

# THÈSES D'ORSAY

LUCIEN GUILLOU

**Topologie des variétés de basse dimension**

*Thèses d'Orsay*, 1991

[http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11\\_1991\\_\\_0290\\_\\_P0\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1991__0290__P0_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016  
et diffusée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>*

ORSAY  
n° d'ordre :

**UNIVERSITÉ de PARIS-SUD**

**Centre d'ORSAY**

# THÈSE

présentée  
pour obtenir

**le grade de Docteur ès Sciences Mathématiques**

par

**Lucien GUILLOU**

X47527.

Sujet de la thèse :

**Topologie des variétés de basse dimension**

soutenue le 14 février 1991 devant le Jury composé de :

MM. Jean CERF, Président  
Norbert A'CAMPO  
Christian BONATTI  
Michel KERVAIRE  
François LAUDENBACH  
Valentin POENARU  
Laurent SIEBENMANN



## RESUME DE LA THESE EN ANGLAIS

This thesis consists of two independent parts. The main result of the first part (which is joint work with A; Marin) is about four dimensional manifolds which are smooth, simply connected and closed. Given such a manifold  $M$  and  $F$  a characteristic (not necessarily orientable) surface in  $M$ , we give a congruence between the signature of  $M$ , the self intersection of  $F$  in  $M$  and the Arf invariant of a quadratic form defined on the first homology group of  $F$ . This formula generalizes the famous Rohlin's congruence. We also give new and geometric computation of the same groups when a spin structure is taken into account.

In the second part we first give a simple and rigorous proof of a slightly enhanced version of the Brouwer's plane translation theorem. Then we show how our version of this theorem leads to a quick deduction of the Poincaré-Birkhoff theorem about homeomorphisms of the annulus.



## Remerciements

J'ai découvert la topologie lors d'un certificat de Maîtrise enseigné de manière très vivante par V. Poénaru. C'est un plaisir de le retrouver dans mon jury de thèse.

L'année suivante j'approfondissais cette découverte grâce aux cours de 3e cycle de F. Laudenbach et de L. Siebenmann. Très vite je fus séduit par les sujets traités par Siebenmann et sa vision de la topologie. J'eus la chance qu'il me prenne comme collaborateur (ainsi que H. Hähl autre ami alors étudiant) de deux articles me faisant ainsi découvrir la recherche sur le vif. J'ai gardé ces goûts là. Mais surtout je voudrais le remercier de m'avoir conservé son amitié même dans mes périodes de peu de mathématiques.

L'année suivante je rencontrais A. Fathi, A. Marin, Y.M. Visetti nouveaux étudiants qui allaient être mes interlocuteurs quotidiens dans les années à venir. La collaboration avec A. Marin allait être particulièrement fertile, une grande partie de cette thèse étant le fruit d'un travail commun. Tout remerciement va sans dire.

L'apport d'A. Fathi est aussi très clair puisque c'est pour répondre à certaines de ses questions que j'avais commencé l'étude du théorème de Brouwer sujet de la deuxième partie de cette thèse.

Puis de plus en plus nombreux ont été les collègues topologues que j'ai rencontrés et appréciés. Je noterai parmi les plus proches de moi, M. Audin, M. Boileau, F. Bonahon, E. Giroux, G. Levitt, J.-P. Otal, J.-C. Sikorav. Il me faut faire une place à part à F. Bonahon, J.-P. Otal et tout particulièrement F. Laudenbach pour leur insistance à me faire présenter cette thèse. Je leur dois réellement d'être là aujourd'hui.

Enfin l'an dernier, j'ai passé une excellente année à Genève grâce à une invitation de A. Haefliger. Je suis heureux que M. Kervaire, image pour moi d'une période reine de la topologie, représente ici ces chaleureux collègues suisses.

Je remercie J. Cerf pour avoir accepté de présider mon jury de thèse ainsi que pour une lecture très attentive d'une partie de cette thèse.

Je voudrais encore remercier C. Bonatti pour une lecture critique et constructive de la seconde partie de cette thèse. Elle nous a menés récemment à un résultat commun et suggère d'autres progrès.

N. A'Campo est l'ami des premiers jours à Orsay que je revois rarement et qui raconte si bien les mathématiques. Merci d'être venu.

Finalement j'aurais aimé trouver une formule originale pour remercier B. Barbichon pour sa compétence bien sûr, mais aussi pour sa patience et sa gentillesse malgré les corrections multiples et de dernière heure. Je ne peux que le faire de tout coeur.







consacrée à un dévissage géométrique, puis à une généralisation, de ce résultat.

Rohlin est arrivé à son résultat en calculant  $\pi_{n+3}(S^n)$  par la méthode dite de Thom-Pontriaguine qui ramène le calcul des groupes d'homotopie  $\pi_{n+p}(S^n)$  à celui des groupes de cobordisme des sous-variétés de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^n$  munies d'une trivialisatation de leur fibré normal. En fait, Rohlin commence par se tromper et calcule  $\pi_{n+3}(S^n) = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ , puis se corrige et obtient simultanément  $\pi_{n+3}(S^n) = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$  (comme il se doit!) et le résultat ci-dessus. Tout cela fut annoncé en 1952 dans une série de quatre notes à l'Académie des Sciences Soviétiques (traduites ici par S. Ochanine). Notre première partie commence par commenter et détailler largement ces notes une raison étant que les méthodes géométriques qu'elles recèlent furent longtemps oubliées. En effet, la langue russe, le caractère très succinct des arguments présentés, l'aspect indirect de la preuve de son résultat (obtenu en corrigeant une faute), et surtout l'apparition des puissantes méthodes algébriques inaugurées par Serre (1951) pour le calcul des groupes d'homotopie ont nui à la diffusion des idées de Rohlin. Et classiquement son résultat se déduisait de la connaissance a priori du groupe  $\pi_{n+3}(S^n)$  (cf. Milnor-Kervaire (1958)).

Cependant le caractère central de ce résultat - que l'on retrouve évidemment dans la définition du  $\mu$ -invariant des sphères d'homologie entière de dimension trois mais aussi, par exemple, de manière plus surprenante dans le problème de l'existence de variété topologique de dimension supérieure à cinq triangulable comme complexe simplicial (sans l'être comme variété combinatoire) cf. Siebenmann (1970) - ainsi que son caractère (jusqu'en 1981) de rare théorème concernant la dimension quatre, ont conduit les topologues dans les années 1970 à rechercher des démonstrations plus géométriques et plus directes de ce résultat de Rohlin.

On trouve en particulier, esquissé dans les notes de Rohlin et expliqué en détail dans nos commentaires, un calcul géométrique des groupes de cobordisme des variétés de dimension trois ou quatre (ces groupes avaient été aussi calculés par Thom en 1952, par une réduction à des problèmes de topologie algébrique). Pour ces calculs, Rohlin s'appuyait sur une méthode de Kneser (1924) de lissage des cycles de petite codimension par élimination successive de singularités, méthode elle aussi oubliée au profit d'arguments de transversalité basés sur l'identification  $H^n(M, \mathbb{Z}) = [M, K(\mathbb{Z}, n)]$ . La méthode de Kneser (que nous exposons en détails en montrant ses liens avec la théorie du lissage des sous-variétés P.L. d'une variété lisse (p. 72) (cf. Haefliger (1967)) et le théorème de Wall (1967) d'unicité des fibrés normaux P.L. en codimension deux (p. 64)) a d'une part l'avantage de s'appliquer sans grande modification au cas où la variété ambiante est non orientable et d'autre part nous permet de donner un nouveau calcul, parfaitement géométrique et élémentaire du groupe de cobordisme orienté de dimension quatre (p. 69).

On profite de l'occasion pour montrer dans des appendices comment les arguments géométriques de Rohlin permettent assez aisément de prouver que toute variété de dimension trois munie d'une structure spin borde une variété de dimension quatre munie d'une structure spin étendant la structure spin donnée sur le bord (autrement dit  $\Omega_3^{\text{spin}} = 0$ ) et de prouver que  $\Omega_4^{\text{spin}} = \mathbb{Z}$  (ce qui résout le problème N4.54 de la liste de Kirby (1984)).

Ces mêmes arguments nous donnent aussi un nouveau regard sur le

groupe des noeuds lisses  $S^3$  dans  $S^6$  d'abord calculé par Haefliger et sur le théorème de Haefliger et Boéchat qui caractérise les variétés  $M^4$  simplement connexes fermées lisses qui se plongent dans  $\mathbb{R}^7$  (pp.90-92).

Pour bien comprendre le résultat de Rohlin proprement dit, il convient d'abord de le généraliser. Rohlin lui-même (1972) et Casson (indépendamment) ont indiqué la formule  $\sigma(M^4) - F \cdot F = 8 \operatorname{Arf}(q) \pmod{16}$ . Dans cette formule,  $\sigma(M^4)$  désigne la signature de la forme d'intersection de la variété  $M^4$ ,  $F$  est une surface fermée orientable caractéristique pour  $M^4$  (c'est-à-dire  $FX = XX \pmod{2}$  pour tout  $X \in H_2(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  si l'on considère  $F$  comme élément de  $H_2(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  et si la juxtaposition représente l'intersection homologique),  $F \cdot F \in \mathbb{Z}$  est l'auto-intersection de  $F$  et  $\operatorname{Arf}(q)$  est l'invariant d'Arf d'une forme quadratique  $q : H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  définie à partir du couple  $(M, F)$ . Cette formule généralise le résultat originel de Rohlin puisque, si la forme d'intersection est paire, on peut choisir  $F = \phi$ .

Puisque l'étude topologique des courbes algébriques réelles (c'est le sujet qui intéressait aussi Rohlin en 1972) met souvent en présence de surfaces caractéristiques non orientables, nous avons généralisé la formule précédente à ce cas-là. Dans le dernier texte (p. 92) de cette première partie, nous donnons une preuve élémentaire et directe, n'utilisant que le calcul du groupe de cobordisme de dimension quatre, de cette formule généralisée.

Pour conclure rappelons, comme le lecteur le sait certainement, que depuis 1982, Donaldson, utilisant des méthodes entièrement différentes, a obtenu de nouvelles restrictions sur les formes d'intersection des variétés fermées lisses de dimension quatre menant à des résultats spectaculaires (comme l'existence d'une infinité de structures lisses sur  $\mathbb{R}^4$ ). C'est un problème ouvert que de savoir s'il est possible d'obtenir quelques-uns de ces résultats par les méthodes exposées ici.

Toute cette première partie est parue en 1986 dans le volume 62 de *Progress in Mathematics*, Birkhäuser. On y trouvera aussi une rédaction de conférences fondamentales de A. Casson que j'avais pu mener à bien grâce aux explications de L. Siebenmann.

## Références

- Freedman M., *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geometry 17 (1982), 357-453.
- Haefliger A., *Lissage des immersions*, II (preprint 1967, non publié).
- Kirby R., *4-manifold problems*, in 4-manifolds, Contemp. Math. 35 (1984), 513-528.
- Kneser H., *Ein Topologisches Zerlegungssatz*, Proc. Royal Acad. Amsterdam, 27 (1924), 606-616.
- Milnor J. and Kervaire M., *Bernoulli numbers, homotopy groups and a theorem of Rohlin*, Proc. Internat. Congr. Math. Edinburgh, 1958, 454-458.
- Pontriaguine L.S., *On the classification of four-dimensional manifolds*, Uspehi Mat. Nank., 4 (1949), 157-158 (Russian).
- Quinn F., *Ends of maps. III: dimensions 4 and 5*, J. Diff. Geometry 17 (1982), 503-521.

Rohlin V., *New results in the theory of 4-dimensional manifolds*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 84 (1952), 221-224 (Russian); traduction française ici au début de la première partie.

Rohlin V., *Proof of Gudkov's hypothesis*, Funktional anal. i Prilözen, 6 (1972), 62-64 (Russian); English translation : Functional Anal. Appl. 6 (1972), 136-138.

Serre J.P., *Homologie singulière des espaces fibrés. III : applications homotopiques*, C.R. Acad. Sci. Paris, 232 (1951), 142-144.

Siebenmann L.C., *Disruption of low-dimensional handlebody theory by Rohlin's theorem*, Topology of Manifolds, Markham, Ill. (1970), 57-76.

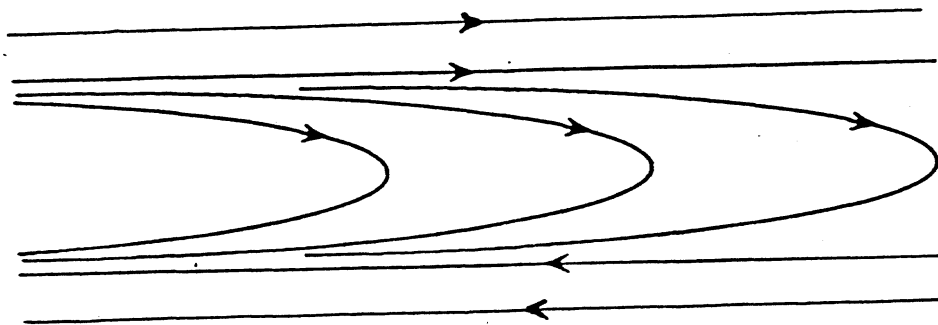
Wall C.T.C., *On simply connected 4-manifolds*, J. London Math. Soc. 39 (1964), 141-149.

Wall C.T.C., *Locally flat PL submanifolds with codimension two*, Proc. Camb. Phil. Soc. 63 (1967), 5-8.

## Deuxième partie<sup>2</sup>.

Une translation du plan  $\mathbb{R}^2$  est un homéomorphisme préservant l'orientation sans point fixe. Inversement, étant donné un tel homéomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}^2$ , on peut se demander dans quelle mesure il ressemble à une translation.

Le théorème de translation plane de Brouwer (1912) affirme que tout point  $p$  du plan se trouve dans un ouvert invariant par  $h$ ,  $U = U(p)$ , tel qu'il existe un homéomorphisme  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  qui vérifie  $\varphi h \varphi^{-1}(x, y) = (x+1, y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $\varphi^{-1}(0 \times \mathbb{R})$  est fermé dans  $\mathbb{R}^2$ . Brouwer donne aussi l'exemple suivant, temps 1 du flot suggéré par la figure ci-dessous, montrant qu'en général on ne peut pas choisir  $U = \mathbb{R}^2$ .



La preuve de ce théorème est considérée comme difficile et a été sujette à controverses. Aussi le premier objet de cette partie est d'en donner une preuve simple, brève et, espérons-le, claire. En particulier, on obtient très rapidement, comme étape dans la preuve, que tous les points du plan errent sous l'homéomorphisme  $h$  (i.e. tout  $p \in \mathbb{R}^2$  admet un voisinage  $V$  tel que  $V \cap h^n(V) = \emptyset$  pour  $n \neq 0$ ). Ceci, qui bien sûr est aussi un corollaire immédiat de l'énoncé du théorème, est bien souvent le seul résultat sur de tels homéomorphismes  $h$  de  $\mathbb{R}^2$  qui est utilisé dans la plupart des travaux sur les homéomorphismes des surfaces.

Ce théorème de translation plane n'était dans l'esprit de Brouwer (1910) qu'un cas particulier d'un "théorème de translation généralisé"

<sup>2</sup> On trouvera une introduction plus détaillée au début de cette deuxième partie.

concernant les homéomorphismes de surfaces orientables, ayant un nombre fini de points fixes et préservant l'orientation. De l'aveu même de Brouwer, la preuve qu'il avait donnée de ce "théorème généralisé" ne tient pas et son énoncé est aujourd'hui encore une conjecture.

Cependant, un autre cas particulier de ce "théorème généralisé" est bien connu : c'est la version topologique du théorème de Poincaré-Birkhoff. Ce dernier théorème concerne les homéomorphismes de l'anneau  $S^1 \times [0, 1]$ , préservant l'orientation, sans point fixe, et qui sont des distorsions au sens qu'ils tournent dans des sens opposés sur les deux bords, ou, plus correctement, admettent un relevé à la bande  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  qui pousse dans des sens opposés sur les deux bords. Le théorème affirme alors qu'à toute telle distorsion est associée une courbe de l'anneau, fermée, simple, non homotope à zéro et disjointe de son image par la distorsion. En considérant un relevé de la distorsion à la bande  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ , on voit qu'une manière de construire la courbe cherchée est de construire, pour ce relevé étendu trivialement à  $\mathbb{R}^2$ , un ouvert comme dans le théorème de translation plane qui soit de plus équivariant pour la translation horizontale d'amplitude 1 (considérons que  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ). Il s'agit donc de construire, au moins pour ce cas, une version équivariante du théorème de Brouwer. Le second but de cette partie est de donner une preuve du théorème de Poincaré-Birkhoff selon cette approche. Une preuve de ce type avait déjà été donnée par Kérékjártò (1928), mais elle partait d'une démonstration plus compliquée que celle exposée ici du théorème de translation plane et restait donc difficile.

Le théorème de Poincaré-Birkhoff reste l'un des plus fins parmi les résultats concernant les homéomorphismes des surfaces. Et il a récemment été l'objet de plusieurs preuves nouvelles, notamment celle de Franks (1988). Mais celles-ci n'utilisent du théorème de translation plane que le corollaire à propos des points errants. Il me semble permis d'espérer que celle présentée ici permettra d'avancer vers une meilleure compréhension du "théorème de translation généralisé".

## Références.

Brouwer L.E.J., *Beweis des ebenen Translationssatzes*, Math. Ann., 72 (1912), 37-54.

Brouwer L.E.J., *Über einendentliche Stetige Transformationen von Flächen in sich*, Math. Ann., 69 (1910), 176-180.

Franks J., *A variation on the Poincaré-Birkhoff theorem*, Contemporary Math., 81 (1988), 111-117.

de Kérékjártò B., *The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré*, Acta Sci. Math. Szeged, 4 (1928-29), 86-102.



# **Première partie**



QUATRE ARTICLES DE V.A. ROHLIN

traduits du russe par

S. OCHANINE

- Sur une application de la  $(n+3)$ -sphère dans la  $n$ -sphère
- Classification des applications de la  $(n+3)$ -sphère dans la  $n$ -sphère
- Toute variété de dimension 3 borde une variété de dimension 4
- Nouveaux résultats dans la théorie des variétés de dimension 4



# I. SUR UNE APPLICATION DE LA $(n+3)$ -SPHERE DANS LA $n$ -SPHERE

---

## 1. Enoncé du résultat.

Nous allons désigner par  $\pi_r(S^n)$  le  $r$ -ème groupe d'homotopie de la  $n$ -sphère  $S^n$ , par  $f_2$  l'application de Hopf de  $S^3$  dans  $S^2$  [4] et par  $E$  l'opérateur de suspension de Freudenthal [3]. Posons :

$$f_n = E^{n-2} f_2, \quad g_2 = f_2 f_3, \quad h_2 = f_2 f_3 f_4, \quad g_n = E^{n-2} g_2 (= f_n f_{n+1}),$$

$$h_n = E^{n-2} h_2 (= f_n f_{n+1} f_{n+2}) \quad (n \geq 3);$$

et convenons de noter de la même manière l'application et sa classe d'homotopie. On sait que  $\pi_3(S^2)$  est un groupe cyclique libre engendré par  $f_2$  [6] et que  $\pi_{n+1}(S^n)$  pour  $n \geq 3$  et  $\pi_{n+2}(S^n)$  pour  $n \geq 2$  sont cycliques d'ordre 2 engendrés respectivement par  $f_n$  et  $g_n$  ([11], [3], [15]). On sait également que le groupe  $\pi_5(S^2)$  est cyclique d'ordre 2 de générateur  $h_2$  ([15], [6]), mais les groupes  $\pi_{n+3}(S^n)$  pour  $n \geq 3$  n'ont pas été calculés complètement. A l'inverse, on a entièrement déterminé le comportement de l'homomorphisme  $E$  sur  $\pi_{n+3}(S^n)$  pour  $n \geq 3$  ([7], [18], [3]), alors qu'il reste inconnu sur  $\pi_5(S^2)$ . Nous allons démontrer dans cette note que, pour  $n \geq 3$ , l'application  $h_n$  est homotopiquement triviale et que par conséquent  $E \pi_5(S^2) = 0$ .

