan reste le même pour deux valeurs différentes du paramètre. Les singularités de cette nature sont distinguées par la dénomination d'*extraordinaires* ou *élevées*.

En tenant compte de ces singularités, les formules de M. Cayley doivent être remplacées par les suivantes :

$$r = m(m-1) - 2h - 2H - 3\beta,$$
$$m = r(r-1) - 2y - 3n - 3v,$$
$$n + v - \beta = 3(r - m),$$

et

$$r = n(n-1) - 2g - 2G - 3\alpha,$$
$$n = r(r-1) - 2x - 3m - 3v,$$
$$m + v - \alpha = 3(r - n).$$

Le premier point traité par M. Zeuthen est le suivant : les formules de M. Cayley déterminent, par exemple, les singularités du cône passant par la courbe et ayant son sommet en un *point quelconque* de l'espace. Mais si le sommet du cône se trouve sur une tangente de la courbe, sur la courbe, à un point double, stationnaire, sur une tangente d'inflexion, en un point d'inflexion, et, comme l'a fait du reste remarquer M. Cayley, les formules ne s'appliquent plus, de nouvelles recherches sont nécessaires. De même, pour une section plane de la surface développable ; si le plan de la section contient une tangente simple ou une tangente d'inflexion, s'il est tangent à la développable, les nombres déterminés pour le cas général doivent être modifiés. Deux tableaux très-complets, placés au commencement du Mémoire, indiquent toutes ces modifications.

Voici maintenant quelques-uns des nombres déterminés par M. Zeuthen :

Classe de la courbe double de la développable

$$2g + r(n-2) - n(n-1).$$

Nombre des droites qui rencontrent deux droites fixes et deux fois la courbe proposée

$$h + \frac{m(m-1)}{2};$$

Nombre des tangentes doubles à la développable qui rencontrent deux droites fixes

$$g + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ordre de la surface gauche formée par les droites qui rencontrent trois fois la courbe

$$(m-2)\left[h - \frac{m(m-1)}{6}\right].$$

Nombre des tangentes de la courbe qui la rencontrent encore une fois

$$r(m-4) + 4h - 2m(m-3) - 3v.$$

La méthode de M. Zeuthen est fondée sur le beau principe de correspondance de M. Chasles. La grande difficulté que rencontre ici l'application de ce principe consiste dans le degré de multiplicité des solutions. M. Zeuthen est, on le sait, très-habile dans ce genre de recherches; il a soin d'ailleurs de contrôler ses résultats en variant les démonstrations. Ses recherches paraissent donc, quelque délicate que soit la méthode, de nature à inspirer une entière confiance aux géomètres.

Nous avons essayé, dans cet article, de donner à nos lecteurs, une idée des progrès accomplis depuis cinquante ans, dans la théorie de l'élimination et en un point très-important de la théorie des courbes de degré supérieur. Nous ne dirons rien, pour aujourd'hui, des questions toutes semblables qu'on peut se proposer pour les surfaces, et qui sont bien près d'être résolues.

Nous nous estimerions heureux si les lignes qui précèdent attiraient l'attention de quelques géomètres sur ces questions trop négligées en France, où l'on est porté à considérer la Géométrie synthétique et analytique comme une science d'ordre inférieur. A notre humble avis, c'est aux progrès mêmes de cette Géométrie que sont subordonnés les développements ultérieurs du véritable Calcul infinitésimal, c'est-à-dire de la théorie des différentielles algébriques, des fonctions elliptiques et abéliennes. Aux branches nouvelles de la science, créées depuis le commencement du siècle, doit correspondre aussi un enseignement nouveau, réclamé par les progrès accomplis et venant se placer à côté de l'ancien, sans lui nuire et sans en diminuer la valeur. Nos élèves, préparés par les études sérieuses des Mathématiques spéciales, suivraient avec goût et avec fruit des études dont ils n'auraient plus à surmonter les premières difficultés.

G. D.

GIORNALE DI MATEMATICHE, ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. BATTAGLINI (*).

T. VII; 1869

D'OVIDIO (E.). — *Nouvelle exposition de la théorie générale des courbes du deuxième ordre en coordonnées trilinéaires.* (16 p.; ital.)

Suite d'un article précédent.

JADANZA (N.). — *Sur les progressions à deux et à trois différences.* Suite d'un article précédent. (7 p.; ital.)

JADANZA (N.). — *Sur les progressions.* (14 p.)

Progressions à n différences, etc.

SARDI (C.). — *Théorèmes d'Arithmétique.* (4 p.; ital.)

Théorèmes relatifs aux fractions décimales périodiques.

JANNI (V.). — *Décomposition d'une équation du quatrième degré entre deux variables en deux facteurs rationnels du deuxième degré.* (ital.)

VECCHIO (A.). — *Sur les équations transcendantes.*

Équations $\cosh ml.\cos ml = \pm 1$.

VECCHIO (A.). — *Sur les proportions et les progressions.* (7 p.; ital.)

(*) *Journal de Mathématiques à l'usage des étudiants des Universités italiennes,* publie sous la direction du professeur Jos. BATTAGLINI. Naples, B. Pellerano, éditeur. Paraissant tous les deux mois par fascicules de 4 feuilles, in-4°. Fondé en 1863. Prix : 14 fr. pour l'Italie, 20 fr. pour la France. (En italien et en français.)

BATTAGLINI (G.). — *Sur les systèmes de droites du second degré.* (26 p.; ital.)

Suite d'un autre article. Ce travail se rapporte aux belles études de Plücker sur les complexes, dont nous avons rendu dernièrement un compte détaillé.

TRUDI (N.). — *Sur la détermination des constantes arbitraires dans les intégrales des équations différentielles et aux différences finies.* (21 p.; ital.)

Sur une erreur commise par Lagrange dans un Mémoire de 1775 (t. IV, p. 151, des OEuvres complètes publiées par M. Serret), et reconnue par lui en 1792.

IUNG (G.) et ARMENANTE (A.). — *Sur une équation du huitième degré.* (7 p.; ital.)

BERTINI (E.). — *Nouvelle démonstration de ce théorème : deux courbes corrélatives projectivement sont du même genre.* (ital.)

D'OVIDIO (E.). — *Note sur deux théorèmes de M. Mannheim.* (ital.)

SARDI (C.). — *Sur les sommes des diviseurs des nombres.* (ital.)

BESSO (D.). — *De l'idée de fonction dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire.* (5 p.; ital.)

GROSSO (R. DEL). — *Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes.* (2 art., 32 p.; ital.)

BUSTELLI (A.-M.). — *Détermination analytique des centres de pression des surfaces immergées dans un liquide homogène pesant.* (2 art., 16 p.; ital.)

ZANNOTTI (M.). — *Leçons sur la Thermodynamique.* (2 art., 32 p.; ital.)

CALZOLARI (L.). — *Nouvelle solution générale en nombres rationnels de l'équation* $W^2 = a + bv + cv^2$. (16 p.; ital.)

BESSO (D.). — *Sur l'intégrale* $\int_0^\beta \frac{\sin^m x}{x}\,dx$. (ital.)

ARMENANTE (A.) et IUNG (G.). — *Résumé des leçons complémen-*

taires faites à l'Institut Technique supérieur de Milan. (11 p.; ital.)

Cours de MM. Brioschi, Cremona et Casorati. Fonctions elliptiques. Théories de Clebsch et Gordan, et de Riemann sur les fonctions abéliennes.

IUNG (G.) et ARMENANTE (A.). — *Sur les transformations birationnelles ou univoques* (eindeutigen), *et sur les courbes normales et sous-normales du genre p.* (19 p.; ital.)

SARDI (C.). — *Sur quelques séries; applications à l'arithmétique* (56 p.; ital.)