Remarquons d'abord que chacune des identités  $h_n = 0$  ( $n \geq 3$ ) entraîne toutes les autres. En effet, comme l'homomorphisme  $E$  est injectif sur  $\pi_6(S^3)$  et sur  $\pi_{n+3}(S^n)$  pour  $n \geq 5$  ([7], [3]) et que dans  $\pi_7(S^4)$  son noyau a une intersection nulle avec le sous-groupe  $E \pi_6(S^3)$  [18],  $E^{n-3}$  est une injection de  $\pi_6(S^3)$  dans  $\pi_{n+3}(S^n)$  ( $n \geq 4$ ). Nous allons donc nous contenter de démontrer l'identité  $h_n = 0$  pour  $n$  grand.

## 2. Construction d'applications selon Pontriaguine.

Toutes les variétés considérées seront désormais lisses et compactes (avec ou sans bord). Soit  $M^k$ ,  $k = r - n$ , une sous-variété close de dimension  $k$ , connexe ou pas, de l'espace euclidien  $R^r$  clos en une sphère  $S^r$  par un point à l'infini. Supposons donné, en chaque point  $a \in M^k$ , un système  $F_n(a)$  de vecteurs orthonormaux  $v_1(a), \dots, v_n(a)$  normaux à  $M^k$  et qui dépendent continuellement de  $a$ . Le champ de repères  $(F_n | M^k)$  définit de la manière suivante une application de  $S^r$  dans  $S^n$  :

un voisinage  $U^r$  de  $M^k$  se décompose naturellement en un produit de  $M^k$  et d'un disque  $V^n$  de dimension  $n$ , de sorte que tout  $x \in U^r$  s'écrit :  $x = \{a(x), \eta(x)\}$ , où  $a(x) \in M^k$  et  $\eta(x) \in V^n$ ; on complète  $V^n$  par un point  $q$  pour en faire une sphère  $S^n$  et on pose  $f(x) = \eta(x)$  si  $x \in U^r$ , et  $f(x) = q$  si  $x \in S^r - U^r$ . Une construction analogue est possible pour le cas où  $M^k$  est une variété plongée dans le demi-espace  $R_1^r$  de  $R^r$ , ayant son bord  $M^{k-1}$  dans le bord  $R_1^{r-1}$  de  $R_1^r$ , à condition que la partie  $F_n^0$  du champ  $F_n$  induite sur le bord  $M^{k-1}$  soit dans  $R_1^{r-1}$ . Nous obtenons une application du disque de dimension  $r$  dans  $S^n$  qui coïncide sur le bord  $S^{n-1}$  de ce disque avec l'application obtenue à partir du champ de repères  $(F_n^0 | M^{k-1})$ . Ce champ sera appelé bord du champ  $(F_n | M^k)$ .

### 3. Champ de repères de l'application $h_n$ .

Soit  $e_1, \dots, e_{n+3}$  une base orthonormée de  $R^{n+3}$  ( $n \geq 2$ ) et  $R_0^4$  le sous-espace de  $R^{n+3}$  engendré par  $e_1, e_2, e_3, e_4$ . On notera  $x_1, x_2, x_3, x_4$  les coordonnées dans cette base de  $R_0^4$ . Soit  $T_0^2$  le 2-tore plongé de la manière habituelle dans le sous-espace  $x_4 = 0$  de  $R_0^4$ :

$$x_1 = (4 + 2 \cos \alpha_2) \cos \alpha_1, \quad x_2 = (4 + 2 \cos \alpha_2) \sin \alpha_1, \quad x_3 = \sin \alpha_2 \quad (\dagger)$$

$$(0 \leq \alpha_1, \alpha_2 < 2\pi),$$

et soit  $T_0^3$  le 3-tore, bord du voisinage unitaire de  $T_0^2$  dans  $R_0^4$ :

$$x_1 = [4 + (2 + \cos \alpha_3) \cos \alpha_2] \cos \alpha_1, \quad x_2 = [4 + (2 + \cos \alpha_3) \cos \alpha_2] \sin \alpha_1,$$

$$x_3 = (2 + \cos \alpha_3) \sin \alpha_2, \quad x_4 = \sin \alpha_3 \quad (0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 2\pi).$$

Notons  $n(a)$  le vecteur normal unitaire extérieur à  $T_0^3$  dans  $R_0^4$  au point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in T_0^3$  et posons :

$$u_1(a) = n(a) \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - e_5 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),$$

$$u_2(a) = n(a) \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + e_5 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),$$

$$u_3 = e_6, \dots, u_n = e_{n+3}, \quad H_n^0(a) = \{u_1(a), \dots, u_n(a)\}.$$

On vérifie aisément que l'application de  $S^{n+3}$  dans  $S^n$  qui correspond au champ de repères  $(H_n^0 | T_0^3)$  appartient à la classe  $h_n$ .

Considérons maintenant  $R^{n+3}$  comme bord du demi-espace  $R_1^{n+4}$ . D'après le n° 2, on aura prouvé  $h_n = 0$  si l'on trouve dans  $R_1^{n+4}$  un champ de repères  $(H_n | M^4)$  de bord  $(H_n^0 | T_0^3)$ .

La variété la plus simple de bord  $T_0^3$  est le produit d'un 2-tore et d'un 2-disque.

(†) Il faut lire  $x_3 = 2 \sin \alpha_2$  (voir les formules suivantes) N.d.T.

Cette variété ne convient pas dans le rôle de  $M^4$ , car le champ  $H_n^0$  ne s'étend pas sur cette variété : son 2-tore axial est toujours pour  $H_n^0$  un cycle caractéristique au sens de [17] [20].

#### 4. Construction de la variété $M^4$ .

Soient  $R^4$  l'espace euclidien,  $T^2, T^3$  des tores plongés dans  $R^4$  de la même manière que  $T_0^2, T_0^3$  le sont dans  $R_0^4$ , et  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  des cercles sur  $T^3$  définis respectivement par les équations  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ;  $\alpha_3 = \alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Complétons  $R^4$  par un point pour en faire une sphère  $S^4$  et désignons par  $K^4$  et  $E^4$  respectivement les parties extérieure et intérieure à  $T^3$  dans  $S^4$ .  $E^4$  est le produit d'un 2-tore et d'un 2-disque, avec  $T^2$  pour tore axial. Pouvons le cercle  $\zeta_3$  de  $T^3$  à l'intérieur de  $K^4$ , enlevons un voisinage de ce cercle, produit du cercle par un 3-disque et recollons à sa place le produit d'une 2-sphère et d'un 2-disque par un difféomorphisme. Ce recollement peut se faire de deux façons homotopiquement différentes. La première façon transforme  $S^4$  en un produit direct  $P^4$  de deux 2-sphères, l'autre conduit à un produit tordu de ces deux sphères. Nous allons choisir la première manière et noter  $L^4$  la partie de  $P^4$  en laquelle se transforme alors  $K^4$ . Dans  $L^4$ , prenons une 2-sphère  $\Sigma^2$  homologue<sup>(†)</sup> au 2-tore  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$  contenu dans  $T^3$ ; enlevons un voisinage de  $\Sigma^2$ , produit d'une 2-sphère et d'un 2-disque, et recollons-le d'une manière homotopiquement différente. Alors  $P^4$  se transformera en une variété  $Q^4$ , alors que  $L^4$  deviendra la variété cherchée  $M^4$  de bord  $T^3$ .

Les variétés  $M^4$  et  $Q^4$  ont les propriétés suivantes, qui seules seront essentielles pour la suite :

a) Pour tout recollement à  $M^4$  du produit d'un 2-tore et d'un 2-disque, le 2-tore axial de ce produit devient un cycle caractéristique [17][20]. En particulier,  $T^2$  est un 2-cycle caractéristique de  $Q^4$ .

b) Le nombre caractéristique de Pontriaguine  $X_{22}$  [12][13] de la variété  $Q^4$  est nul.

#### 5. Construction du champ $(H_n | M^4)$ .

La construction explicite du champ  $(H_n | M^4)$  dans  $R_1^{n+4}$  de bord  $(H_n^0 | T_0^3)$  serait fastidieuse, et nous allons nous contenter de la preuve de son existence. Pour  $n$  suffisamment grand, il existe un plongement de  $Q^4$  dans  $R^{n+4}$  qui envoie  $M^4$

(†) Une telle 2-sphère n'existe pas ; cf. l'article IV et les commentaires (N.d.T.)

dans  $R_1^{n+4}$ , qui identifie canoniquement les tores  $T^3 \subset Q^4$  et  $T_0^3$  (en identifiant les points de  $T^3$  et  $T_0^3$  ayant les mêmes coordonnées  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ), et pour lequel les  $n$ -plans normaux à  $Q^4$  aux points du tore  $T_0^3$  tombent dans  $R^{n+3}$ . Comme  $T^2$  est un 2-cycle caractéristique de la variété  $Q^4$ , il existe un champ de repères  $(G_n | M^4)$  sur  $M^4$ . En modifiant, s'il le faut, le signe de l'un des vecteurs de ce champ, on obtient que son bord  $(G_n^0 | T_0^3)$  soit orienté de la même manière que le champ  $(H_n^0 | T_0^3)$ , et en comparant  $(G_n^0 | T_0^3)$  et  $(H_n^0 | T_0^3)$ , on obtient une application  $\varphi$  du tore  $T_0^3$  dans la variété  $\Gamma_n$  des rotations de l'espace euclidien de dimension  $n$ . Aucun des champs  $G_n^0$  et  $H_n^0$  ne s'étend sur  $E^4$ , et pour les deux, le tore  $T^2$  est un cycle caractéristique (cf. n° 3 et n° 4 a)). Comme le groupe fondamental de  $\Gamma_n$  a deux éléments, cela entraîne que l'application  $\varphi$  est homotopiquement triviale sur le cercle  $\zeta_3$ . En enlevant  $E^4$  et en recollant à  $M^4$  à sa place le produit d'un 2-tore et d'un 2-disque de manière à ce que ce soit  $\zeta_1$  ou  $\zeta_2$  qui devienne homologue à 0, nous voyons que  $\varphi$  est homotopiquement triviale également sur ces cercles. Elle est de plus homotopiquement triviale en dimension 3 ce qui découle de la nullité de  $X_{22}(Q^4)$  (cf. n° 4, b)). Mais toute application d'un 3-tore homotopiquement triviale en dimension 1 et 3 est homotopiquement triviale. Il en est ainsi de  $\varphi$  et on peut donc obtenir le champ  $(H_n^0 | T_0^3)$  par déformation du champ  $(G_n^0 | T_0^3)$ . Le champ de repères  $(H_n | M^4)$  de bord  $(H_n^0 | T_0^3)$  qu'on cherche, s'obtient en prolongeant cette déformation en une déformation du champ  $(G_n | M^4)$ .

## II. CLASSIFICATION DES APPLICATIONS DE LA (n+3)-SPHERE DANS LA n-SPHERE

### 1. Considérations préliminaires.

Dans ce travail, nous utilisons la méthode de Pontriaguine de réduction de problèmes homotopiques à des problèmes de champ de repères [15]. On s'appuie sur les définitions du n° 2 de ma note [I]. Les classes d'homotopie des applications sont notées de la même manière que les applications elles-mêmes. Fixons une base  $e_1, \dots, e_r$  de  $R^r$  et soient  $R_0^{k+1}$  le sous-espace de  $R^r$  engendré par  $e_1, \dots, e_{k+1}$  et  $S_0^k$  la sphère-unité de  $R_0^{k+1}$ . Les classes d'applications engendrées par les champs de repères  $(F_n | M^k) \subset R^r$ ,  $r = n+k$ , où  $M^k = S_0^k$ , sont appelées sphériques et engendrent le sous-groupe sphérique  $\pi_r^0(S^n)$  de  $\pi_r(S^n)$ . Le groupe  $\pi_r^0(S^n)$  est canoniquement un groupe quotient du groupe  $\pi_k(\Gamma_n)$ , k-ème groupe d'homotopie de la variété  $\Gamma_n$  des matrices orthogonales d'ordre n de déterminant +1. En effet, soient  $\varphi$  une application de  $S_0^k$  dans  $\Gamma_n$ ,  $n(a)$  le vecteur normal unitaire extérieur à  $S_0^k$  dans  $R_0^{k+1}$  au point  $a \in S_0^k$ ,  $F_n(a)$  le repère-image du repère  $\{n(a), e_{k+2}, \dots, e_{k+n} = e_r\}$  par la matrice  $\varphi(a)$  et  $f$  l'application de  $S^r$  dans  $S^n$  engendrée par le champ  $(F_n | S_0^k)$ . La classe de  $\varphi$  détermine celle de  $f$  et l'on écrit  $f = D\varphi$ . Alors  $D$  est un homomorphisme surjectif de  $\pi_k(\Gamma_n)$  dans  $\pi_r^0(S^n)$ . La variété  $\Gamma_n$  admet un plongement canonique  $I$  dans  $\Gamma_{n+1}$ : la matrice  $\|\gamma'_{ij}\| = I(\|\gamma_{ij}\|)$  est définie par  $\gamma'_{ij} = \gamma_{ij}$ ,  $\gamma'_{i, n+1} = \gamma'_{n+1, j} = 0$  ( $i, j = 1, \dots, n$ );  $\gamma'_{n+1, n+1} = 1$ . Ce plongement est relié à l'opérateur de suspension de Freudenthal [3] par  $ED = DI$ . En particulier,  $E\pi_r^0(S^n) \subset \pi_{r+1}^0(S^{n+1})$ .

Passant au cas  $k = 3$ , nous allons considérer les points  $x \in R^4$  comme quaternions ayant  $e_1, e_2, e_3, e_4$  pour unités et noter  $xy$  et  $(x, y)$  respectivement le produit et le produit scalaire de deux quaternions  $x, y$ . Le groupe  $\pi_3(\Gamma_3)$  est cyclique libre engendré par la classe de l'application  $\varphi_3$  définie par :  $\varphi_3(a) = \|\gamma_{ij}(a)\|$ ,  $\gamma_{ij}(a) = (ae_{i+1}a^{-1}, e_{j+1})$  ( $a \in S_0^3$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ ). Le groupe  $\pi_6^0(S^3)$  est cyclique engendré par  $f_3 = D\varphi_3$ . La classe  $f_3$  a été étudiée par Blakers et Massey [1]. Il découle de leurs résultats que  $f_3$  n'est pas divisible par 2 et que l'ordre du groupe  $\pi_6(S^3)$  est pair. On sait également que cet ordre est divisible par 3 [16]. Le groupe  $\pi_3(\Gamma_4)$  est la somme directe de deux de ses sous-

groupes cycliques libres ayant pour générateurs  $\varphi_4, \psi_4$  définis par  $\varphi_4 = I\varphi_3$ ,  $\psi_4(a) = \|\gamma_{ij}(a)\|$ ,  $\gamma_{ij}(a) = (ae_i, e_j)$  ( $a \in S_0^3$ ;  $i, j = 1, 2, 3, 4$ ). Le groupe  $\pi_7^0(S^4)$  est la somme de deux de ses sous-groupes cycliques engendrés par  $f_4 = D\varphi_4 = Ef_3$  et  $g_4 = D\psi_4$ . On voit aisément que  $g_4$  est la classe de l'application de Hopf de  $S^7$  dans  $S^4$  [5], de sorte que le sous-groupe  $\{g_4\}$  est libre, et on sait que  $E$  est une injection du groupe  $\pi_6(S^3)$  dans  $\pi_7(S^4)$  et que le groupe  $\pi_7(S^4)$  est somme directe des sous-groupes  $E\pi_6(S^3)$  et  $\{g_4\}$  [7]. Ainsi,  $\pi_7^0(S^4)$  est somme directe des sous-groupes  $E\pi_6^0(S^3)$  et  $\{g_4\}$ . Le groupe  $\pi_3(I_n)$ ,  $n \geq 5$ , est cyclique libre engendré par  $\psi_n = I^{n-4}\psi_4$ . Le groupe  $\pi_{n+3}^0(S^n)$ ,  $n \geq 5$ , est cyclique de générateur  $g_n = D\psi_n = E^{n-4}g_4$ , et on sait [3] que  $E$  est un isomorphisme de  $\pi_{n+3}(S^n)$  sur  $\pi_{n+4}(S^{n+1})$  pour  $n \geq 5$ . Enfin, le noyau de l'homomorphisme  $I$  de  $\pi_3(I_4)$  dans  $\pi_3(I_5)$  est cyclique de générateur  $\chi_4 = \varphi_4 - 2\psi_4$ , et il s'avère que le sous-groupe cyclique de  $\pi_7^0(S^4)$  engendré par  $h_4 = D\chi_4 = f_4 - 2g_4$  est le noyau de l'homomorphisme  $E$  sur le groupe  $\pi_7(S^4)$  tout entier. On sait que ce noyau est cyclique et on a déterminé, en des termes différents des nôtres, un générateur  $h$  de ce noyau [18]. Nous utiliserons le fait que l'invariant de Hopf  $\gamma(h) = \pm 2$ . Notons que  $\gamma(h_4) = \gamma(f_4) - 2\gamma(g_4) = -2$ . Comme  $Eh_4 = ED\chi_4 = DI\chi_4 = 0$ , on a :  $h_4 \in \{h\}$ ,  $h_4 = \lambda h$ ,  $\gamma(h_4) = \lambda \gamma(h)$ ,  $\lambda = \pm 1$  et  $h_4 = \pm h$ .

## 2. Enoncé des principaux résultats.

Le groupe  $\pi_6(S^3)$  est cyclique d'ordre 6 et engendré par  $f_3$ . Le groupe  $\pi_7(S^4)$  est somme directe du sous-groupe d'ordre 6 engendré par  $f_4$  et du sous-groupe cyclique libre engendré par  $g_4$ . Le groupe  $\pi_{n+3}(S^n)$  pour  $n \geq 5$  est cyclique d'ordre 12 de générateur  $g_n$ . En particulier,  $\pi_{n+3}(S^n) = \pi_{n+3}^0(S^n)$  ( $n \geq 3$ ).

En vertu de ce qui a été dit dans le n° 1, il suffit de prouver que :

- a) pour  $n$  grand,  $\pi_{n+3}(S^n) = \pi_{n+3}^0(S^n)$  ;
- b) pour  $n$  grand,  $12g_n = 0$ .

Il découle des résultats de L.S. Pontriaguine [15] que, dans toute classe d'applications de  $S^r$  dans  $S^n$ , il en est une qui est engendrée par un champ  $(F_n | M^k) \subset R^r$  et que tout champ  $(F_n | M^k) \subset R^r$  qui engendre une application homotope à zéro, est le bord d'un champ  $(F'_n, M^{k+1})$  défini dans le demi-espace  $R_1^{r+1}$  (de bord  $R^r$ ) de l'espace  $R^{r+1}$ . Il en découle aisément que les affirmations a) et b) sont équivalentes aux affirmations :

- a') pour  $n$  grand et tout champ  $(F_n | M^3) \subset R^r$  tel que  $M^3 \cap S_0^3 = \emptyset$ ,

il existe un champ  $(G_n | M^4) \subset R_1^{n+4}$  de bord  $(F_n | M^3) + (F_n^0 | S_0^3)$  composé du champ  $(F_n | M^3)$  et d'un certain champ  $(F_n^0 | S_0^3)$  ;

b') il existe dans  $R_1^{n+4}$  un champ  $(H_n | N^4)$  de bord  $(H_n^0 | S_0^3)$  construit selon le schéma du n° 1 à partir d'une application de la classe  $12\psi_n$ .

### 3. Construction du champ $(G_n | M^4)$ .

Soit  $M_1^4$  une variété orientée dont le bord  $M_1^3$  est difféomorphe à  $M^3$  ; on peut prouver qu'une telle variété existe pour toute variété orientée close  $M^3$ . Plongeons  $M_1^4$  dans  $R^{n+4}$  de telle manière que le bord  $M_1^3$  coïncide avec  $M^3$  et que les plans normaux à  $M_1^4$  aux points de ce bord tombent dans  $R^{n+3}$ , et essayons de prolonger  $F_n$  de  $M^3$  à  $M_1^4$  tout entier. Nous obtiendrons dans  $M_1^4$  une classe  $z^2 = z^2(M_1^4)$  d'homologie (absolue) modulo 2 dont chaque cycle peut être réalisé comme cycle caractéristique. Cette classe ne dépend pas du plongement de  $M_1^4$  dans  $R^{n+4}$  satisfaisant aux conditions énoncées. Si la variété  $M_1^4$  est close (le bord  $M_1^3$  est vide), alors  $z^2(M_1^4)$  est simplement la 2-classe caractéristique homologique [17][20]. Nous allons montrer qu'il existe un  $M_1^4$  avec  $z^2 = 0$ . Le champ  $F_n$  pour une telle variété  $M_1^4$  peut être étendu en un champ  $G_n$  défini sur  $M_1^4$  dans le complément du voisinage sphérique  $V^4$  d'un point. Posons  $M^4 = M_1^4 - V^4$  et plongeons  $M_1^4$  dans  $R^{n+4}$  de manière à ce que  $M^4$  tombe dans  $R_1^{n+4}$  ; son bord  $M_1^3 + S_1^3$ , où  $S_1^3$  est le bord du disque  $V^4$ , coïncide avec  $M^3 + S_0^3$  et les plans normaux à  $M_1^4$  aux points de ce bord tombent dans  $R^{n+3}$ . Nous obtenons le champ voulu  $(G_n | M^4)$ .