CALZOLARI (L.). — *Solution générale de l'équation*

$$y^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

(4 p.; ital.)

CALZOLARI (L.) — *Recherche des valeurs rationnelles de v qui rendent le polynôme $a + bv + cv^2 + dv^3 + ev^4$ un carré parfait.* (33 p.; ital.)

CASSANI (P.). — *Étude sur la conique des neuf points et des neuf droites.* (5 p.; ital.)

GRANDI (A.). — *Sur une formule connue qui peut se déduire d'un théorème de Cauchy.* (ital.)

VALERIANI (V.). — *Du plan, sa définition. Axiome du plan élevé au rang de théorème.* (ital.)

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE SCIENCES, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (*).

N° 11. Séance du 14 mars 1870.

M. FAYE. — *Sur l'observation photographique des passages de Vénus et sur un appareil de M. Laussedat.*

M. PHILLIPS. — *Note sur les changements d'état d'un mélange d'une vapeur saturée et de son liquide, suivant une ligne adiabatique.*

N° 12. Séance du 21 mars 1870.

M. MOUTIER. — *Sur l'angle de raccordement d'un liquide avec une paroi solide.*

(*) Voir *Bulletin*, p. 63.

M. Chasles fait connaître un *Théorème concernant la théorie des surfaces de M. Spottiswoode.*

« On sait que, par un point d'une surface, on peut mener deux tangentes qui ont avec elle un contact du deuxième ordre, c'est-à-dire trois points consécutifs communs avec la surface. C'est un des beaux théorèmes dus à M. Dupin, et qui se retrouve, depuis lors, dans toutes les recherches des géomètres. Les deux tangentes dont il s'agit sont les asymptotes de l'indicatrice de la surface. Passant de la ligne droite aux sections coniques, M. Spottiswoode s'est proposé de rechercher combien on peut tracer sur une surface, en chaque point, de coniques ayant un contact du cinquième ordre, c'est-à-dire six points communs avec la surface. Il a trouvé que ces coniques sont au nombre de dix, réelles ou imaginaires. »

Nous pensons que M. Spottiswoode a voulu parler des contacts du sixième ordre, c'est-à-dire des coniques ayant sept points communs avec la surface. Menons, en effet, par un point A d'une surface un plan quelconque. Nous pourrons construire, dans ce plan, une conique ayant en A avec la surface cinq points communs, c'est-à-dire un contact du quatrième ordre. Pour que l'ordre du contact s'élève d'une unité, il suffit que les coefficients angulaires du plan satisfassent à une relation, c'est-à-dire que le plan enveloppe un cône. Mais, si l'on veut que le contact soit du sixième ordre, on trouve alors deux relations qui doivent déterminer un nombre limité de plans (*).

N° 13. Séance du 28 mars 1870.

M. Darboux. — *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.*

M. Tisserand. — *Sur un point du calcul des différences.*

« Dans un de ses Mémoires, Lagrange a montré comment, dans certains cas, d'une relation entre les dérivées d'une fonction et ses différences, on peut déduire aisément une relation nouvelle entre les intégrales successives de la fonction, et ses différences et intégrales finies. Le but de cette Note est d'en montrer des exemples intéressants, à propos des formules de quadrature en usage parmi les astronomes. »

(*) Voir *Comptes rendus*, t. LXII, 1866, p. 590.

Nous ajouterons à cette courte explication une remarque. C'est que, dans les cas particuliers fort importants signalés par M. Tisserand, on peut employer des procédés de démonstration à l'abri des reproches qu'on pourrait adresser justement à l'Analyse de Lagrange (*).

N° 14. Séance du 4 avril 1870.