Prenons d'abord un  $M_1^4$  connexe arbitraire. On peut rendre nul le premier groupe d'homologie de  $M_1^4$  par exemple en enlevant les voisinages d'un ensemble de chemins fermés à l'intérieur de  $M_1^4$  formant une base de ce groupe, et en les remplaçant par des produits de 2-sphères et de 2-disques. On peut considérer alors la classe  $z^2$  comme réduction modulo 2 d'une classe d'homologie entière  $Z^2$ . Nous allons montrer que le nombre d'auto-intersection  $i(Z^2, Z^2)$  de la classe  $Z^2$  peut être rendu nul. Soient  $Q^4$  le plan projectif complexe orienté,  $Q_1^4$  le complément du voisinage sphérique d'un de ses points,  $Q^2$  une droite projective orientée dans  $Q_1^4$  et  $\Sigma^2$ ,  $\sigma^2$  les classes d'homologie entière et d'homologie modulo 2 qu'elle définit. Choisissons une orientation de  $M_1^4$ , enlevons de  $M_1^4$  le voisinage sphérique de l'un de ses points et recollons à sa place  $Q_1^4$  en prenant soin d'accorder les orientations. Nous obtenons une nouvelle variété  $\bar{M}_1^4$  du type de  $M_1^4$ , et on déduit facilement, du fait que  $\sigma^2$  est la 2-classe caractéristique de la variété  $Q^4$ , que  $z^2(\bar{M}_1^4) = z^2(M_1^4) + \sigma^2$ . Cette classe est la réduction modulo 2 de la classe entière

$\bar{Z}^2 = Z^2 + \Sigma^2$ , et on a :

$$i(\bar{Z}^2, \bar{Z}^2) = i(Z^2, Z^2) + i(\Sigma^2, \Sigma^2) = i(Z^2, Z^2) \pm 1,$$

où le signe dépend de l'orientation de  $Q^4$ . En répétant cette opération un nombre suffisant de fois et en choisissant une orientation convenable de  $Q^4$ , on obtient une variété  $M_1^4$  et une classe  $Z^2$  telles que  $i(Z^2, Z^2) = 0$ .

Soit  $P^2$  une surface orientée close à l'intérieur de  $M_1^4$  qui représente  $Z^2$  (cf. [20], §23). Comme  $i(Z^2, Z^2) = 0$ , un voisinage  $U^4$  de  $P^2$  se décompose en un produit de  $P^2$  par un 2-disque (cf. [20], §18). Plongeons  $P^2$  dans  $R^3 \subset R^4$  comme sphère avec anses et faisons de  $R^4$  une sphère  $S^4$  en lui ajoutant un point. Soit  $E^4$  un voisinage de  $P^2$  dans  $R^4$  et  $\xi$  le difféomorphisme naturel entre  $U^4$  et  $E^4$ . Prenons dans  $S^4 - E^4$  un cercle enlacé avec  $P^2$ , enlevons un voisinage de ce cercle et, après avoir recollé à sa place le produit d'une 2-sphère et d'un 2-disque de manière à transformer  $S^4$  en un produit  $P^4$  de deux 2-sphères, recollons  $M_1^4 - U^4$  et  $P^4 - E^4$  à l'aide de  $\xi$ . On obtient une nouvelle variété  $\bar{M}_1^4$  du type de  $M_1^4$ . Etendons  $F_n$  sur  $M_1^4 - U^4$  et construisons un champ de repères quelconque sur  $P^4 - E^4$  ayant la même orientation. Soient  $C_1^1, \dots, C_p^1; C_1^2, \dots, C_p^2$  des bases de l'homologie du bord  $P^3$  de  $P^4 - E^4$  telles que  $i(C_\alpha^1, C_\beta^2) = \delta_{\alpha\beta}$ , et soient  $C_{\alpha_1}^1, \dots, C_{\alpha_q}^1$  ceux des chemins  $C_1^1, \dots, C_p^1$  sur lesquels les deux champs obtenus ne sont pas homotopes. A l'intérieur de  $P^4 - E^4$ , prenons une sphère  $\Sigma^2$  homologue (dans  $P^4 - E^4$ ) au cycle  $C_{\alpha_1}^2 + \dots + C_{\alpha_q}^2$ ; enlevons un voisinage de  $\Sigma^2$  (produit de  $\Sigma^2$  par un 2-disque) et recollons le même voisinage d'une manière homotopiquement différente (cf. I, n° 4). Alors  $\bar{M}_1^4$  se transforme en une variété du type de  $M_1^4$  pour laquelle  $z^2 = 0$ .

Notons pour la suite que, dans le cas où  $M_1^4$  est close, les opérations précédentes la transforment en une variété qui avec  $M_1^4$  borde une variété orientée de dimension 5. Donc, si la classe caractéristique  $z^2(M_1^4)$  d'une variété close  $M_1^4$  est la réduction modulo 2 d'une classe entière  $Z^2$  telle que  $i(Z^2, Z^2) = 0$ , alors il existe une variété close  $N_1^4$ , telle que  $z^2(N_1^4) = 0$ , et qui borde avec  $M_1^4$  une variété orientée de dimension 5.

#### 4. Construction du champ $(H_n | N^4)$ .

Nous allons montrer qu'il existe une variété close orientée  $N_1^4$  dont la 2-classe caractéristique  $z^2$  est nulle et dont le nombre caractéristique de Pontriaguine  $X_{22}$

---

(†) Une telle 2-sphère n'existe pas ; cf. l'article IV et les commentaires (N.d. T.)



([12][13]) est  $\pm 24$  (+). Pour tout plongement d'une telle variété dans  $R^{n+4}$ , on peut construire un champ de repères  $H_n$  défini sur le complément d'un voisinage sphérique  $V^4$  d'un de ses points. Posons  $N^4 = N_1^4 - V^4$  et plongeons  $N_1^4$  dans  $R^{n+4}$  de manière à ce que  $N^4$  tombe dans  $R_1^{n+4}$ ; son bord orienté  $S_1^3$  coïncide avec la sphère  $S_0^3$  et les plans normaux à  $N_1^4$  aux points de ce bord tombent dans  $R^{n+3}$ . Nous obtenons le champ voulu  $(H_n | N^4)$ . Le fait que son bord  $(H_n^0 | S_0^3)$  correspond, selon le schéma du n° 1 à une application de  $S_0^3$  dans  $\Gamma_n$  de la classe  $12\psi_n$ , découle de ce que  $X_{22} = \pm 24$ . En effet, on peut voir par un calcul que la multiplicité, au sens de Pontriaguine [13], de la singularité de type  $X_{22}$  qu'a au centre de  $V^4$  le champ construit sur  $S_0^3$  selon le schéma du n° 1 à partir d'une application de  $S_0^3$  dans  $\Gamma_n$  de la classe  $\lambda\psi_n$ , est  $\pm 2\lambda$ , et dans notre cas cette multiplicité est  $X_{22}$ .

Soit  $Q_0^4$  le plan projectif complexe orienté percé de 9 trous sphériques et soient  $Q_j^4$  ( $j = 1, \dots, 9$ ) des plans projectifs complexes percés d'un trou sphérique et ayant l'orientation opposée. Recollons  $Q_0^4, \dots, Q_9^4$  en accordant les orientations en une variété close  $M_1^4$  et notons  $\Sigma_j^2$  ( $j = 0, 1, \dots, 9$ ) la classe d'homologie entière d'une droite projective dans  $Q_j^4$ . Posons  $Z^2 = 3\Sigma_0^2 + \Sigma_1^2 + \dots + \Sigma_9^2$ . La classe  $Z^2$  réduite modulo 2 est la classe caractéristique  $z^2$  de la variété  $M_1^4$  et  $i(Z^2, Z^2) = 9i(\Sigma_0^2, \Sigma_0^2) + i(\Sigma_1^2, \Sigma_1^2) + \dots + i(\Sigma_9^2, \Sigma_9^2) = \pm(9 - 1 - \dots - 1) = 0$ . Donc (cf. la fin du n° 3), il existe une variété close  $N_1^4$  telle que  $z^2(N_1^4) = 0$  et qui borde avec  $M_1^4$  une variété orientée de dimension 5. Cette dernière propriété entraîne que  $X_{22}(N_1^4) = X_{22}(M_1^4)$  (cf. [12], théorème 3), alors que  $X_{22}(M_1^4) = +24$  (cf. [13], §3, E). Ainsi,  $z^2(N_1^4) = 0$  et  $X_{22}(N_1^4) = \pm 24$ .

### 5. Remarques.

Les techniques de ce travail permettent de démontrer facilement que  $X_{22}(M^4) \equiv 0 \pmod{3}$  pour toute variété close orientée  $M^4$  et que, si  $z^2(M^4) = 0$ , on a  $X_{22}(M^4) \equiv 0 \pmod{24}$ .

(+) Le lien entre l'existence d'une variété de dimension 4 telle que  $z^2 = 0$ , mais  $X_{22} \neq 0$ , et l'étude des applications de  $S^{n+3}$  dans  $S^n$  a été indiqué par Pontriaguine [12].

### III. TOUTE VARIÉTÉ DE DIMENSION 3 BORDE UNE VARIÉTÉ DE DIMENSION 4

#### 1. Énoncé du résultat.

Par variété, on entend dans cet article, une variété lisse compacte, avec ou sans bord. On dit qu'une variété  $M^k$  borde si elle est difféomorphe au bord d'une variété  $M^{k+1}$ , orientable si  $M^k$  est orientable. Le résultat de cet article est que toute variété close de dimension 3 borde. Ce théorème peut être appliqué à la classification des applications d'une  $(n+3)$ -sphère dans une  $n$ -sphère (cf. II, n° 3) et a été conjecturé (dans le cas orientable) par L.S. Pontriaguine [12].

Nous ne considérerons que le cas orientable. Par la suite, la variété  $M^3$  est supposée connexe.

#### 2. Plan de la démonstration.

Le point de départ est le fait suivant :

A. Si une variété orientable close  $M^3$  peut être plongée dans  $R^5$ , alors  $M^3$  borde.

Pour déduire de ce lemme le théorème général, nous allons définir deux opérations  $O_1$  et  $O_2$  qui transforment les variétés orientables closes en des variétés du même type et qui possèdent les propriétés suivantes :

B. Toute variété orientable close  $M^3$  peut être transformée par un nombre fini d'opérations  $O_1$  et  $O_2$  en une variété qui se plonge dans  $R^5$ .

C. Si l'une des variétés  $O_1(M^3)$  ou  $O_2(M^3)$  borde, il en est de même pour  $M^3$ .

#### 3. Définition des opérations $O_1$ et $O_2$ .

Soit  $K$  un tore solide dans  $M^3$  avec les coordonnées différentiables  $\alpha, \xi, \eta$ , où  $\alpha$  est la coordonnée cyclique et  $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$ . On retire l'intérieur de  $K$  et on transforme le tore  $\xi^2 + \eta^2 = 1$  qui borde maintenant la variété en une bouteille de Klein en identifiant les points  $(\alpha, \xi, \eta)$  et  $(\alpha + \pi, \xi, -\eta)$ . Alors  $M^3$  est transformée en  $O_1(M^3)$ .

Soient  $K'$  et  $K''$  deux tores solides disjoints ayant des systèmes de coordonnées  $(\alpha, \xi, \eta)$  du type précédent et qui induisent des orientations opposées dans  $M^3$ . On retire les intérieurs de  $K'$  et  $K''$  et on identifie les tores  $\xi^2 + \eta^2 = 1$  en identifiant les points ayant les mêmes coordonnées  $(\alpha, \xi, \eta)$ . Alors  $M^3$  est transformée en  $O_2(M^3)$ .

4. Démonstration du lemme B.

Un point  $x \in M$  est dit point multiple d'une application  $f$  de l'ensemble  $M$ , s'il existe un point  $y \in M$  tel que  $y \neq x$ , mais  $f(y) = f(x)$ . S'il n'existe qu'un seul  $y$  qui a cette propriété, on dit que  $x$  est un point double. Il découle des résultats de Whitney [21] qu'il existe une application lisse  $f$  de  $M^3$  dans  $R^5$  qui a les propriétés suivantes :

- a) le rang de  $f$  en chaque point de  $M^3$  est égal à 3 ;
- b) tous les points multiples de  $f$  sont des points doubles et sont disposés sur des courbes lisses disjointes closes  $C_1, C_2, \dots, C_p$  ;  $C_1', C_1'', C_2', C_2'', \dots, C_q', C_q''$  de telle manière que  $C_i$  recouvre deux fois  $f(C_i)$  ( $i = 1, \dots, p$ ) et  $f(C_j') = f(C_j'')$  ( $j = 1, \dots, q$ ) ;
- c) les plans de dimension 3 tangents à  $f(M^3)$  au point  $f(x) = f(y)$  ( $x \neq y$ ) ont une intersection de dimension 1 pour tout point double  $x \in M^3$ .

Soient  $K_i, K_j', K_j''$  des voisinages toriques des courbes  $C_i, C_j', C_j''$  dans  $M^3$  ayant des coordonnées  $(\alpha, \xi, \eta)$  (cf. n° 3). En retirant les intérieurs des tores  $K_i, K_j', K_j''$ , on a un plongement de la variété  $\bar{M}^3$  à bord, ainsi obtenue, dans  $R^5$ . Si l'on effectue sur le bord de  $\bar{M}^3$  les identifications décrites dans le n° 3 pour chaque  $i$  et chaque  $j$ , on obtient une variété close  $N^3$  qui est le résultat de l'application à  $M^3$  de  $p$  opérations du type  $O_1$  et de  $q$  opérations du type  $O_2$ . Les identifications correspondantes sur le bord de  $f(\bar{M}^3)$  peuvent être effectuées dans  $R^5$ , et nous obtenons ainsi un plongement de  $N^3$  dans  $R^5$ .

5. Démonstration du lemme C.

Supposons que  $M_1^3 = O_1(M^3)$  est le bord d'une variété orientée  $M_1^4$ . Dans le tore  $\xi^2 + \eta^2 = 1$  dans  $M^3$ , on pose  $\xi = \cos \beta$ ,  $\eta = \sin \beta$  et l'on considère que  $\alpha$  et  $\beta$  sont les coordonnées de la surface  $B^2$  (bouteille de Klein) liées par la relation  $(\alpha, \beta) = (\alpha + \pi, -\beta)$ . On inclut ce système de coordonnées dans un système de coordonnées différentiables  $\alpha, \beta, s$  ( $-1 \leq s \leq 1$ ;  $\alpha$  et  $\beta$  cycliques comme précédemment) définies dans un voisinage fermé  $U^3$  de  $B^2$  dans  $M_1^3$  et liées par la relation  $(\alpha, \beta, s) = (\alpha + \pi, -\beta, -s)$ , et telles que  $B^2$  soit définie dans  $U^3$  par l'équation  $s = 0$ . Il existe un voisinage de  $M_1^3$  dans  $M_1^4$  difféomorphe au produit de  $M_1^3$  par un segment. En conséquence, on peut inclure le système de coordonnées  $\alpha, \beta, s$  dans un système de coordonnées différentiables  $\alpha, \beta, s, t$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ;  $\alpha, \beta$  cycliques;  $-1 \leq s \leq 1$ ) définies dans un voisinage fermé  $V^4$  de  $B^2$  dans  $M_1^4$  et liées par la relations  $(\alpha, \beta, s, t) = (\alpha + \pi, -\beta, -s, t)$  et de telle manière que  $U^3$  soit défini dans  $V^4$  par l'équation  $t = 1$  et donc que  $B^2$  soit définie par les équations  $s = 0, t = 1$ . Soit  $W^4$  la partie de  $V^4$  où  $s^2 + t^2 \leq 1$  et soit  $P^3$  le bord de  $W^4$ :  $s^2 + t^2 = 1$ .

On pose dans  $W^4$ ,  $s = \rho \sin \gamma$ ,  $t = \rho \cos \gamma$  et l'on considère  $\alpha, \beta, \gamma$  comme étant des coordonnées dans  $P^3$  liées par la relation  $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + \pi, -\beta, -\gamma)$ ;  $B^2$  est alors définie par  $\gamma = 0$ . On retire  $W^4$  de  $M_1^4$  et on la recolle d'une manière différente en utilisant le difféomorphisme  $\alpha' = \alpha$ ,  $\beta' = \gamma$ ,  $\gamma' = \beta$  de son bord  $P^3$ . Alors  $M_1^4$  se transforme en une variété orientable  $M_2^4$  (ayant le même bord  $M_1^3$ ) et  $B^2$  est définie dans  $P^3$  par l'équation  $\beta = 0$ . Dans  $W^4$ , cette équation définit une variété  $Q^3$  de bord  $B^2$ ; en découpant  $M_2^4$  le long de  $Q^3$ , on obtient une variété orientable de dimension 4 dont le bord est difféomorphe à  $M^3$ .

Dans le cas où  $c$  est  $O_2(M^3)$  qui borde, la démonstration est analogue. La seule différence est dans le fait que  $c$  est dans un voisinage d'un tore  $T^2$  (et non d'une bouteille de Klein  $B^2$ ) qu'on introduit les coordonnées  $\alpha, \beta, s$  et  $t$ , et de plus celles-ci ne sont liées par aucune relation.

#### 6. Démonstration du lemme A.

Kneser [8] a donné une méthode qui permet, par éliminations successives des singularités, de transformer un  $k$ -cycle dans une variété combinatoire de dimension  $k+1$  en une variété de dimension  $k$  qui lui est homologue. Cette méthode, légèrement modifiée, permet également de transformer une membrane dans  $R^{k+2}$  dont le bord est une variété orientable  $M^k$  plongée dans  $R^{k+2}$  en une variété orientable  $M^{k+1}$  de bord  $M^k$ . Ceci a un sens combinatoire. En particulier,  $M^k$  est un sous-complexe de  $R^{k+2}$  et  $M^{k+1}$  est un sous-complexe d'une subdivision du complexe  $R^{k+2}$ . Dans ce sens combinatoire, on peut donc dire qu'une variété orientable close  $M^k$  dans  $R^{k+2}$  borde une variété orientable  $M^{k+1}$ .

Si maintenant on a un plongement lisse d'une variété orientable  $M^3$  dans  $R^5$ , nous le remplaçons par un plongement combinatoire proche  $M_1^3$ ; construisons ensuite une variété orientable  $M_1^4$  de bord  $M_1^3$  et introduisons sur  $M_1^4$  une structure différentiable [2]. Cette dernière peut être choisie de manière à ce qu'elle induise sur le bord la structure différentiable initiale.

#### IV. NOUVEAUX RESULTATS DANS LA THEORIE

##### DES VARIETES DE DIMENSION 4

On sait que toute surface close orientée est le bord d'une variété orientée de dimension 3 . Dans ma note III, il est démontré que toute variété close orientée de dimension 3 est le bord d'une variété orientée de dimension 4 . Le théorème analogue pour les variétés orientées de dimension 4 est faux ; par exemple, le plan projectif complexe ne peut être un bord. Dans cette note, on donne une condition homologique nécessaire et suffisante pour qu'une variété close orientée de dimension 4 puisse être le bord d'une variété orientée de dimension 5 . Il s'avère que toute variété close orientée de dimension 4 devient un bord après qu'on lui ait ajouté un certain nombre de plans projectifs complexes convenablement orientés. A l'aide de ce résultat, on arrive à exprimer le nombre caractéristique de Pontriaguine ([12], [13]) en fonction des invariants homologiques de la variété. Des résultats analogues sont obtenus pour les variétés non-orientées. De plus, à partir des résultats de cette note, on corrige l'erreur contenue dans mes notes I et II consacrées au calcul du  $(n+3)$ -ème groupe d'homotopie de la  $n$ -sphère.

##### 1. Définitions.

Par variété, nous entendrons une variété lisse compacte, avec ou sans bord. Pour toute variété orientée  $M^k$ , on note  $-M^k$  la même variété munie de l'orientation opposée, et à toute paire  $M^k, N^k$  de variétés orientées, on associe leur somme  $M^k + N^k$  (réunion disjointe de  $M^k$  et  $N^k$ ) et leur différence  $M^k - N^k = M^k + (-N^k)$ . Convenons de dire qu'une variété orientée  $M^k$  borde ou encore qu'elle est homologue à zéro, et de noter  $M^k \sim 0$ , s'il existe un difféomorphisme préservant l'orientation entre  $M^k$  et le bord d'une variété orientée  $M^{k+1}$ . Convenons ensuite de dire que deux variétés closes orientées  $M^k$  et  $N^k$  sont homologues, et de noter  $M^k \sim N^k$ , lorsque  $M^k - N^k \sim 0$ . En vertu de ces définitions, les variétés closes orientées de dimension  $k$  se répartissent en classes d'homologie et ces classes forment un groupe additif, le  $k$ -ème groupe d'homologie, que nous allons noter  $\mathfrak{H}^k$ . Des considérations élémentaires montrent que les groupes  $\mathfrak{H}^1$  et  $\mathfrak{H}^2$  sont nuls, alors que le résultat de ma note III affirme la nullité de  $\mathfrak{H}^3$ .

Le groupe  $\mathfrak{H}^4$  n'est pas nul et il contient même un sous-groupe cyclique infini. En effet, soient  $P^4$  le plan projectif complexe muni de son orientation naturelle,

$s$  un nombre entier et  $sP^4$  la variété composée de  $s$  exemplaires (disjoints) de la variété  $P^4$ , si  $s \geq 0$ , ou de  $-s$  exemplaires de la variété  $-P^4$ , si  $s < 0$ . Le nombre caractéristique de Pontriaguine de  $sP^4$  est  $3s$  (cf. [13], §3, E), alors qu'il est nul pour toute variété homologue à zéro (cf. [12], théorème 3). Les variétés  $sP^4$  sont donc deux à deux non homologues.

Soit  $M^4$  une variété close orientée arbitraire de dimension 4. Notons  $B$  le second groupe d'homologie réduit de  $M^4$  et  $(x, y)$ ,  $x, y \in B$ , le nombre d'intersection des classes d'homologie  $x$  et  $y$ . Alors  $(x, x)$  est une forme quadratique entière à discriminant  $\pm 1$  définie sur le réseau  $B$ . La signature de cette forme sera appelée signature de la variété  $M^4$  et notée  $\sigma(M^4)$ . Il est clair que  $\sigma(-M^4) = -\sigma(M^4)$ .

## 2. Principaux résultats.

Une variété close orientée  $M^4$  de dimension 4 borde si et seulement si sa signature  $\sigma = \sigma(M^4)$  est nulle. Dans le cas général,  $M^4$  est homologue à la variété  $\sigma P^4$ . Ainsi, le groupe d'homologie  $\mathbb{Z}^4$  en dimension 4 est un groupe cyclique libre engendré par la classe d'homologie du plan projectif complexe  $P^4$ . Le nombre caractéristique de Pontriaguine  $X_{22}$  de la variété est donné par :

$$X_{22}(M^4) = 3 \sigma(M^4).$$

Ces théorèmes sont des conséquences directes des 5 lemmes suivants :

- Pour tout  $M^4$ , il existe un  $s$  tel que  $M^4 \sim sP^4$  ;
- Si  $M^4 \sim N^4$ , alors  $\sigma(M^4) = \sigma(N^4)$  ;
- $\sigma(sP^4) = s$  ;
- Si  $M^4 \sim N^4$ , alors  $X_{22}(M^4) = X_{22}(N^4)$  ;
- $X_{22}(sP^4) = 3s$ .

Les propositions d) et e), déjà citées, appartiennent à Pontriaguine. Le lemme b) est démontré à l'aide des théorèmes de dualité classiques. Le lemme c) est évident. La difficulté principale réside dans la démonstration du lemme a). Elle se déroule de la manière suivante. Il est facile de démontrer que, la variété  $M^4$  étant donnée, il existe une variété connexe  $M_1^4$  qui lui est homologue, dont le groupe fondamental est trivial et qui admet un plongement dans l'espace euclidien  $R^7$ . Dans  $R^7$ , on peut toujours construire sur  $M_1^4$  un champ de vecteurs normaux dont les points singuliers sont isolés et sont d'indice  $\pm 1$ . En enlevant des voisinages sphériques des points singuliers et en les remplaçant par des plans projectifs complexes troués de la même

manière, on transforme  $M_1^4$  en une variété  $M_2^4 \subset R^7$  sur laquelle il existe un champ de vecteurs normaux sans point singulier. Il est clair que  $M^4 \sim M_2^4 + mP^4$ , où  $m$  est un nombre entier. Soit  $S^7$  la sphère obtenue en ajoutant un point à  $R^7$  et soient  $L^7$  le complément d'un voisinage régulier de  $M_2^4$  dans  $S^7$  et  $U^5$  le générateur du groupe d'homologie entière relative de  $L^7$  en dimension 5 choisi en accord avec l'orientation de la variété  $M_2^4$ . Il se trouve que parmi les cycles relatifs de la classe  $U^5$ , on peut trouver une variété dont le bord est homologue, au sens du n° 1, à la variété  $M_2^4 - nP^4$ , où  $n$  est un nombre entier. Donc  $M_2^4 \sim nP^4$  et  $M^4 \sim M_2^4 + mP^4 \sim (m+n)P^4$ .

Remarque. Notre connaissance des groupes d'homologie  $\mathfrak{Z}^k$  pour  $k > 4$  se réduit pour l'essentiel, à ce que l'on sait des nombres et des résidus caractéristiques de Pontriaguine ([12], [13]). Comme les nombres et les résidus caractéristiques de la somme de deux variétés sont la somme des nombres et des résidus caractéristiques des deux variétés, et que ces nombres et résidus sont nuls pour une variété homologue à zéro (cf. [12], théorème 3), chaque nombre caractéristique en dimension  $k$  définit un homomorphisme du groupe  $\mathfrak{Z}^k$  dans le groupe des entiers, alors que chaque résidu caractéristique définit un homomorphisme dans le groupe des entiers modulo 2. A l'exception de la caractéristique d'Euler (qu'il convient de considérer ici comme résidu) et du nombre caractéristique  $X_{22}$  de dimension 4 trouvé dans le présent travail, aucun de ces invariants n'a été calculé. Seules les variétés de dimension divisible par 4 ont des nombres caractéristiques (cf. [12], §6, D). Il est intéressant de noter que la définition de la signature donnée ci-dessus pour les variétés de dimension 4 admet également une généralisation aux variétés de dimension divisible par 4 (il faut alors entendre par  $B$  le  $(k/2)$ -ème groupe d'homologie réduit de la variété  $M^k$ ), et que la signature d'une telle variété est nulle, si la variété borde.

### 3. Le cas non-orienté.

Négligeons maintenant les orientations et considérons les variétés closes de dimension  $k$  qu'elles soient orientables ou pas. Si la variété  $M^k$  est difféomorphe au bord d'une variété  $M^{k+1}$  (orientable ou non orientable), nous allons dire que  $M^k$  est homologue à zéro modulo 2 et écrire  $M^k \sim 0 \pmod{2}$ . A toute paire de variétés  $M^k, N^k$  correspond leur somme  $M^k + N^k$ , et on dira que  $M^k$  et  $N^k$  sont homologues modulo 2, et on écrira  $M^k \sim N^k \pmod{2}$ , si cette somme est homologue à zéro modulo 2. Les classes d'homologie modulo 2 des variétés closes de dimension  $k$  forment un groupe additif, le  $k$ -ème groupe d'homologie modulo 2, que nous allons noter  $h^k$ . Tous les éléments non nuls du groupe  $h^k$  sont évidemment d'ordre 2. Des considérations élémentaires montrent que le groupe  $h^1$  est nul, alors que le

groupe  $h^2$  a deux éléments (son générateur est la classe du plan projectif réel  $P^2$  : si la caractéristique d'Euler d'une variété  $M^2$  est paire,  $M^2 \sim 0 \pmod{2}$ , sinon  $M^2 \sim P^2 \pmod{2}$ ). Il découle des résultats de ma note III que le groupe  $h^3$  est nul. Il s'avère que le groupe  $h^4$  a deux éléments<sup>(†)</sup> et qu'il est engendré par la classe du plan projectif complexe  $P^4$ . Une variété close  $M^4$  est homologue à zéro modulo 2 si et seulement si sa caractéristique d'Euler est paire. Si elle est impaire,  $M^4 \sim P^4 \pmod{2}$ .

#### 4. Le $(n+3)$ -ème groupe d'homotopie de la $n$ -sphère.

Au calcul de ce groupe sont consacrées mes notes I et II. Elles contiennent une erreur qui a conduit à des résultats incorrects. Cette erreur sera maintenant corrigée.

Nous utiliserons les notations  $\pi_r(S^n)$ ,  $\pi_r^0(S^n)$ ,  $f_n$  ( $n \geq 3$ ) et  $g_n$  ( $n \geq 4$ ) de la note II et la notation  $h_n$  ( $n \geq 2$ ) de la note I. Dans I, on affirme que  $h_n = 0$  pour  $n \geq 3$ . En réalité, la classe  $h_n$  n'est nulle pour aucune valeur de  $n$ . La preuve s'appuie sur les résultats de la présente note. En effet, on peut prouver par les méthodes de la note I que  $h_n = 0$  ( $n \geq 3$ ) est équivalent à l'existence d'une variété close orientée  $Q^4$  ayant les deux propriétés suivantes (cf. I, n° 4) :

a) Il existe dans  $Q^4$  un tore lisse  $T^2$  qui d'une part a un voisinage  $E^4$  décomposable en un produit de  $T^2$  et d'un 2-disque, et qui d'autre part est un 2-cycle caractéristique de la variété  $Q^4$  et le reste si on enlève  $E^4$  de  $Q^4$  et on le remplace d'une manière (lisse) différente ;

$$b) X_{22}(Q^4) = 0.$$

D'après les résultats de la présente note, la condition b) est équivalente à l'affirmation que la variété  $Q^4$  borde, et on peut démontrer que ceci contredit la condition a). L'erreur de la note I apparaît dans le n° 4 à l'endroit où intervient la sphère  $\Sigma^2$ . En réalité, il n'existe pas de sphère  $\Sigma^2$  ayant les propriétés annoncées. Cette erreur est répétée dans la note II (n° 3, paragraphe 3) où elle a entraîné l'affirmation erronée  $12g_n = 0$ . En réalité, la construction décrite au n° 4 de II, conduit à l'égalité  $12g_n = h_n (\neq 0)$ . Comme  $2h_n = 0$ , on a  $24g_n = 0$ . L'égalité  $\pi_{n+3}(S^4) = \pi_{n+3}^0(S^4)$  prouvée au n° 3 de II reste vraie (dans sa démonstration, au lieu d'appliquer implicitement l'égalité  $h_n = 0$ , il convient d'utiliser l'égalité  $h_n = 12g_n$ ). Donc, les générateurs des groupes  $\pi_{n+3}(S^n)$  ( $n \geq 3$ ) sont correctement indiqués dans II, mais leurs ordres sont en réalité deux fois plus grands :

$\pi_6(S^3)$  est un groupe cyclique d'ordre 12 de générateur  $f_3$ , le groupe  $\pi_7(S^4)$  est somme directe de son sous-groupe cyclique d'ordre 12 engendré par  $f_4$

(†) Ceci est faux ; cf. les commentaires (N.d.T.)



et du sous-groupe cyclique libre engendré par  $g_4$ , le groupe  $\pi_{n+3}(S^4)$  pour  $n \geq 5$  est cyclique d'ordre 24 et est engendré par  $g_n$ . †

### 5. Une relation entre les cycles caractéristiques.

Nous avons identifié l'ordre de l'élément  $g_n$  comme étant la moitié de la valeur minimale que peut prendre le nombre caractéristique  $X_{22}$  d'une variété orientée  $M^4$  de dimension 4 dont la classe caractéristique  $z^2(M^2)$  de dimension 2 est nulle (cf. II, n° 4). Comme cette valeur minimale du nombre  $X_{22}$  est 48, on a :  $X_{22}(M^4) \equiv 0 \pmod{48}$  et  $\sigma(M^4) \equiv 0 \pmod{16}$  pour toute variété  $M^4$  telle que  $z^2(M^4) = 0$  (cf. II, n° 5).

Ce théorème a une application intéressante. Whitehead [19] et Pontriaguine [14] ont démontré que le type d'homotopie d'une variété close  $M^4$  connexe et simplement connexe est déterminé par le type arithmétique de la forme quadratique  $(x, x)$  (cf. n° 1). Cependant, la question de l'existence d'une variété dont la forme  $(x, x)$  a le type arithmétique donné (étant entendu, bien sûr, qu'on se limite aux formes entières de discriminant +1), restait ouverte. Nous pouvons donner une réponse négative à cette question. Par exemple, la forme  $(x, x)$  ne peut pas être définie positive, de rang 8 de discriminant +1 et ne prendre que des valeurs paires (une telle forme a été construite par A. Korkine et G. Zolotareff [9]). En effet, si la forme  $(x, x)$  d'une variété  $M^4$  simplement connexe ne prend que des valeurs paires, alors  $z^2(M^4) = 0$  (cf. [22]) et par conséquent  $\sigma(M^4) \equiv 0 \pmod{16}$ , donc  $\sigma(M^4) \neq 8$ .

---

† Dans leur note [10], Massey et Whitehead affirment également que  $h_n \neq 0$  ( $n \geq 3$ ) et que les groupes  $\pi_6(S^3)$  et  $\pi_{n+3}(S^n)$  ( $n \geq 5$ ) sont respectivement d'ordre 12 et 24 (la structure exacte des groupes  $\pi_{n+3}(S^n)$  n'est pas déterminée dans [10]). A la lecture de la note, on voit que ces résultats sont obtenus par des méthodes complètement différentes des miennes.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BLAKERS A.L., MASSEY W.S., The homotopy groups of a triad, I, Ann. Math., 53 (1951), 161-205.
- [2] CAIRNS S.S., Introduction of a Riemannian geometry on a triangulable 4-manifold, Ann. Math., 45 (1944), 218-219.
- [3] FREUDENTHAL H., Über die Klassen der Sphärenabbildungen, I, Compos. Math., 5 (1938), 299-314.
- [4] HOPF H., Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann., 104 (1931), 637-666.
- [5] HOPF H., Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, Fund. Math., 25 (1935), 427-440.
- [6] HUREWICZ W., Beiträge zur Topologie der Deformationen, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., 38 (1935), 112-119.
- [7] HUREWICZ W., STEENROD N.E., Homotopy relations in fiber spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 27 (1941), 60-64.
- [8] KNESER H., Ein topologischer Zerlegungssatz, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., 27 (1924), 601-616.
- [9] KORKINE A., ZOLOTAREFF G., Sur les formes quadratiques, Math. Ann., 6 (1873), 366-389.
- [10] MASSEY W.S., WHITEHEAD G.W., The Eilenberg-MacLane groups and homotopy groups of spheres, Bull. AMS, 57 (1951), 491.
- [11] PONTRYAGIN L. (= PONTRIAGUINE L.S.), A classification of continuous transformations of a complex into a sphere, I, Comptes-rendus (Doklady) de l'Acad. Sci. URSS, 19 (1938), 147-179.
- [12] PONTRYAGIN L.S., Characteristic cycles on differentiable manifolds, Mat. Sbornik, 21 (1947), 233-284.
- [13] PONTRYAGIN L.S., Vector fields on manifolds, Mat. Sbornik, 24 (1949), 129-162.
- [14] PONTRYAGIN L.S., On the classification of four-dimensional manifolds, Uspehi. Mat. Nauk., 4 (1949), 157-158.
- [15] PONTRYAGIN L.S., Homotopy classification of the mappings of an  $(n+2)$ -dimensional sphere on an  $n$ -dimensional one, Doklady Akad. Nauk. SSSR, 70 (1950), 957-959.
- [16] SERRE J.-P., Homologie singulière des espaces fibrés, III, Applications homotopiques, C.R. Acad. Sci. Paris, 232 (1951), 142-144.

- [17] STIEFEL E.L., Richtungsfelder und Fernparallelismus in  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Comment. Math. Helv.* 8 (1936), 305-353.
- [18] WHITEHEAD G.W., A generalisation of the Hopf invariant, *Ann. Math.*, 51 (1950), 192-237.
- [19] WHITEHEAD J.H.C., On simply connected, 4-dimensional polyhedra, *Comment. Math. Helv.*, 22 (1949), 48-92.
- [20] WHITNEY H., On the topology of differentiable manifolds, *Lectures in Topology*, pp. 101-141, University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., USA, 1941.
- [21] WHITNEY H., The singularities of a smooth  $n$ -manifold in  $(2n-1)$ -space, *Ann. Math.*, 45 (1944), 247-293.
- [22] WU WEN-TSUN, Classes caractéristiques et  $i$ -carrés d'une variété, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 230 (1950), 508-511.

par

Lucien GUILLOU et Alexis MARIN

A la fin des années 40, Pontriaguine ramène le calcul des groupes  $\pi_{n+i}(S^n)$  à des problèmes de cobordisme pour des variétés de dimension  $i$  dans  $S^{n+i}$  munis de trivialisations de leur fibré normal. Il obtient ainsi  $\pi_{n+i}(S^n)$  pour  $0 \leq i \leq 2$  (†).

A sa suite, Rohlin prouve en 1951 que toute variété orientée close de dimension trois borde et calcule géométriquement le groupe  $\pi_{n+3}(S^n)$ . Le résultat qu'il donne est faux (à cause d'une utilisation abusive du lemme de Whitney en dimension quatre). Mais l'année suivante, il établit, toujours par des méthodes géométriques, que la signature réalise un isomorphisme entre le groupe de cobordisme des variétés orientées closes de dimension quatre et les entiers. Fort de ce résultat, il corrige son calcul de  $\pi_{n+3}(S^n)$  et obtient le célèbre théorème de Rohlin : la signature d'une variété close presque parallélisable de dimension quatre est divisible par seize.

Entre temps le calcul de  $\pi_{n+3}(S^n)$  a été effectué par des méthodes de théorie de l'homotopie (Serre ; Massey-Whitehead), puis Thom a ramené le calcul des groupes de cobordisme à celui de groupes d'homotopie d'espaces de Thom qui se calculent à l'aide de suites spectrales. Dès lors, toutes les démonstrations des résultats de Rohlin ont utilisé ces machines homotopico-algébriques. Ceci est dommage car les articles de Rohlin n'utilisent que de la géométrie et donnent des démonstrations bien plus claires et économes de ces résultats. D'autre part, et nous y insistons dans les commentaires, ces articles résument l'essentiel des méthodes géométriques utilisées jusqu'à ces dernières années en dimension quatre (en fait jusqu'à la révolution Casson-Freedman-Donaldson : les années 80 !).

Serge Ocharine a traduit du russe les articles de Rohlin, mais même en français ces articles restent très denses et d'un abord difficile. Le but de ces commentaires est donc de faciliter au lecteur de 1984 leur lecture en démontrant les affirmations de Rohlin qui ne semblent pas immédiates.

---

(†) Un exposé détaillé de tout cela, pouvant servir d'introduction aux textes de Rohlin, est : L.S. Pontriaguine, *Smooth manifolds and their applications in homotopy theory*, Amer. Math. Soc. Translations, ser. 2, II (1959), 1-114 (traduit de Trudy Inst. Steklov 45 (1955)).

Nous avons écarté un système de renvoi en bas de page du texte de Rohlin pour reprendre les commentaires article par article. Ceci a l'inconvénient de nous obliger souvent à paraphraser le texte original et à être long ; nous avons cependant cherché à renvoyer le plus possible en appendice ceux des commentaires dont la lecture n'est pas indispensable à la compréhension du texte de Rohlin. Nous renvoyons aux introductions de chaque chapitre pour un résumé de leur contenu.

Nous suggérons au lecteur le chemin suivant : lisez les articles de Rohlin, si vous avez compris, fermez les commentaires, ils ne vous apporteront rien. Sinon, lisez les commentaires, puis relisez Rohlin. Vous vous apercevrez que tout y est dit en 17 pages.