M. DE SAINT-VENANT. — *Recherche d'une deuxième approximation dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur dont la face postérieure a une inclinaison quelconque, par des terres non cohérentes, dont la surface supérieure s'élève en un talus plan quelconque à partir du haut de cette face du mur.*

M. OLTRAMARE. — *Sur l'existence d'une loi de répartition analogue à la loi de Bode (ou de Titius), pour chacun des systèmes de satellites de Jupiter, de Saturne et d'Uranus.*

M. R. WOLF. — *Études sur la fréquence des taches du Soleil et sa relation avec la variation de la déclinaison magnétique.*

M. ZEUTHEN. — *Sur les points fondamentaux de deux surfaces, dont les points se correspondent un à un.*

Cette Note de M. Zeuthen se rapporte à un des points les plus importants et les plus récemment découverts de la théorie des surfaces algébriques. Cette question des points fondamentaux mérite plus de quelques lignes, et nous aurons l'occasion d'y revenir. Le travail de M. Zeuthen est, croyons-nous, avec ceux de M. Cremona, un des premiers essais d'étude géométrique de la nouvelle théorie.

M. DARBOUX. — *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles.*

M. E. DIDON. — *Sur un mode d'approximation des fonctions de plusieurs variables.*

Dans la théorie des erreurs on est conduit à résoudre le problème suivant :

Étant donnée une fonction $f(x)$, trouver, parmi tous les polynômes P de degré m, celui qui, entre les limites -1 et $+1$, s'approche le plus de la fonction donnée, c'est-à-dire qui rend minimum

(*) Voir *Œuvres complètes*, publiées par M. SERRET. t. III, p. 44.

l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - P]^2 dx.$$

On sait que le polynôme P qui fournit la solution de ce problème est représenté par la partie du développement de $f(x)$ suivant les fonctions X_n de Legendre qui s'arrête au terme X_{m+1}. M. Didon s'est proposé, pour les fonctions à plusieurs variables, un problème analogue qu'on peut énoncer ainsi :

Étant donnée une fonction $f(x, y, z, \ldots)$, trouver, parmi tous les polynômes P de degré m, celui qui rend minimum l'intégrale

$$\int\int\int [f(x, y, z, \ldots) - P]^2 dx\, dy\, dz \ldots,$$

dans laquelle les variables sont assujetties à la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots \leqq 1.$$

M. Boussinesq. — *Intégration de l'équation différentielle qui peut donner une deuxième approximation, dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur par des terres dépourvues de cohésion.*

M. Chapelas. — *Recherches sur les centres de moyenne position des étoiles filantes.*

N° 15. Séance du 11 avril 1870.

M. Flammarion. — *Loi du mouvement de rotation des planètes.*

La loi énoncée par l'auteur serait intéressante si elle était exacte.

M. Decharme. — *Aurore boréale observée à Angers.*

M. Le Verrier. — *Présentation de Notes diverses relatives à l'aurore boréale du 5 avril et adressées par MM. Tremeschini, Charault, Terby, Geslin, Guerreau, Fortier-Garnier, Gramant, Lepingard, etc.*

PAINVIN (L.), professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Lyon. — Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre (*).

On sait que les couples de droites passant par l'intersection de deux courbes du second degré se déterminent au moyen d'une équation

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VII, 1868, 103 p.

du troisième degré, dont la discussion complète est faite dans tous nos cours de Mathématiques spéciales. Les professeurs examinent les différents cas qui se présentent quand l'équation a des racines simples ou multiples, réelles ou imaginaires. C'est de la même équation que dépend la détermination du triangle conjugué commun aux deux coniques.