Nous tenons à remercier Vlad Sergiescu, pour, il y a presque dix ans, nous avoir donné une esquisse de traduction qui nous a permis de comprendre, sans théorie d'homotopie, le théorème de Rohlin. Saluons aussi Serge Ochanine pour sa traduction précise et Francis Bonahon pour avoir rongé, en bon cobaye, les premières versions de ces commentaires. Admirons enfin la belle frappe que Bernadette Barbichon a donné des articles et des commentaires.

### Table des matières

I. <u>Sur les deux premiers articles.</u>	.....	23
1. Le tore $T_0^2$ et le champ de repères $H_n^0$ .....		24
2. La variété $M^4$ et le champ $H_n$ .....		26
. Appendice A : l'application de Hopf et ses suspensions .....		31
. Appendice B : la variété $L^4$ .....		34
. Appendice C : surfaces caractéristiques .....		39
. Appendice D : la variété $M_1^4$ , les surfaces d'Enriques et les surface $K3$ .....		41
II. <u>Sur le troisième article.</u>		
1. Cercles de points doubles d'une immersion générique .....		46
2. La méthode de Kneser pour lisser les cycles d'une variété combinatoire.....		52
III. <u>Sur le quatrième article.</u>		
1. le groupe $\Omega_4$ .....		75
2. le groupe $h_4$ .....		81
3. corrections aux deux premiers articles de Rohlin .....		82
. Exercices : . $\Omega_4, \Omega_3, h_3$ .....		86
. $\Omega_3^{\text{spin}} = 0$ .....		87
. $\Omega_4^{\text{spin}} \rightarrow \Omega_4$ est injectif .....		88
. variétés de dimension quatre plongées dans $\mathbb{R}^7$ ..		89
. noeuds $S^3 \subset S^6$ .....		90

## I . SUR LES DEUX PREMIERS ARTICLES

Soit  $T_0^3$  le tore de dimension trois plongé de manière standard dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{n+3}$ . Après avoir décrit le champ de  $n$ -repères  $H_n^0$  normal à  $T_0^3$  que Rohlin considère, nous reprenons en détail la construction d'une variété  $M^4$ , de bord  $T_0^3$ , plongée dans  $\mathbb{R}_1^{n+4} (= \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n+3})$ , et munie d'un champ de repères normal qui étendrait  $H_n^0$  : c'est la partie géométrique de la première note qui se trouve exposée dans les paragraphes 4 et 5. Une telle construction conclurait à la nullité de l'élément  $h_n \in \pi_{n+3}(S^n)$  obtenu par construction de Pontriaguine sur le champ de repère  $H_n^0$ . Nous rejettons dans l'appendice A la vérification de l'affirmation de Rohlin selon laquelle  $h_n$  est la composée de trois suspendues de l'application de Hopf. Ceci permettra au lecteur de relire la première note et de comprendre la deuxième note dont les méthodes géométriques sont analogues.

La faute de la première note (en fait,  $h_n$  est d'ordre 2 !) réside en ce que dans la construction de  $M^4$  on a supposé que la classe d'homologie d'un tore plongé dans une variété  $L^4$  simplement connexe est représentée par une sphère plongée. Comme la variété  $L^4$  est explicitement donnée, il est tentant de regarder de plus près ce contre-exemple au lemme de Whitney, c'est ce que nous ferons dans l'appendice B où nous verrons que  $L^4$  s'obtient par chirurgie d'indice zéro sur les anneaux boroméens, le tore  $T^2$  étant la chirurgisée de la fibre de l'enlacement fibré que constituent les anneaux boroméens.

L'appendice C est un rappel des définitions et des propriétés des surfaces caractéristiques.

Le lecteur aura remarqué que l'exemple fondamental qui intervient dans la deuxième note est la variété  $M_1^4$ , l'éclaté d'un plan projectif en neuf points. Nous en donnerons la description suivante dans l'appendice D : La variété  $M_1^4$  est la réunion d'un plombage  $E_8$  et de la variété obtenue en attachant à  $T^2 \times D^2$  trois anses le long de trois axes du tore  $T^3 = \partial(T^2 \times D^2)$  "les framing étant -1". (En choisissant les neuf points comme les points fixes d'un pinceau de cubique,  $T^2 \times D^2$  est un voisinage d'une cubique lisse du pinceau et les anses proviennent de deux cycles évanescents pour le pinceau et d'un diviseur exceptionnel.) Ceci nous permettra de donner une décomposition analogue des surfaces d'Enriques et des surfaces  $K3$ .

### 1. LE TORE $T_0^3$ ET LE CHAMP DE REPERES $H_n^0$

Soit  $T_0^2$  un tore de révolution dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ . Le tore  $T_0^3$  est le bord d'un tube  $E$  autour de  $T_0^2$  dans  $\mathbb{R}^4$ . Un point  $a$  de  $T_0^3$  est reperé par ses coordonnées  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  où  $\alpha_1 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ,  $\alpha_3 : T_0^3 \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  est une trivialisation du tube  $E$  telle que  $\alpha_3^{-1}(0)$  soit le bord d'un collier extérieur à  $T_0^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  et  $(\alpha_1, \alpha_2)$  provient, via la projection du tube  $E$ ,  $\pi : T_0^3 \rightarrow T_0^2$ , du système de coordonnées parallèle-méridien sur le tore  $T_0^2$ . Pour tout point  $a$  de  $T_0^3$ , on désigne par  $n(a)$  le vecteur normal unitaire sortant.

Soit  $e_1, e_2, \dots, e_{n+3}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+3}$  ( $n \geq 2$ ). On considère  $H_n^0 = \{u_1, \dots, u_n\}$  le champ de repères normal à  $T_0^3$  dans  $\mathbb{R}^{n+3}$  défini par :

$$\begin{cases} u_1(a) = n(a) \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - e_5 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ u_2(a) = n(a) \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + e_5 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ u_i = e_{3+i} \text{ pour } 3 \leq i \leq n \end{cases}$$

Rohlin considère ce champ de repères car il produit par la construction de Pontriaguine l'élément  $h_n$  de  $\pi_{n+3}(S^n)$  représenté par la composition de trois suspensions successives de l'application de Hopf :

$$\begin{array}{ccccccc} S^{n+3} & \xrightarrow{E^n f_2} & S^{n+2} & \xrightarrow{E^{n-1} f_2} & S^{n+1} & \xrightarrow{E^{n-2} f_2} & S^n \\ & & & & \underbrace{\hspace{10em}}_{h_n} & & \uparrow \end{array}$$

(ici  $f_2 : S^3 \rightarrow S^2$  est l'application de Hopf et  $E$  est la suspension).

Comme la vérification de ce fait est indépendante des arguments géométriques de Rohlin, nous la rejettons à l'appendice A. Nous allons expliquer comme Rohlin "prouve" que  $h_n$  est nul, en faisant border au couple  $(T_0^3, H_n^0)$  un couple  $(M^4, H_n)$  où  $M^4$  est une sous-variété propre du demi-espace  $\mathbb{R}_1^{n+4} (= \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+4} \mid x_0 \geq 0\})$  de bord  $T_0^3$ , et  $H_n$  un champ de repères normal à  $M^4$  étendant  $H_n^0$ .

Rohlin commence par énoncer, à la fin du §3, la proposition suivante :

**PROPOSITION.** Pour tout plongement propre  $\varphi : T^2 \times D^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+4}$ , tel que  $\varphi(\partial(T^2 \times D^2)) = T_0^3$ , l'âme  $\varphi(T^2 \times 0)$  est un cycle d'obstruction à étendre le champ de repère  $H_n^0$ .

**Démonstration.** Soit  $\varphi_0 : T^2 \times \partial D^2 \rightarrow T_0^3$  la restriction de  $\varphi$  au bord. On peut supposer que  $\varphi_0$  conserve l'orientation. Identifions  $T^2 \times \partial D^2$  à  $T^2 \times T^1 = T_0^3$

le difféomorphisme  $\varphi_0$  est alors homotope à un difféomorphisme linéaire  $\varphi_1$ . Par la construction de Pontriaguine, on obtient une sous-variété  $M^2$  de  $\varphi(T^2 \times D^2)$  de bord  $\varphi_1(* \times \partial D^2)$  et munie d'un champ de repères normal  $\{v_1, v_2\}$  dans  $\varphi(T^2 \times D^2)$  dont la restriction au bord est  $\{T\varphi_1(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}), T\varphi_1(\frac{\partial}{\partial \alpha_2})\}$  (†)

Considérons le couple  $(C, H_{n+2}^0)$  où  $C$  est le cercle  $\varphi_1(* \times \partial D^2)$  et  $H_{n+2}^0$  est le champ de repères  $\{T\varphi_1(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}), T\varphi_1(\frac{\partial}{\partial \alpha_2}), u_1, \dots, u_n\}$ . L'âme  $\varphi(T^2 \times 0)$  est un cycle d'obstruction à étendre le champ de repères  $H_n^0$  si et seulement si  $H_n^0$  ne s'étend pas au-dessus de  $M^2$ ; cela a donc lieu si et seulement si le couple  $(C, H_{n+2}^0)$  ne borde pas. Rappelons le lemme de Pontriaguine :

LEMME 1.  $(C, H_{n+2}^0)$  est un cercle dans  $\mathbb{R}^{n+3}$  muni d'un champ de repères normal  $H_{n+2}^0$ ,  $n \leq 1$ . Soit  $v_1$  un champ de repères tangent à  $C$ . Alors, le couple  $(C, H_{n+2}^0)$  ne borde pas si et seulement si l'application  $f: C \rightarrow V_{n+3}$ ;  $f(x) = (v_1, H_{n+2}^0)$  représente l'élément nul de  $\pi_1(V_{n+3})$ . ( $V_{n+3}$  est l'espace des repères de  $\mathbb{R}^{n+3}$ , il est isomorphe à  $GL(n+3, \mathbb{R})$ .)

Dans le cas qui nous occupe, l'invariant de Pontriaguine de  $(C, H_{n+2}^0)$  est la restriction à  $\varphi_1(* \times \partial D^2)$  de :

$$F: T_0^3 \rightarrow V_{n+3}$$

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (T\varphi_1(\frac{\partial}{\partial \alpha_3}), T\varphi_1(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}), T\varphi_1(\frac{\partial}{\partial \alpha_2}), u_1, \dots, u_n) .$$

Comme  $\varphi_1$  est un difféomorphisme linéaire préservant l'orientation,  $F$  est homotope à  $F_0: F_0(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial}{\partial \alpha_3}, u_1, \dots, u_n)$ . En regardant sur la base canonique de  $T_0^3$ , on voit que  $F$  induit zéro sur le  $\pi_1$  (‡). Ceci achève la démonstration de l'affirmation du §3.

#### Démonstration du lemme 1.

Soit  $M^2$  une surface orientable connexe bordant le cercle  $C$  dans  $\mathbb{R}_1^{n+4}$ . Le fibré normal à  $M^2$  dans  $\mathbb{R}_1^{n+4}$  est trivial (car il est orientable et  $M^2$  a le type d'homotopie d'un complexe de dimension un). L'obstruction à étendre le champ de repères  $H_{n+2}^0$  à  $M^2$  est donc un élément  $\gamma_0$  de  $\pi_1(V_{n+2})$  ( $\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  car  $n+2 \leq 3$ ).

(†) Le couple  $(\varphi_0(* \times \partial D^2), \{(T\varphi_0(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}), T\varphi_0(\frac{\partial}{\partial \alpha_2}))\})$  borde  $(\varphi_0(* \times D^2), \{T\varphi_0(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}), T\varphi_0(\frac{\partial}{\partial \alpha_2})\})$ , comme le difféomorphisme  $\varphi_1$  est homotope à  $\varphi_0$  le couple  $(\varphi_1(* \times D^2), \{T\varphi_1(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}), T\varphi_2(\frac{\partial}{\partial \alpha_2})\})$  borde  $(M^2, \{v_1, v_2\})$ .

(‡) Le lecteur pourra se reporter, pour le vérifier, au dernier paragraphe de l'appendice



L'obstruction à étendre le champ de repères  $(e_0, v_0)$  en un champ de repères tangent à  $M^2$  est un élément  $\gamma_1$  de  $\pi_1(V_2)$  ( $\cong \mathbb{Z}$ ); cet élément est impair car il est égal à la caractéristique d'Euler de  $M^2$ . Soit  $\bar{f}: C \rightarrow V_{n+4}$  donné par  $\bar{f}(x) = (e_0, f(x))$  et considérons  $\bar{\gamma}_0$  et  $\bar{\gamma}_1$  les images de  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  dans  $\pi_1(V_{n+4})$  par les inclusions canoniques. On a dans  $\pi_1(V_{n+4})$ ,  $\bar{f} = \bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}_1$ . Le lemme suit de ce que  $\pi_1(V_{n+3}) \rightarrow \pi_1(V_{n+4})$  est un isomorphisme et que  $\bar{\gamma}_1$  représente l'élément non nul.

## 2. CONSTRUCTION DE LA VARIÉTÉ $M^4$ ET DU CHAMP $H_n$ .

Soit  $K^4$  l'extérieur du tube  $E$  dans la sphère  $S^4$ , le compactifié d'Alexandroff de  $R^4$  ( $S^4 = R^4 \cup \infty$ ). La chirurgie transformant  $K^4$  en la variété  $L^4$  simplement connexe peut se voir plongée dans  $D^5$  ( $= R^5 \cup \infty$ ) de la manière suivante :

Soit  $d$  un disque fibre du tube  $E$  et  $c: S^4 \times [0, 2] \rightarrow D^5$  un collier du bord. Considérons  $\mathfrak{L} = c(K \times [0, 2]) \cup d \times 2$ ; la variété  $L^4$  sera le bord d'un voisinage régulier lisse de  $\mathfrak{L}$ , pincé sur  $c(T_0^3 \times [0, 1])$  ( $\dagger$ ). La variété  $P^4 = L^4 \cup E$  est le bord d'un voisinage régulier du complémentaire d'un 2-disque dénoué dans  $D^5$ ; elle est donc difféomorphe à  $S^2 \times S^2$ . On désigne par  $\tilde{n}$  le champ de vecteurs normal à  $L^4$  dans  $R_1^5$  étendant  $n$  (voir la figure 1).

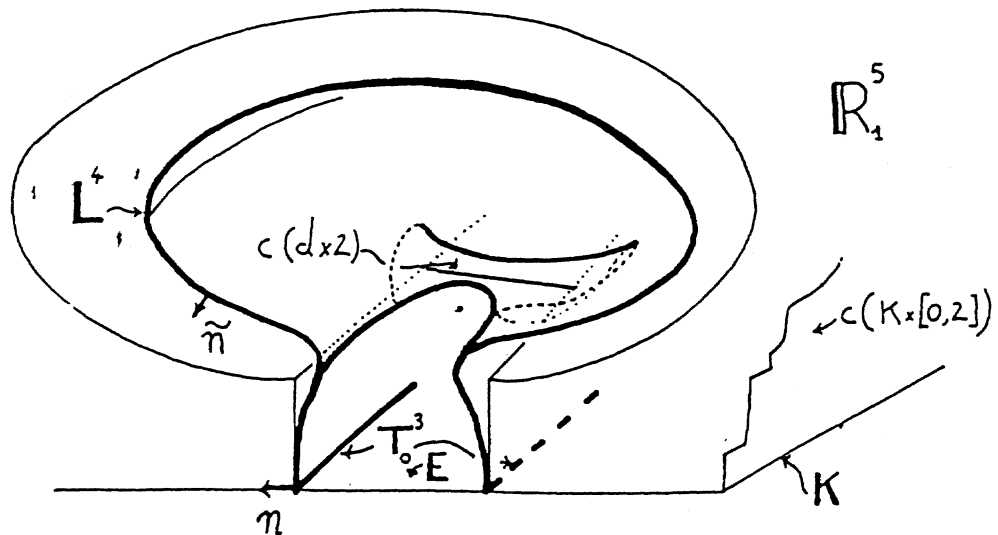


Figure 1 : la variété  $L^4$

( $\dagger$ ) On peut prendre pour  $L^4$  le bord de l'ensemble des points à distance  $\leq \epsilon$  de  $\mathfrak{L}$ , où  $\epsilon: D^5 \rightarrow [0, \epsilon_0]$  est une fonction  $C^\infty$  telle que  $\epsilon^{-1}(0) = c(S^4 \times [0, 1])$  et  $\epsilon^{-1}(\epsilon_0) = D^5 - c([0, 3/2])$  et  $\epsilon_0$  assez petit.

LEMME 2. Soit, dans  $L^4$ , le deux tore  $\tau = \{c((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \frac{1}{2}) \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0\}$ .  
Il y a sur  $L^4 - \tau$  un champ de repères  $\tilde{H}_n$  étendant  $H_n^0$  pour lequel  $\tau$  soit un cycle  
d'obstruction.

Démonstration. Soit  $f : L^4 - \tau \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  définie par :

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \pi \text{ pour } x \text{ hors de } c(T_0^3 \times [0, 1]) ; \\ \text{b) } e^{if(c(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t))} &= \frac{(1-t)e^{i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} - t}{\|(1-t)e^{i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} - t\|} \text{ pour } c(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) \text{ dans } \\ & \quad c(T_0^3 \times [0, 1]) - \tau . \end{aligned}$$

(voir la figure 2).

Il suffit de poser  $\tilde{H}_n = \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n$ , où, pour  $a \in L^4$  :

$$\tilde{u}_1(a) = \tilde{n}(a) \cos(f(a)) - e_5 \sin(f(a))$$

$$\tilde{u}_2(a) = \tilde{n}(a) \sin(f(a)) + e_5 \cos(f(a))$$

$$\tilde{u}_i(a) = e_{i+3}, \text{ pour } 3 \leq i \leq n . \quad \square$$

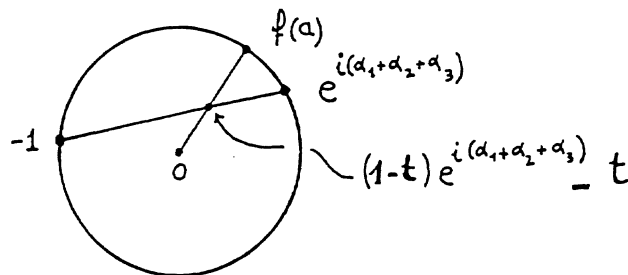


Figure 2 : construction de  $\tilde{H}_n$  ; la fonction  $f$  .

Rohlin suppose alors que la classe d'homologie du tore  $\tau$  dans la variété simplement connexe  $L^4$  se représente par une sphère plongée  $\Sigma^2$ . Nous sommes en dimension quatre et le lemme de Whitney ne s'applique pas ; nous verrons en fait, dans le quatrième article, qu'une telle sphère n'existe pas. Supposons cependant, comme Rohlin, l'existence de  $\Sigma^2$  et suivons la suite de l'argument.

Montrons tout d'abord comment on obtiendrait aujourd'hui la variété  $M^4$  et le champ  $H_n$  (en fait  $H_2$ ). Nous expliquerons ensuite les arguments de Rohlin.

Remarquons tout d'abord que la sphère  $\Sigma^2$  borde un disque  $\Delta^3$  plongé dans  $\mathbb{R}_1^6$  et ne coupant la variété  $L^4$  qu'en son bord :

La sphère  $\Sigma^2$  borde certainement un disque  $D$  dans  $\mathbb{R}_1^5$  ; poussons l'intérieur de  $D$  au-dessus de  $\mathbb{R}_1^5$  et mettons-le en position générale, nous obtenons un disque  $D'$  immergé dans  $\mathbb{R}_1^6$  de bord  $\Sigma$  et dont l'intérieur est dans  $\mathbb{R}_{1+}^6 (= \{x_0, \dots, x_5\} \in \mathbb{R}_1^6 \mid x_5 > 0\})$ . On peut supposer que le nombre algébrique de points doubles de  $D'$  est

zéro. Le lemme de Whitney fournit alors le disque  $\Delta^3$ .

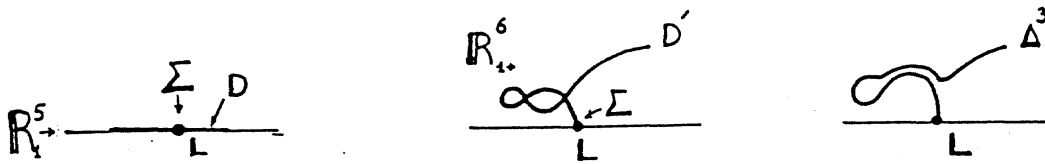


Figure 3 : construction du disque  $\Delta^3$

Le disque  $\Delta^3$  permet de faire une chirurgie plongée sur la sphère  $\Sigma$ ; soit  $M^4 \hookrightarrow \mathbb{R}_1^6$  la variété obtenue par cette chirurgie. Le champ de repères  $H_2^0$  s'étend au complémentaire du cercle co-âme de la chirurgie <sup>(†)</sup>; comme ce cercle est de codimension trois dans  $M^4$  et  $\pi_i(V_2) = 0$  pour  $i \geq 2$ , le champ  $H_2$  s'étend en fait en un champ de repères  $H_2$  normal à  $M^4$ .

La technique de la chirurgie plongée n'existait pas en 1951, et Rohlin nous offre une toute autre construction.

#### La construction de $M^4$ selon Rohlin.

Soit  $V$  un tube autour de la sphère  $\Sigma^2$ . Comme l'auto-intersection de  $\Sigma^2$  est nulle, il y a un isomorphisme de tube entre  $V$  et un tube produit  $\Sigma^2 \times D^2$ .

Soit  $\psi: \Sigma^2 \times S^1 \rightarrow \Sigma^2 \times S^1$  le difféomorphisme défini par :

$$\psi(x, y) = (xy, y)$$

(ici, on a identifié la sphère  $\Sigma^2$  à  $\mathbb{C} \cup \infty$  et le cercle  $S^1$  au cercle unité de  $\mathbb{C}$ ).

Soit  $\bar{\psi}$  le difféomorphisme correspondant de  $\partial V$ . Rohlin pose alors :

$$M^4 = L^4 - \underset{\bar{\psi}}{\overset{\psi}{V}} \cup V' \quad \text{et} \quad Q^4 = P^4 - \underset{\bar{\psi}}{\overset{\psi}{V}} \cup V' = V^4 \cup E,$$

où  $V'$  est un deuxième exemplaire du tube  $V$ .

Rohlin dégage alors les propriétés suivantes des variétés  $M^4$  et  $Q^4$  :

Propriété a). Pour tout recollement à  $M^4$  du produit d'un 2-tore et d'un 2-disque, le 2-tore axial de ce produit devient un cycle caractéristique.

Propriété b). Le nombre caractéristique  $X_{22}$  de la variété  $Q^4$  est nul.

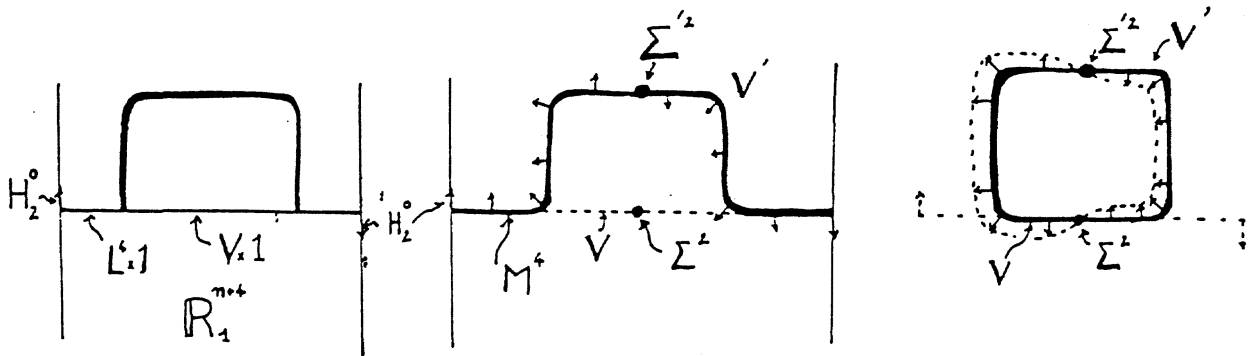
(†) car la sphère  $\Sigma^2$  est homologue au tore  $\tau$  et  $H_2^0$  s'étendait au complémentaire de  $\tau$  par le lemme 2.

Démonstration des propriétés a) et b).

Remarquons tout d'abord que  $V \underset{\psi}{\cup} V'$  est le  $S^2$  fibré non trivial sur la sphère  $S^2$ ,  $V$  et  $V'$  étant les restrictions de ce fibré à deux des hémisphères de la base  $S^2$ . En collant à  $Q \times [0,1]$ , le long de  $V \times 1$ , un exemplaire de  $S^2 \times D^3$ , le  $D^3$ -fibré non trivial sur la sphère  $S^2$ , on obtient un cobordisme orienté entre  $P^4$  et  $Q^4$ . La propriété b) en découle car le nombre de Pontriaguine  $X_{22}^{(+)}$  est un invariant de cobordisme orienté et  $P^4$ , un produit de sphère, borde.

Plongeons le cobordisme précédent dans  $\mathbb{R}_1^{n+4}$ , par un plongement étendant l'inclusion de  $Q^4 \times 1$  dans  $\mathbb{R}_1^{n+4}$ . La propriété a) découlera alors de la Proposition et de ce que le champ  $H_n^0$  s'étend au deux squelette de  $M^4$ .

En effet, comme la sphère  $\Sigma^2$  est homologue au tore  $\tau^2$ , le champ de repère  $H_n^0$  s'étend au complémentaire de  $V$  dans  $L^4$ , l'âme  $\Sigma^2$  de  $V$  étant un cycle d'obstruction. Mais  $L^4 - \overset{\circ}{V} = M^4 - \overset{\circ}{V}'$ . Si l'âme  $\Sigma^{2'}$  de  $V'$  était aussi un cycle d'obstruction, on pourrait (en arrondissant les angles en  $\partial V = \partial V'$ ) construire un champ de repères normal à  $V \underset{\psi}{\cup} V'$  dont un cycle d'obstruction serait  $\Sigma^2 \cup \Sigma^{2'}$ , or ce cycle est nul en homologie modulo deux ; cela contredit le fait que la seconde classe de Stiefel-Whitney de  $V \underset{\psi}{\cup} V'$  ( $\cong S^2 \times S^2$ ) est non nulle (c'est le dual de  $\Sigma^2$ ) (voir la figure 4).  $\square$



Si  $H_2^0$  ne s'étendait pas au 2-squelette de  $M^4$ , on aurait  $w_2(V \underset{\psi}{\cup} V') = 0!$

Figure 4

(†) En langage moderne,  $X_{22}(Q^4) = \langle P_1(M^4), [M^4] \rangle$  est le premier nombre de Pontriaguine. Les notations originelles de Pontriaguine provenaient d'une description explicite des classes de Pontriaguine en terme des cycles de Schubert dans la grassmannienne.

Les indications précédentes devraient permettre au lecteur de comprendre la construction du champ  $H_n$  donnée au §5 ; indiquons cependant la variation suivante de l'argument (qui utilise la définition moderne des classes de Pontriaguine).

Comme nous venons de le voir, le champ  $H_n^0$  s'étend au 2-squelette de  $M^4$ . Puisque  $\pi_2(V_n) = 0$ , il s'étend aussi au complémentaire d'un point  $m_0$  de  $M^4$  et l'obstruction à l'étendre à  $M^4$  est un élément  $x$  de  $\pi_3(V_n)$ . Complexifions ; comme le champ  $H_n^0$  se déduit du champ  $(n, e_5, \dots, e_{n+3})$  par une application  $g : T_0^3 \rightarrow SO(2) \subset GL(n, \mathbb{R})$  et que l'inclusion  $SO(2) \rightarrow GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  est nulle en homotopie, le complexifié du champ  $H_n^0$  s'étend en un champ de repères défini sur  $Q^4 - m_0$ , l'obstruction à l'étendre à  $Q^4$  est le complexifié  $x_{\mathbb{C}} \in \pi_3(V_n(\mathbb{C}))$  de  $x$ . Or,  $\pi_3(V_n(\mathbb{C}))$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  pour  $n \geq 2$  et  $x_{\mathbb{C}}$  représente le nombre de Pontriaguine de  $Q^4$ , il est donc nul par la propriété b). On conclut que  $x$  lui-même est nul de ce que, pour  $n \geq 5$ ,  $\pi_3(V_n(\mathbb{R})) \rightarrow \pi_3(V_n(\mathbb{C}))$  est injective. (Si  $n = 3, 4$ , on peut aussi conclure à la nullité de  $x$  en utilisant que la classe d'Euler du fibré normal à  $Q^4$  dans  $\mathbb{R}^{n+4}$  est nulle et la description explicite des stabilisations  $\pi_3(V_i) \rightarrow \pi_3(V_{i+1})$  pour  $i = 3$  et  $4$  (cf. § 23-6 du livre de Steenrod, the topology of fiber bundle).)

## APPENDICE A

## DESCRIPTION DE L'APPLICATION DE HOPF ET DE SES SUSPENSIONS

Considérons  $S^3$  - la sphère unité de  $\mathbb{C}^2$  et  $S^2$  la sphère de Gauss  $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . L'application de Hopf  $H: S^3 \rightarrow S^2$  est la restriction à la sphère  $S^3$  de la projection canonique  $\pi: \mathbb{C}^2 - 0 \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  définie par  $\pi(X, Y) = \frac{Y}{X}$ .

La projection stéréographique de pôle  $(0, i)$  de  $S^3$  sur  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$  fixe le cercle  $C_0 = H^{-1}(0)$ . Une équation paramétrique de  $C_0$  est :

$$X = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad Y = 0.$$

Soit  $n(\alpha) = \cos \alpha \cdot e_1 + \sin \alpha \cdot e_2$  le vecteur normal unitaire extérieur à  $C_0$  dans  $\mathbb{C} \times 0$ ; la base réelle canonique de  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$  est  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (i, 0)$  et  $e_3 = (0, 1)$ . Le cercle  $C_\epsilon = H^{-1}(\epsilon)$  est l'intersection avec  $S^3$  de la droite complexe d'équation  $\epsilon X - Y = 0$ . Cette droite coupe  $\mathbb{C} \times 0$  avec nombre d'intersection  $+1$  et donc le nombre d'enlacement  $\ell(C_\epsilon, C_0)$  des deux cercles  $C_\epsilon$  et  $C_0$  vaut  $+1$ . Le champ de repère produit par la construction de Pontriaguine sur l'application de Hopf est donc paramétré par  $F_2: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow V_{2,3}$ , où  $V_{p,n}$  est l'espace des  $p$ -uplets de vecteurs indépendants dans  $\mathbb{R}^n$ .  $F_2(\alpha) = (\cos \alpha \cdot n(\alpha) - \sin \alpha \cdot e_3, \sin \alpha \cdot n(\alpha) + \cos \alpha \cdot e_3)$  (voir la figure 5).

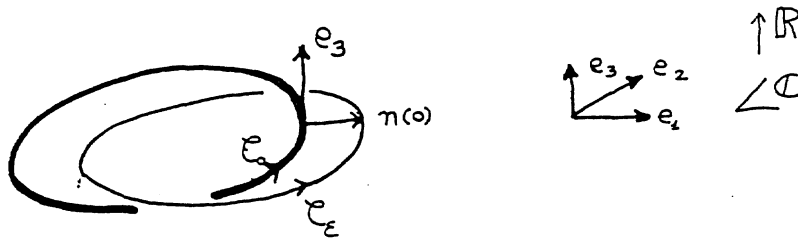


Figure 5

Soit  $f_2$  l'application produite par la construction de Pontriaguine sur le champ de repère  $F_2$  et  $f_n = E^{n-2} f_2$  la  $n-2$ -ème suspension de  $f_2$ .

Pour simplifier les calculs, nous prendrons pour modèle de la sphère  $S^n$  le compactifié d'Alexandroff  ${}^{\circ}B^2 \times I^{n-2} \cup \infty$  de  ${}^{\circ}B^2 \times I^{n-2}$ , où  $I = ]-1, 1[$  et  ${}^{\circ}B^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ .

L'application  $f_{n+2}$  est alors définie par les formules suivantes :

- Si  $x = ((1+x_1) \cos \alpha, (1+x_1) \sin \alpha, x_2, x_3, \dots, x_{n+2}) \in S^1 \times \overset{\circ}{B}^2 \times 2\overset{\circ}{I}^n$   
 $(\alpha \in S^1 ; (x_1, x_2) \in \overset{\circ}{B}^2 ; (x_3, \dots, x_{n+2}) \in 2\overset{\circ}{I}^n)$

$$f_{n+2}(x) = (2 \cos \alpha \cdot x_1 - 2 \sin \alpha \cdot x_2, 2 \sin \alpha \cdot x_1 + 2 \cos \alpha \cdot x_2, x_3, \dots, x_{n+2}) \in 2(\overset{\circ}{B}^2 \times \overset{\circ}{I}^n)$$

- Sinon,  $f_{n+2}(x) = -\infty$ .

En substituant, on obtient pour  $h_n = f_n \circ f_{n+1} \circ f_{n+2}$  :

- Si, écrit en colonne,

$$x = \begin{pmatrix} (1 + \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} (1 + \cos \gamma u_1 + \sin \gamma u_2) \cos(\gamma - \beta)) \cos(\beta - \alpha)) \cos \alpha \\ (1 + \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} (1 + \cos \gamma u_1 + \sin \gamma u_2) \cos(\gamma - \beta)) \cos(\beta - \alpha)) \sin \alpha \\ \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} (1 + \cos \gamma u_1 + \sin \gamma u_2) \cos(\gamma - \beta)) \sin(\beta - \alpha) \\ \frac{1}{4} (1 + \cos \gamma u_1 + \sin \gamma u_2) \sin(\gamma - \beta) \\ \frac{1}{4} (1 + \cos \gamma u_1 + \sin \gamma u_2) \\ x_6 \\ \vdots \\ x_{n+3} \end{pmatrix}$$

avec  $(u_1, u_2) \in \overset{\circ}{B}^2$ ,  $(x_6, \dots, x_{n+3}) \in 2\overset{\circ}{I}^n$ ,  $(\alpha, \beta, \gamma) \in S^1 \times S^1 \times S^1$

$$h_n(x) = (2u_1, 2u_2, x_6, \dots, x_{n+3}) \in 2(\overset{\circ}{B}^2 \times \overset{\circ}{I}^{n-2}) .$$

- Sinon,  $h_n(x) = \infty$ .

En faisant une homothétie de rapport 4 et le changement de variable,

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = \beta - \alpha, \quad \alpha_3 = \gamma - \beta, \quad \text{et donc } \gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 ;$$

on obtient les formules de Rohlin :

$h_n^{-1}(0)$  est le tore  $T_0^3$  plongé de la manière habituelle dans  $\mathbb{R}^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+3}$  :

$$x_1 = (4 + 2(1 + \cos \alpha_3) \cos \alpha_2) \cos \alpha_1 ;$$

$$x_2 = (4 + 2(1 + \cos \alpha_3) \cos \alpha_2) \sin \alpha_1 ;$$

$$x_3 = 2(1 + \cos \alpha_3) \sin \alpha_2 ;$$

$$x_4 = \sin \alpha_3 ; \quad x_i = 0 \text{ pour } i \geq 5$$

où  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in T^3$ .

Si  $n(a)$  est le vecteur normal unitaire extérieur à  $T_0^3$  dans  $\mathbb{R}^4$  au point  $a$  de coordonnées  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , le champ de repère normal produit par  $h_n$  est :

$$u_1(a) = n(a) \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - e_5 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

$$u_2(a) = n(a) \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + e_5 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

$$u_3 = e_6, \dots, u_n = e_{n+3} .$$

Terminons cet appendice en remarquant que, si l'on restreint le plongement décrit ci-dessus de  $T^3$  dans  $T_0^3$  à l'un de ses facteurs, disons le cercle des  $\alpha_k$  défini par  $\alpha_i = \alpha_j = 0$  ( $(i, j, k)$  étant une permutation de  $(1, 2, 3)$ ), les vecteurs  $\frac{\partial}{\partial \alpha_i}$  et  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j}$  sont constants, alors que  $(\frac{\partial}{\partial \alpha_k}, n(a))$  décrit une base du plan  $e_1, e_{n+1}$ ; cette base effectue un tour complet quand  $\alpha_k$  varie de 0 à  $2\pi$ . Il en est de même de la fonction de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  dans  $SO(2) \hookrightarrow GL(n)$  qui fait passer du champ de repère

$$(n(a), e_5, \dots, e_{n+3}) \text{ au champ } H_n^0 = (u_1, \dots, u_n) \text{ (elle associe } \begin{pmatrix} \cos \alpha_k & \sin \alpha_k \\ -\sin \alpha_k & \cos \alpha_k \end{pmatrix} \text{ à } \alpha_k).$$

Cela démontre que l'application  $F_0 : T^3 \rightarrow V_{n+3}$  induit zéro sur le  $\pi_1$ . Rappelons que l'on a considéré cette application pour la démonstration de l'affirmation du § 3 ; elle est donnée par :

$$F_0(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial}{\partial \alpha_3}, u_1, \dots, u_n \right) .$$

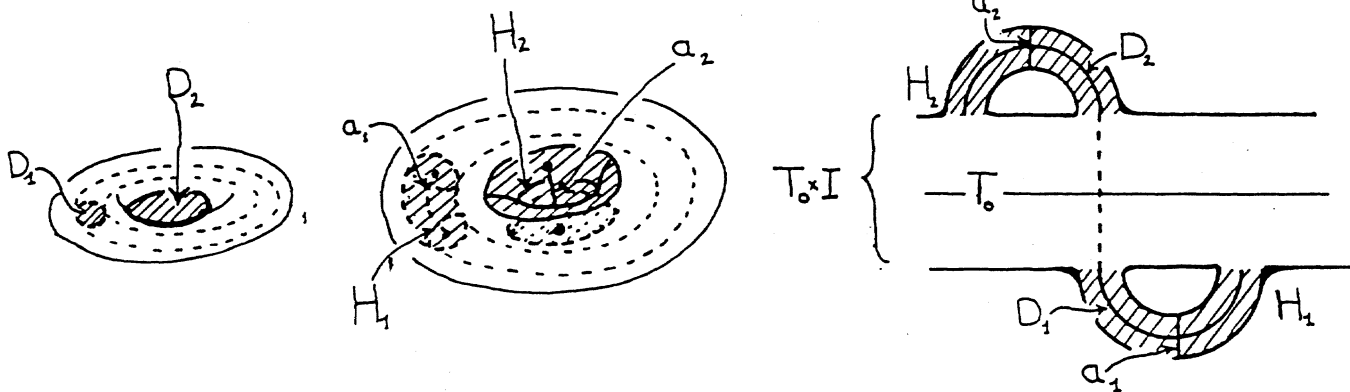
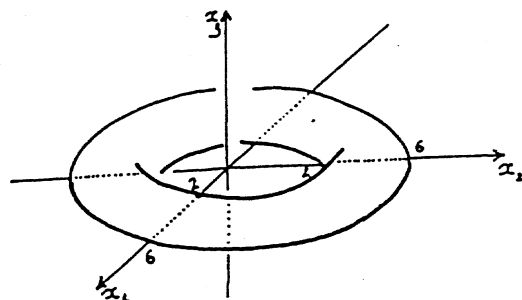


## APPENDICE B.

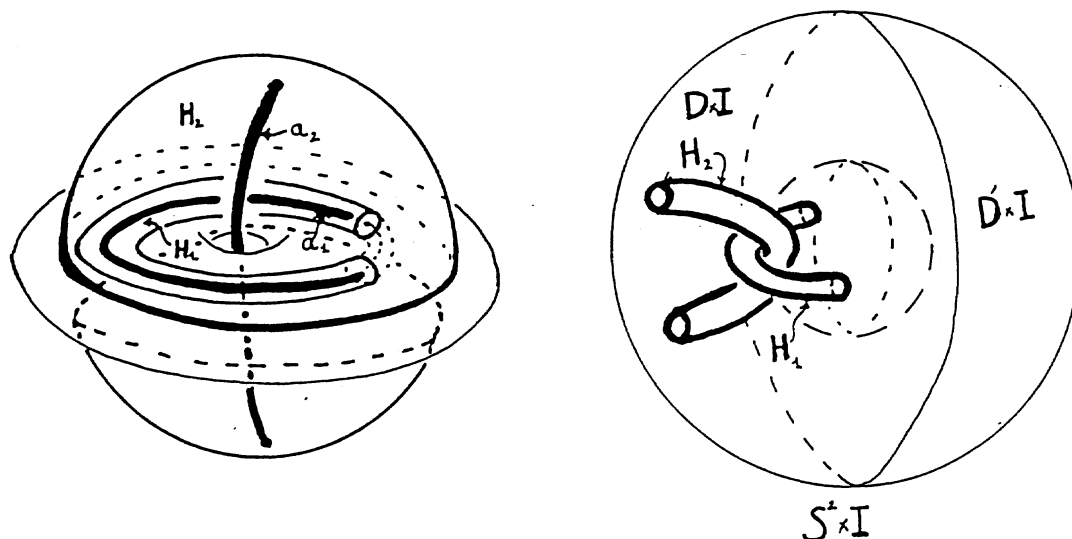
QUELQUES DESSINS DE LA VARIÉTÉ  $L^4$  ET DU TORE  $\tau$ .  
UNE DECOMPOSITION EN ANSES DE  $L^4$ .