Si l'on étudie de même deux surfaces du second degré, on trouve quatre cônes passant par leur intersection, et les sommets de ces quatre cônes sont, d'après un beau théorème dû à Poncelet, les sommets du tétraèdre conjugué commun aux deux surfaces. Mais on n'avait pas encore étudié d'une manière complète l'équation du quatrième degré qui détermine ces quatre cônes. On ne trouve, sur ce point, dans le Traité de M. Salmon (*) qu'une remarque excellente, mais insuffisante : *Quand l'équation a une racine double, les deux surfaces sont en général tangentes, et le cône correspondant à la racine double est celui qui a son sommet au point de contact. Il n'y a pas alors de tétraèdre conjugué commun aux deux surfaces.*

Le Mémoire de M. Painvin a pour but de combler cette lacune. L'auteur s'est proposé d'examiner *tous* les cas qui peuvent se présenter dans la discussion de l'équation du quatrième degré, et d'en déduire chaque fois la nature de la courbe d'intersection des deux surfaces, ses branches réelles, infinies, etc., etc.

Cette discussion présentait le plus grand intérêt à tous les points de vue. Beaucoup de propriétés des surfaces se déduisent, en Géométrie analytique, de la forme commune à laquelle on peut ramener leurs équations. Il était bon de savoir dans quel cas il existe un tétraèdre conjugué commun, et quand ce tétraèdre n'existe pas, quelles sont les formes les plus simples auxquelles on peut ramener les équations. Ce travail nous paraît avoir été fait complétement, et les géomètres qui s'occupent de la théorie des surfaces du second ordre trouveront dans le Mémoire de M. Painvin de très-utiles indications.

G. D.

(*) Voir *Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes von* G. SALMON, *deutsch bearbeitet von* W. FIEDLER; p. 177. Leipzig, B.-G. Teubner.

PAINVIN (L.) — Note sur la transformation homographique (*).

Deux figures homographiques peuvent-elles, en général, être amenées, par un déplacement convenablement choisi, à être homologiques? On sait depuis longtemps que cela n'est pas possible. M. Painvin s'est proposé d'établir ce résultat (qui peut-être n'avait pas été démontré d'une manière précise), et de rechercher sous quelles conditions deux figures homographiques peuvent être amenées à être homologiques.

Les conditions auxquelles se trouve conduit l'auteur s'interprètent géométriquement d'une manière très-simple :

Pour que deux figures homographiques de l'espace puissent être placées homologiquement, il faut et il suffit que la courbe qui, dans l'une d'elles, correspond au cercle imaginaire de l'infini appartenant à l'autre, soit également un cercle; et alors il y a deux manières, et deux seulement, d'amener les deux figures à être homologiques.

Le déplacement d'une figure pouvant être considéré comme une transformation homographique, on voit que les recherches précédentes conduisent à se poser la question suivante:

Étant données deux figures homographiques, peut-on, en transformant l'une d'elles homographiquement, l'amener à être homologique à l'autre?

Nous croyons qu'on peut répondre affirmativement, pourvu que la transformation homographique auxiliaire soit convenablement choisie.

G. D.

TRANSACTIONS of the Royal Society of Edinburgh (**).

T. XV, 1867-69.

Cayley (A.). — *Sur les courbes polyzomales ou courbes*

$$\sqrt{U} + \sqrt{V} + \ldots = 0.$$

(110 p.)

U, V,... sont des fonctions homogènes de x, y, z, du même degré r.

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. IX, 1870, 11 p.

(**) *Actes de la Société Royale d'Édimbourg*. — Paraît chaque année, en langue anglaise, par demi-volumes in-4°.

Chacune des courbes $\sqrt{U}=0$, $\sqrt{V}=0,\ldots$, à cause de sa relation de circonscription avec la courbe $\sqrt{U}+\sqrt{V}+\ldots=0$, est considérée comme une ceinture (ζῶμα) de cette courbe, d'où les expressions zome, polyzomal, etc. L'étude des propriétés de ces courbes est développée à partir de la valeur $\nu \gtreqless 3$ du nombre des zomes. Le Mémoire contient des recherches relatives au cas général d'une courbe à ν zomes, à ses branches, à son ordre, à ses singularités, à sa classe, etc.

Brewster (Sir David). — *Sur le mouvement, l'équilibre et les formes des bulles liquides.* (8 p.)