Considérons le tore standard  $T_0^2$  dans  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \cup \infty = S^3$  tel que Rohlin le décrit au paragraphe 3.

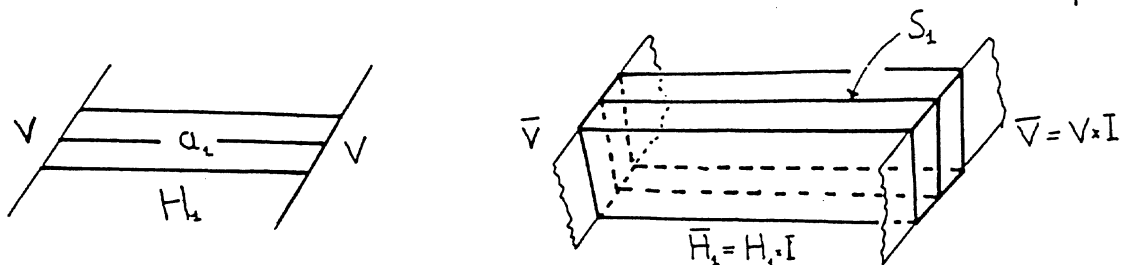
Soit  $V$  le tube unité autour de  $T_0^2$ , il est difféomorphe à  $T_0^2 \times I$ . Dans le complémentaire de  $V$ , il y a deux disques  $D_1$  et  $D_2$  de bord un méridien de  $T_0 \times -1$  et un parallèle de  $T_0 \times 1$  respectivement. Des bicolliers autour de  $D_1$  et  $D_2$  forment deux anses d'indice deux,  $H_1$  et  $H_2$ ; notons  $a_1$  et  $a_2$  leurs co-âmes :



$V \cup H_1 \cup H_2$  est difféomorphe à une sphère épaissie  $S^2 \times I$  plongée de manière standard dans  $S^3$ . Faisons apparaître cette sphère épaissie en retournant la figure précédente comme un gant :

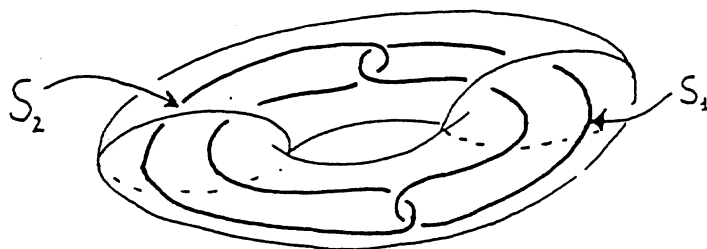


Épaississons la situation précédente en considérant la sphère  $S^3$  comme l'équateur de  $S^4$ . Le voisinage  $V$  devient  $\bar{V} = V \times I$  et les anses  $H_1$  et  $H_2$  deviennent  $\bar{H}_1 = H_1 \times I$  et  $\bar{H}_2 = H_2 \times I$ . La réunion  $\bar{V} \cup \bar{H}_1 \cup \bar{H}_2$  est diffeomorphe à  $S^2 \times I \times I \cong S^2 \times D^2$ ; le complémentaire est un tube  $D^3 \times S^1$  autour du cercle enlaçant  $T_0^2$  dans  $S^4$ . Remplaçons ce tube par  $S^2 \times D^2$  pour créer  $P^4 (\cong S^2 \times S^2)$ . Soit  $\bar{H}_3 = D_+^2 \times D^2$  une anse d'indice 2 remplissant la moitié de  $S^2 \times D^2$ . Le complémentaire dans  $P^4$  de  $\bar{V} \cup \bar{H}_1 \cup \bar{H}_2 \cup \bar{H}_3$  est alors  $D_-^2 \times D^2$  un disque de dimension quatre. Décrivons l'enlacement de  $S^3$  sur lequel s'attachent les anses duales de  $\bar{H}_1, \bar{H}_2$  et  $\bar{H}_3$ .

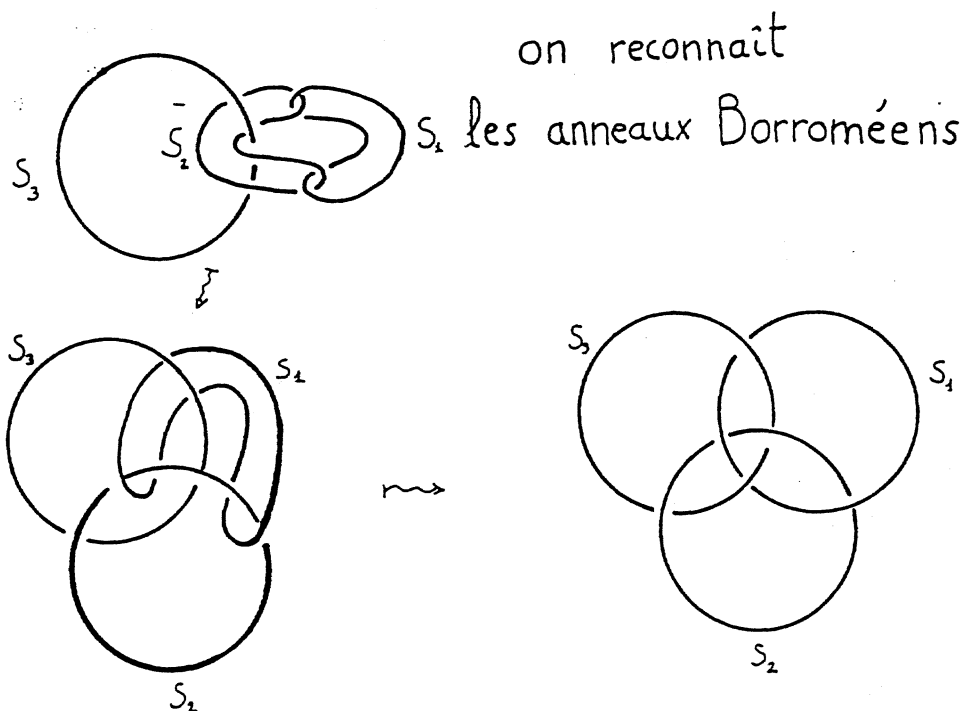


Pour  $\bar{H}_1$  et  $\bar{H}_2$ , les cercles d'attachement  $S_1$  et  $S_2$  des anses duales sont les doubles des co-âmes de  $H_1$  et  $H_2$ .

Elles sont situées comme suit dans la moitié  $S^1 \times D^2$  de  $S^1 \times S^2$



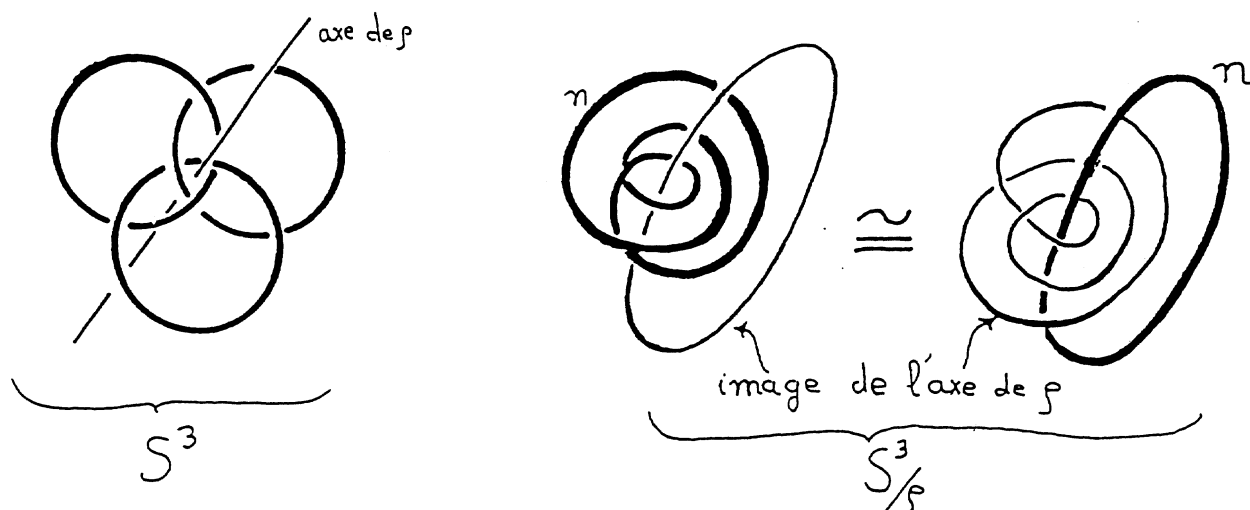
Le cercle d'attachement  $S_3$  de l'anse duale de  $\bar{H}_3$  est  $* \times \partial D$ ; l'enlacement obtenu est :



Les trivialisations des tubes autour de chacun des trois anneaux ont nombre d'enlacement 0 : On peut le suivre dans le "cinéma" précédent ou remarquer que ce sont les seules trivialisations qui donnent une homologie de rang trois sur le bord de la variété  $L^4$  obtenue par chirurgie (rappelons que  $\partial L^4 = T_0^3$ ).

Nous allons maintenant faire apparaître la structure de tore sur le bord de  $L^4$  vue comme trois anses à nombre d'enlacement 0 attachées sur les anneaux borroméens.

Soit  $\rho$  la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  de  $S^3$  qui permute les trois anneaux borroméens. L'image de chacun des trois anneaux dans le quotient  $S^3/\rho$  est un noeud trivial  $n$ . Le complémentaire de  $n$  admet une fibration en disques telle que chaque disque coupe l'image de l'axe de  $\rho$  transversalement en trois points. Le complémentaire des anneaux borroméens est donc fibré ; la fibre  $F$  est un revêtement cyclique d'ordre 3 ramifié sur trois points du disque, c'est un tore à 3 trous. Cette fibration s'étend en une fibration en tores de  $\partial L^4$  la variété chirurgisée avec fibre  $\hat{F} = F \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3$ , où les  $D_i$  sont des disques dans le bord de l'anse duale de  $\bar{H}_i$ . La fibre  $\hat{F}$  est invariante par l'extension naturelle de  $\rho$  à  $L^4$  et représente le tore  $\tau^2$  d'équation  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$  dans  $T_0^3$ .



Terminons cet appendice par quelques exercices.

1) Calculer la monodromie de la fibration des anneaux borroméens. En déduire que la monodromie de la fibration correspondante de  $\partial L^4$  est l'identité : vous aurez vérifié directement que la variété de dimension 3 présentée par la donnée de chirurgie

 est le tore  $T^3$ .

2) Il s'agit de déterminer les difféomorphismes de  $T_0^3$  qui s'étendent à  $L^4$  et d'en déduire qu'une variété obtenue en collant  $T^2 \times D^2$  à  $L^4$  est difféomorphe soit à  $P^4 = S^2 \times S^2$ , soit au "produit tordu" de deux 2-sphères  $S^2 \times S^2 (\cong \mathbb{C}P^2 \# (-\mathbb{C}P^2))$ .

a) Prouver que si un difféomorphisme du tore  $T_0^3$  s'étend à  $L^4$ , il fixe la classe d'homologie modulo deux du tore  $\tau$ . [Indication : Tout difféomorphisme du tore  $T_0^3$  conserve la structure Spin provenant du champ de repère  $H_n^0$  (voir App. C), une extension de  $\varphi$  doit conserver l'obstruction à étendre à  $L^4$  cette structure Spin.]

b) Prouver qu'un difféomorphisme agissant par une permutation des coordonnées de  $T_0^3$  s'étend à  $L^4$  (utiliser la présentation en anses de  $L^4$ ).

c) Prouver que le difféomorphisme linéaire de  $T_0^2$  de matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  s'étend en un difféomorphisme de  $S^4$  induisant  $\begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$  sur  $T_0^3$ . [Soit  $V_1 = S^1 \times D^2$  un des deux tores solides bordant  $T_0^2$  dans  $S^3$  (l'autre est  $V_2 = D^2 \times S^1$ ). Considérer l'épaisseur  $\bar{V}_1 = S^1 \times D^3$  de  $V_1$ , remarquer que  $S^4 - \bar{V}_1 \cong D^2 \times S^2$  et utiliser le fait que  $\pi_1(SO(3))$  est d'ordre 2.]

En déduire que  $\begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$  s'étend à  $L^4$ .

d) En faisant dans  $S^4 - T_0^2$  des "twists de Dehn" autour de  $V_1$  et de  $V_2$ , montrer que :

i) les difféomorphismes linéaires de matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$  s'étendent à  $S^4$  mais non à  $L^4$ .

ii) le difféomorphisme linéaire de matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$  s'étend à  $L^4$ .

e) Dédurre de b) et c) qu'un difféomorphisme linéaire s'étend à  $L^4$  si sa matrice est congrue modulo 2 à une matrice de permutation. Dédurre alors de d) que, pour un difféomorphisme linéaire, la condition nécessaire de a) est aussi suffisante.

f) Prouver que tout difféomorphisme  $\varphi$  du tore  $T^3$  est isotope à un difféomorphisme linéaire. [Supposer que  $\varphi$  induise l'identité sur le  $H_1$ ; se ramener par un argument de cercle le plus intérieur au cas où  $\varphi(T^2 \times 0) \cap T^2 \times 0 = \emptyset$ ; se ramener alors au cas où  $\varphi$  induit l'identité sur  $T^2 \times 0$ ; reprendre l'argument pour se ramener au cas où  $\varphi$  induit l'identité sur  $T^2 \times 0 \cup T^1 \times 0 \times T^1 \cup 0 \times T^2$ ; conclure en utilisant le théorème de Cerf :  $\text{Diff}^+(S^3)$  est connexe.]

g) Soit  $\varphi$  un difféomorphisme de  $T^3$  et  $M_\varphi^4$  la variété obtenue en collant  $L^4$  à  $T^2 \times D^2$  au moyen de  $\varphi$  :

$$M_\varphi^4 = L^4 \cup_{\varphi} T^2 \times D^2 = L^4 \cup T^2 \times D^2 / \{ \partial L^4 = T_0^3 \ni x \sim \varphi(x) \in T^3 = T^2 \times \partial D^2 = \partial(T^2 \times D^2) \}.$$

Prouver que :

i) Si  $p_1 \circ \varphi : \tau^2 \rightarrow T^2$  est de degré impair,  $M_\varphi^4$  est difféomorphe à  $P^4 = M_{\text{id}}^4 (\cong S^2 \times S^2)$ ; et il y a un difféomorphisme entre  $L^4 \cup_{\varphi} T^2 \times D^2$  et  $L^4 \cup_{\text{id}} T^2 \times D^2$  qui préserve la décomposition (avec  $p_1 : T^2 \times D^2 \rightarrow T^2$  la projection naturelle).

ii) Si  $p_1 \circ \varphi : \tau^2 \rightarrow T^2$  est de degré pair,  $M_\varphi^4$  est difféomorphe au "produit tordu"  $S^2 \times S^2$  de deux 2-sphères ( $S^2 \times S^2 \cong \mathbb{C}P^2 \# (-\mathbb{C}P^2)$ ) et il y a entre deux tels  $M_\varphi$  un difféomorphisme préservant la décomposition.

## APPENDICE C.

SURFACES CARACTERISTIQUES

Soit  $M^4$  une variété orientable de dimension quatre. Une surface  $F^2$  dans  $M^4$  est caractéristique si elle est un cycle d'obstruction à trivialisier la restriction au 2-squelette du fibré tangent à  $M$  : Il y a une trivialisatation  $t$  du fibré tangent  $M$  hors de  $F$  et pour tout disque  $D$  transverse à  $F$  l'obstruction à étendre  $t$  au-dessus de  $D$  est l'élément non nul de  $\pi_1(SO(4)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (rappelons que comme  $M$  est orientable, son fibré tangent se réduit à  $SO(4)$ ). Ceci revient à dire qu'elle est duale de la seconde classe de Stiefel-Whitney  $w_2(M)$  de  $M$ .

Rohlin utilise la même notion pour le fibré normal. On voit que c'est la même chose en appliquant à  $N = M - F$  la remarque suivante.

Remarque. Soit  $N^n$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$ ,  $2 < n < N-2$ . Il y a une bijection entre l'ensemble des classes d'homotopie de trivialisatation des restrictions au 2-squelette de  $N$  des fibrés tangent  $\tau N$  et normal  $\nu N$  de  $N$ . Cette bijection associe à la trivialisatation  $t$  de  $\tau N|_N[2]$  la classe d'une trivialisatation  $t'$  de  $\nu N|_N[2]$  telle que  $t \oplus t'$  soit homotope à la trivialisatation standard de  $\tau \mathbb{R}^N$  (si  $n \leq 2$ , il faut remplacer le fibré tangent par le fibré tangent stable).

Par exemple, la bijection précédente fait correspondre à la trivialisatation  $(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial}{\partial \alpha_3})$  de  $T_0^3$ , invariante par translation, le champ de repère normal  $H_n^0$  que Rohlin considère.

Une classe d'homotopie de trivialisatation de la restriction au 2-squelette du fibré tangent stable d'une variété est une structure Spin sur cette variété.

Il y a une autre définition d'une surface caractéristique d'une variété orientable  $M^4$  : Une surface  $F^2$  est caractéristique dans  $M^4$  si, pour tout cycle modulo 2,  $\Sigma^2$  de  $M^4$ , on a  $\Sigma \cdot \Sigma \equiv \Sigma \cdot F \pmod{2}$  (le point désignant l'intersection homologique). L'équivalence des deux définitions est la formule de Wu dont nous allons donner la démonstration géométrique suivante :

Supposons le cycle  $\Sigma^2$  représenté par une surface  $G^2$ . Soit  $\tau G$  le fibré tangent à  $G$  et  $\nu G$  le fibré normal à  $G$  dans  $M$ . Comme la variété ambiante  $M$  est orientable, les fibrés  $\tau G$  et  $\nu G$  ont tous deux même obstruction  $w_1$  à l'orientabilité. Soit  $C$  et  $C'$  deux cercles transverses représentant cette obstruction. Soit  $X$  un champ de vecteurs tangent à  $G$  et  $Y$  un champ de vecteurs normal à  $G$ , chacun

non nul hors d'un voisinage d'un point ( $g_X$  et  $g_Y$  respectivement) de  $G - C \cup C'$ .

Soit  $X'$  un champ de vecteurs tangent non nul hors de  $g_X \cup C$  et formant là avec  $X$  une base de  $\tau G$ ; soit  $Y'$  un champ de vecteurs normal non nul hors de  $g_Y \cup C'$  et  $y$  formant une base de  $\nu G$ . Hors de  $\{g_X, g_Y, C \cap C'\}$ , les trois vecteurs  $X, Y, X'+Y'$  sont indépendants, ils se complètent en un champ de repères tangent à  $M$  défini sur  $G - \{g_X, g_Y, C \cap C'\}$ . L'obstruction à étendre ce champ à  $G$  est  $\Theta(X) + \Theta(Y) + C \cap C' \pmod{2}$  où  $\Theta(X)$ , l'obstruction à étendre  $X$ , est la caractéristique d'Euler  $\chi(G)$  de  $G$ , et  $\Theta(Y)$  l'obstruction à étendre  $Y$ , est  $G \cdot G$ . Mais, pour une surface  $G^2$ , on a  $\chi(G) + (w_1(G))^2 = 0 \pmod{2}$ ; l'obstruction à trivialisier la restriction à  $G^2$  du fibré tangent à  $M$  est donc  $G^2 \cdot G^2$ , ce qui établit l'équivalence des deux définitions.  $\square$

Remarque. Dans la deuxième définition, il faut tenir compte de tous les cycles modulo 2 et non seulement de ceux qui sont réduction modulo 2 de cycles entiers : Pour la surface d'Enriques dont nous allons donner une description dans l'appendice D la surface vide n'est pas caractéristique bien que  $\Sigma \cdot \Sigma \equiv 0 \pmod{2}$  pour tout cycle entier  $\Sigma$ . Cependant, si  $H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ , tout élément de  $H_2(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est réduction modulo 2 d'un élément de  $H_2(M; \mathbb{Z})$ .