Scott (J.). — *Sur les miroirs comburants d'Archimède, avec quelques propositions concernant la concentration de la lumière, produite par des réflecteurs de différentes formes.* (27 p.)

Discussion historique de l'invention d'Archimède. — Quand la lumière émanant d'une sphère lumineuse de petit diamètre apparent tombe sur un miroir plan très-petit, trouver l'intensité de la lumière réfléchie à une distance quelconque du miroir. — Quand un rayon cylindrique de lumière solaire est réfléchi par un miroir plan, trouver l'intensité sur une surface plane perpendiculaire à la direction du rayon réfléchi et à une distance quelconque du miroir. — Une sphère lumineuse étant placée à l'un des foyers d'un miroir elliptique, trouver l'intensité sur une petite surface plane placée à l'autre foyer. — Les rayons solaires tombant suivant l'axe sur un miroir parabolique, trouver l'intensité sur un petit disque placé au foyer. — L'axe d'un miroir conique étant dirigé vers le Soleil, trouver l'intensité sur un plan perpendiculaire à l'axe. — Cas de deux miroirs coniques, d'axes parallèles et de surfaces parallèles ou perpendiculaires. — Cas de deux miroirs paraboliques confocaux. — On peut aussi facilement construire des surfaces comburantes à la distance de 150, 200 ou 300 pieds qu'à la distance de quelques pouces.

Thomson (Sir William). — *Sur le mouvement en tourbillons.* (44 p.)

La partie mathématique de ce travail a pour but de développer l'hypothèse que l'espace est occupé par un *liquide* incompressible et *sans frottement*, n'étant soumis à l'action d'aucune force, et que les phénomènes matériels de toute sorte dépendent uniquement des mouvements produits dans ce liquide. Par *liquide sans frottement*, l'auteur entend une masse occupant l'espace d'une manière continue, et dont chaque partie presse sur une autre quelconque, suivant une direction exactement perpendiculaire à la surface de séparation. Ces recherches se rattachent à celles de Helmholtz (*Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Journ. de Crelle*, 1858), en s'appuyant sur les notions introduites par Riemann (*Lehrsätze aus der Analysis situs : Ibid.*, 1857).

TAIT. — *Sur la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.* (44 p.)

Application de la méthode des quaternions à la résolution du célèbre problème. Cette méthode a l'avantage de donner une représentation géométrique aussi claire qu'aucune autre pour les personnes familières avec ce calcul. Elle fournit des calculs d'une parfaite symétrie, ce qui n'est pas le cas des systèmes de coordonnées employés généralement. L'auteur s'est inspiré des travaux de Poinsot, ainsi que des recherches plus récentes de Hamilton, de Cayley, de Sylvester. Ses résultats ont, sur les constructions géométriques de Poinsot, l'avantage de se prêter à la détermination effective de la position du corps au bout d'un temps quelconque. Ce Mémoire se divise en deux Parties : 1° Cinématique d'un système rigide ayant un point fixe; 2° Dynamique d'un corps solide ayant un point fixe.

JENKIN (Fleeming). — *Sur l'application pratique de la théorie des figures réciproques au calcul des efforts des pièces dans la charpente.* (8 p., 6 pl.)

Deux figures planes sont dites *réciproques*, quand elles sont formées d'un même nombre de lignes, de telle sorte que les lignes correspondantes dans les deux figures soient parallèles, et que les lignes correspondantes qui concourent en un même point dans une des figures forment un polygone fermé dans l'autre. Si les forces représentées en grandeur par deux lignes d'une figure sont supposées agir entre les extrémités des lignes correspondantes de la figure réciproque, alors les points de la figure réciproque seront tous en équilibre sous l'action de ces forces.

SMITH (W.-Robertson). — *Hegel et la métaphysique du calcul des fluxions.* (20 p.)

L'auteur réfute les critiques des découvertes de Newton, lancées par Hegel et reproduites par un de ses disciples, le Dr Stirling. Il montre sans peine les nombreuses erreurs commises par le grand métaphysicien, dans une science où la connaissance des détails pratiques est indispensable pour se former des vues d'ensemble. Pour n'en citer qu'un exemple, Hegel reproche à Lagrange d'avoir avancé que, la loi de la chute des corps étant exprimée par $s = at^2$, le cas le plus simple après celui-là, $s = at^3$, ne se trouve pas dans la nature : « Du moins, dit-il, on a la formule $s^3 = at^2$, qui exprime la troisième » loi de Kepler. » Cette assimilation des deux formules de nature si différente peut donner une idée de la valeur de ces critiques, que M. Smith qualifie de *Quixotic attempts*.

RANKINE (W.-J. Macquorn). — *Sur l'énergie thermale des tourbillons moléculaires.* (10 p.)

L'auteur part de cette hypothèse, que la chaleur thermométrique consiste dans un mouvement des particules des corps dans des courants circulatoires, avec une vitesse uniforme ou à oscillations périodiques. Cette hypothèse suffit pour arriver à l'équation générale de la Thermodynamique, sans qu'il soit besoin d'introduire aucune autre supposition sur la figure et l'arrangement des tourbillons moléculaires.

MEMOIRS OF THE LITERARY AND PHILOSOPHICAL SOCIETY OF MANCHESTER. — Third Series. London, H. Baillière. — Paris, J.-B. Baillière (*).

T. II; 1865.

CAYLEY (A.). — *Note sur une équation différentielle.*

La plus petite racine de l'équation

$$y = u + ay^n$$

se développe immédiatement par la série de Lagrange. D'ailleurs, le développement de y satisfait à l'équation

$$(u\mathrm{D}_u)^{n-1}y = na\left(\frac{n}{n-1}\mathrm{D}_u - \frac{2n-1}{n-1}\right)^{n-1}u^{n-1}y,$$

dont on a ainsi une intégrale.

(*) Paraît à époques indéterminées, par volumes in-8°. En langue anglaise.

Thomson (W.). — *Sur l'équilibre convectif de température dans l'atmosphère.*

Il s'agit de l'équilibre produit par le déplacement des molécules de températures diverses.

Kirkman (Th.) — *Sur les groupes non-modulaires.* (23 p.)

Étude relative au nombre de valeurs d'une fonction de plusieurs éléments.

Spottiswoode (W.). — *Sur les résolvantes différentielles.*

Harley (R.). — *Sur une certaine classe d'équations différentielles linéaires.* (14 p.)

D'une équation algébrique quelconque, de degré n, à coefficients fonctions d'une variable, on peut déduire (Cayley, *Philosophical Magazine,* 1861) une équation différentielle linéaire, qui est satisfaite par la plus petite racine de l'équation donnée, dont elle est la *résolvante différentielle* (Boole, *Memoir on a general Method in Analysis: Phil. Trans.,* 1844). Application aux équations

$$y^n - ny \quad + (n-1)x = 0,$$
$$y^n - ny^{n-1} + (n-1)x = 0,$$

auxquelles peuvent se ramener toutes les équations algébriques pour $n \leqq 5$.

Russel (W.-H.-L.).— *Sur la solution de la résolvante différentielle.*

Heelis (Th.). — *Observations sur la lumière zodiacale.* (12 p.)

T. III; 1868.

Brothers (A.). — *Catalogue d'étoiles binaires, avec des remarques préliminaires.* (27 p.)

Knott (G.). — *Sur l'étoile variable* R *du Petit Renard,*

$$\text{Æ} = 20^h 58^m 21^s,9, \quad D = +23^\circ 17',2, \quad \text{ép. } 1865,0.$$

Baxendell (J.). — *Observations sur la nouvelle étoile variable* T *de la Couronne.*

Baxendell (J.). — *Observations sur la pluie météorique du* 13-14 *nov.* 1866.