APPENDICE D .

LA VARIÉTÉ  $M_1^4$  DE ROHLIN,  
LES SURFACES D'ENRIQUES ET LES SURFACES  $K3$  .

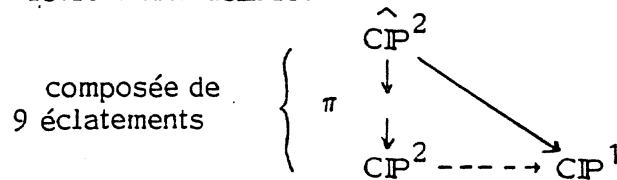
Dans le second article, Rohlin a besoin d'une variété  $M_1^4$  de signature  $-8$  et possédant une surface caractéristique d'auto-intersection nulle. Pour l'obtenir, il fait la somme connexe d'un plan projectif complexe  $\mathbb{C}P^2$  et de 9 exemplaires de  $-\mathbb{C}P^2$ , le plan projectif complexe muni de l'orientation opposée:  $M_1^4 = \mathbb{C}P^2 \# 9(-\mathbb{C}P^2)$ ; la surface caractéristique  $F$  est une surface représentant la classe d'homologie  $f = (3, 1, \dots, 1) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^9 \cong H_2(\mathbb{C}P^2) \oplus (H_2(-\mathbb{C}P^2))^9 \cong H_2(M_1^4)$ . (On a choisi  $\mathbb{C}P^1$  muni de son orientation complexe comme générateur de  $H_2(\mathbb{C}P^2)$ ; pour  $X = (x_0, x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^9 = H_2(M_1^4)$ , on a :

$$X^2 = x_0^2 - \sum_{i=1}^9 x_i^2, \text{ donc on a modulo 2, } X^2 \equiv x_0 - \sum_{i=1}^9 x_i \equiv 3x_0 - \sum_{i=1}^9 x_i = X \cdot f,$$

et la classe d'homologie  $f$  est caractéristique ; d'autre part,  $f^2 = 3^2 - \sum_{i=1}^9 1 = 0$  .)

La variété  $M_1^4$  .

Soient dans  $\mathbb{C}P^2$  deux cubiques  $C_0$  et  $C_\infty$  d'équations  $F_0 = 0$  et  $F_\infty = 0$  telles que la courbe générique  $C_t$  du pinceau engendré <sup>(†)</sup> par  $C_0$  et  $C_\infty$  soit lisse. Ce pinceau définit une application rationnelle  $\varphi : \mathbb{C}P^2 \dashrightarrow \mathbb{C}P^1$  définie pour  $X$  dans  $\mathbb{C}P^2$  hors de  $C_0 \cap C_\infty$  par :  $\varphi(X)$  est l'unique  $t$  tel que  $X \in C_t$ . On obtient après 9 éclatements de  $\mathbb{C}P^2$  une surface algébrique  $\widehat{\mathbb{C}P}^2$  sur laquelle l'application  $\varphi$  devient bien définie.



La variété  $\widehat{\mathbb{C}P}^2$  est difféomorphe à la variété  $M_1^4$  de Rohlin et la transformée stricte  $\widehat{C}_{t_0}$  d'une courbe lisse du pinceau est dans la classe d'homologie de  $f$ . En effet, un éclatement en un point  $X$  lisse d'une courbe  $C$  sur une surface

---

(†) Elle est d'équation  $F_t = F_0 + t F_\infty = 0$  .



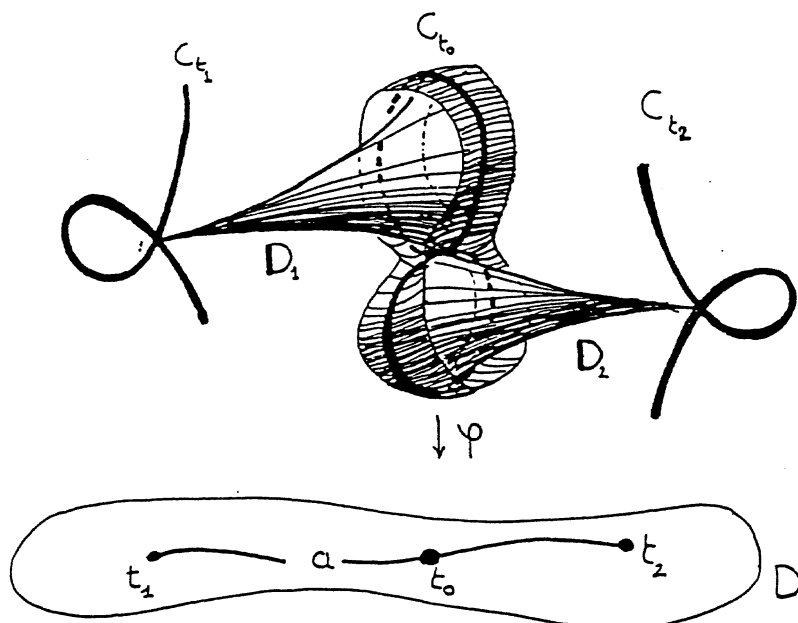
algébrique  $M$  correspond à faire une somme connexe de paire  $(M, C) \# (-\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1)$

Comme toutes les cubiques lisses sont difféomorphes par un difféomorphisme ambiant de  $\mathbb{C}P^2$ , on déduit de ce qui précède que le type de difféomorphisme de la paire  $(\widehat{\mathbb{C}P^2}, \widehat{C}_t)$  ne dépend pas du choix du pinceau. Le jeu maintenant consiste à étudier la topologie de  $(\widehat{\mathbb{C}P^2}, \widehat{C})$  en choisissant un pinceau explicite.

Comme la fibre  $\widehat{C}_{t_0}$  est lisse, elle a un voisinage en produit difféomorphe à  $C_{t_0} \times D^2 \cong T^2 \times D^2$ ; posons  $N_1^4 = M_1^4 - \text{int}(C_{t_0} \times \frac{1}{2} D^2)$ , c'est une variété de bord le tore de dimension trois  $T^3$ .

PROPOSITION 1. Les difféomorphismes de  $T^3$  qui s'étendent à  $N_1^4$  sont ceux qui préservent l'orientation.

Démonstration. On choisit un pinceau tel qu'une base de l'homologie d'une fibre générique  $C_{t_0}$  soit représentée par deux cycles évanescents se contractant vers deux fibres singulières ordinaires <sup>(+)</sup>  $C_{t_1}$  et  $C_{t_2}$ . Soient  $D_1$  et  $D_2$  des disques que ces cycles évanescents parcourent au cours de leur contraction, tels que  $\varphi(D_1) \cup \varphi(D_2)$  soit un arc  $a$  plongé, joignant  $t_1$  à  $t_2$ , passant par  $t_0$  et ne rencontrant aucune valeur critique de  $\varphi$  autre que  $t_1$  et  $t_2$ :

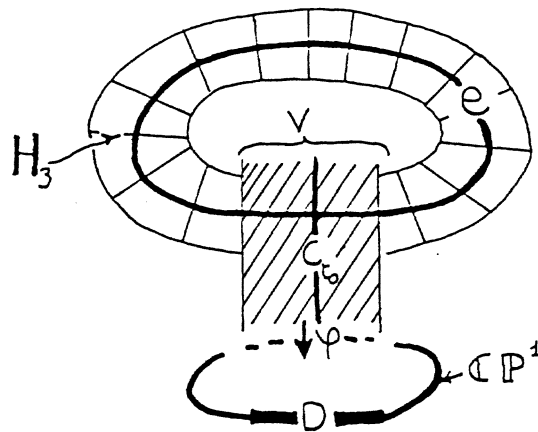


(+) c'est-à-dire irréductibles avec un seul point singulier qui est quadratique non dégénéré.

Ajoutons à  $C_{t_0} \times D^2$  deux anses  $H_1$  et  $H_2$  d'indice 2 le long des disques  $D_1$  et  $D_2$ . Soit  $V = C_{t_0} \times D^2 \cup H_1 \cup H_2$  la variété obtenue, on peut faire en sorte que  $V$  soit la préimage par  $\varphi$  d'un disque  $D$  contenant l'arc  $a$  dans son intérieur.

Soient  $e$  un diviseur exceptionnel de  $\widehat{\mathbb{C}P^2}$  rencontrant transversalement les fibres génériques et  $D_3 = e - \overset{\circ}{V}$ . Ajoutons à  $C_{t_0} \times D^2$  une troisième anse d'indice 2 le long du disque  $D_3$  pour former :

$$P = C_{t_0} \times D^2 \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3 = V \cup H_3$$



Posons enfin  $Q = P - \text{int}(C_{t_0} \times \frac{1}{2} D^2)$ ; le bord de  $Q$  est :

$$\partial Q = \partial_+ Q \cup \partial_- Q \quad \text{ou} \quad \partial_+ Q = C_{t_0} \times \frac{1}{2} \partial D^2 = T^3.$$

Dans le tore  $T^3 = C_{t_0} \times \partial D^2$ , les cercles d'attachement sont des parallèles disjointes aux axes de coordonnées, les trivialisations des tubes autour de ces cercles diffèrent de  $-1$  de la trivialisations invariante par translation.

Comme la signature de  $N_1^4$  est non nulle (elle vaut  $-8$ ), un difféomorphisme de  $N_1^4$  préserve l'orientation. La proposition découle alors du lemme suivant :

**LEMME.** Tout difféomorphisme préservant l'orientation de  $T^3 = \partial_+ Q$  s'étend en un difféomorphisme de  $Q$  identité sur  $Q_-$ .

**Démonstration.** En faisant tourner à l'intérieur de  $V$  la fibre  $C_{t_0}$  autour des fibres singulières  $C_{t_1}$  et  $C_{t_2}$ , on produit des difféomorphismes de  $Q$  identité sur  $\partial_- Q$  et induisant sur  $T^3 = \partial_+ Q$  des difféomorphismes linéaires  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ .

La variété  $Q$  a un difféomorphisme  $\beta$  d'ordre 3 induisant sur  $T^3 = \partial_+ Q$  un difféomorphisme  $\alpha$  isotope à la permutation circulaire des coordonnées. (Si on

choisit pour cercles d'attachement des anses  $H_1, H_2, H_3$  les cercles d'équation  $Y = Z = 0$ ,  $Z = X = \frac{1}{3}$ ,  $X = Y = \frac{2}{3}$ , le difféomorphisme  $\beta$  donné par

$\beta(X, Y, Z) = (Z + \frac{1}{3}, X, Y + \frac{1}{3})$  permute les cercles d'attachement et les trivialisations des anses : il s'étend à  $\underline{Q}$ .) En conjuguant  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  par des puissances de  $\beta$ ,

on réalise toutes les matrices élémentaires et donc par composition tout  $SL(n, \mathbb{Z})$ . Le lemme suit alors de ce que tout difféomorphisme du tore  $T^3$  préservant l'orientation est isotope à un difféomorphisme linéaire de  $SL(n, \mathbb{Z})$  (voir les exercices de l'appendice B).  $\square$

PROPOSITION 2. La variété  $Q$  décrite dans la démonstration de la proposition 1 admet un plongement dans  $N_1^4$  telle que le complémentaire  $\overline{N_1^4 - Q}$  soit un plombage  $E_8$  défini négatif.

COROLLAIRE. Le bord intérieur  $\partial_- Q$  de  $Q$  est une sphère de Poincaré.

Démonstration de la proposition 2. Il s'agit d'étudier explicitement un pinceau particulier.

Soient  $\epsilon > 0$  fixé et  $t$  dans  $\mathbb{C}$ ; considérons le polynôme  $f_{\epsilon t}(x) = x^3 + 3\epsilon^2 x - t$ . Pour  $t \neq \pm 2i\epsilon^3$ , ce polynôme a trois racines distinctes. Si  $t = t_0$  est réel, une des racines  $x_{t_0}$  est réelle, les deux autres  $x_{t_0+}$  et  $x_{t_0-}$  sont complexes ( $\text{Im}(x_{t_0+}) > 0$ ). Quand  $t$  parcourt le segment  $[t_0, \pm 2i\epsilon^3]$ , les racines  $x_0$  et  $x_{\pm}$  vont se confondre.

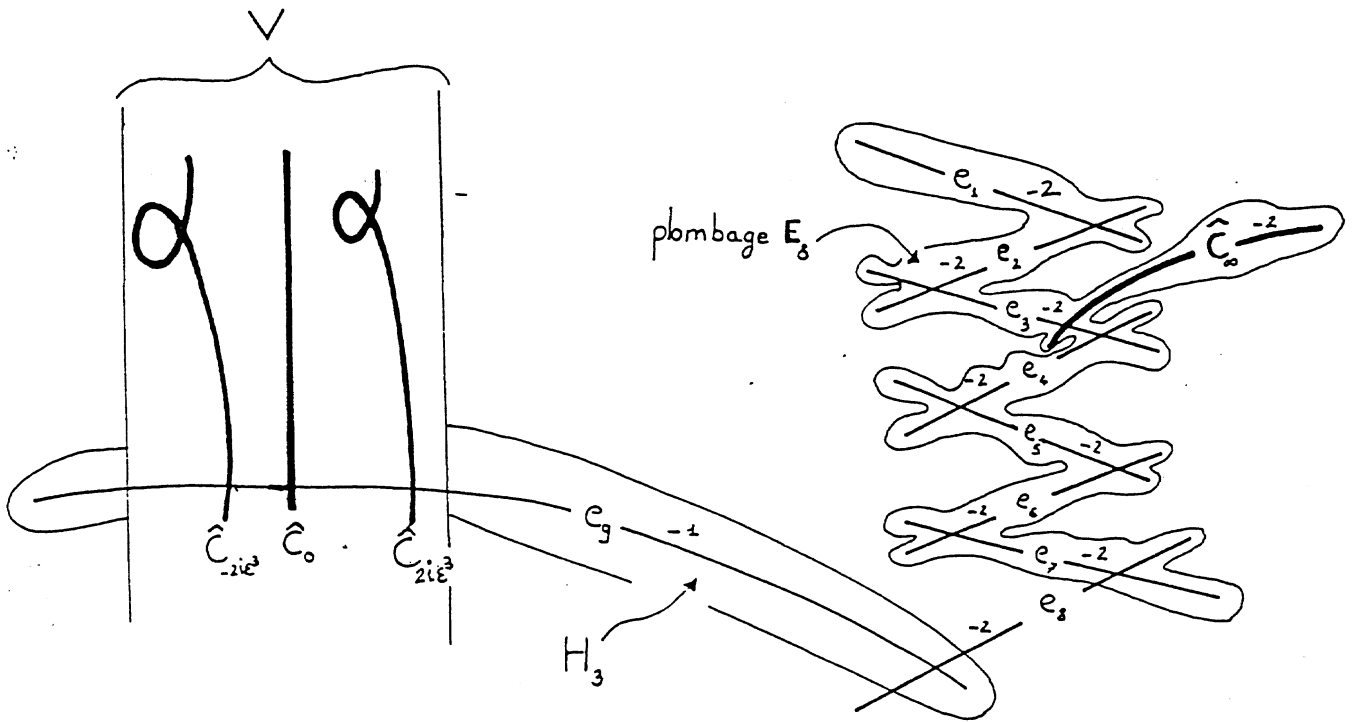
Considérons le pinceau des cubiques  $C_{\epsilon t}$  d'équation  $F_{\epsilon t}(X, Y, Z) = ZY^2 - X^3 - 3\epsilon^2 Z^2 X + tZ^3$ , ou, en coordonnées affines,  $y^2 = x^3 + 3\epsilon^2 x - t$ . Le nombre  $\epsilon$  étant fixé, posons  $C_t = C_{\epsilon t}$ . Soient  $t_0 \in \mathbb{R}$ , par exemple  $t_0 = 1$ , et  $\gamma_{0+}$  et  $\gamma_{0-}$  les deux courbes de  $C_{t_0}$  définies par  $\gamma_{0\pm} = \{(x, y, 1) \in C_{t_0} \mid x \in [x_{t_0}, x_{t_0\pm}]\}$ .

Ce qui précède prouve que  $\gamma_{0+}$  et  $\gamma_{0-}$  sont deux cycles évanescents formant une base de  $H_1(C_{t_0})$  et allant mourir sur les courbes singulières  $C_{2i\epsilon^3}$  et  $C_{-2i\epsilon^3}$ . Les

9 points fixes du pinceau sont au-dessus du point à l'infini  $(0, 1, 0)$  sur l'axe des  $y$  et forment une chaîne linéaire de points infiniment proches; soient  $e_1, \dots, e_9$  les diviseurs exceptionnels correspondants. Les fibres singulières de  $\varphi: \widehat{\mathbb{C}P^2} \rightarrow \mathbb{C}P^1$

sont :  $\varphi^{-1}(-2i\epsilon^3) = \hat{C}_{-2i\epsilon^3}$ ,  $\varphi^{-1}(2i\epsilon^3) = \hat{C}_{2i\epsilon^3}$  et  $\varphi^{-1}(\infty) = \hat{C}_{\infty} \cup_{i=1}^8 e_i$

et l'on a dans  $\widehat{\mathbb{C}P^2}$  la configuration suivante :



Le complémentaire de  $Q$  dans  $\widehat{\mathbb{C}P^2}$  est un voisinage régulier de  $\widehat{C}_\infty \bigcup_{i=1}^7 e_i$ , c'est un plombage  $E_8$  défini négatif.  $\square$

Remarque. Le lecteur pourra faire tendre  $\epsilon$  vers 0 dans les constructions précédentes et reconnaître la sphère de Poincaré sous les trois manifestations suivantes :

- bord d'un plombage  $E_8$ ,
- $\partial_- Q$ ,
- résultat de la chirurgie d'indice 1 sur le noeud de trèfle

$$k = \{(x,y) \mid y^2 = x^3\}, \text{ où } S^3 = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 1\}.$$

Pour que les orientations coïncident, il faut prendre un plombage  $E_8$  défini positif (dans  $\mathbb{C}P^2$  la variété  $Q$  et le plombage  $E_8$  défini négatif sont de part et d'autre de leur bord commun).

Les surfaces d'Enriques et  $K3$ .

Une surface d'Enriques est une surface elliptique obtenue en faisant deux transformations logarithmiques d'ordre 2 sur deux fibres lisses de la surface elliptique  $\varphi : \widehat{\mathbb{C}P^2} \rightarrow \mathbb{C}P^1$  obtenue à partir d'un pinceau de cubiques (voir par exemple Griffith-Harris, Principles of algebraic geometry, Wiley Interscience, p. 594-600).

## II . SUR LE TROISIEME ARTICLE

### 1. CERCLES DE POINTS DOUBLES D'UNE IMMERSION GNERIQUE

La partie la plus importante des commentaires sur le troisième article est l'explication de la méthode de Kneser pour lisser les cycles combinatoires de codimension inférieure ou égale à deux dans une variété.

Nous nous contentons ici d'explicitier les modèles pour les cercles de points doubles d'immersions génériques que Rohlin utilise pour "éliminer ces points doubles".

Rohlin prend une variété orientée  $M^3$  de dimension trois. Pour montrer qu'elle borde une variété orientée  $W^4$  de dimension quatre, il considère une immersion générique  $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$  et introduit, près des cercles de points doubles, les modifications  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  lui permettant de construire une variété  $N^3$  cobordante à  $M$  et possédant un plongement dans  $\mathbb{R}^5$ . La variété  $N$  peut être triangulée comme sous-polyèdre de  $\mathbb{R}^5$ ; le fait qu'elle borde résultera alors de la méthode de Kneser-Rohlin appliquée à la trace  $X$  d'une contraction de  $N$  en l'origine de  $\mathbb{R}^5$  :

$$X = \{y \in \mathbb{R}^5 \mid \exists x \in N, t \in [0, 1] \text{ tel que } y = tx\}.$$

Cette trace  $X$  est une chaîne polyédrale de codimension un dans  $\mathbb{R}^5$  et de bord homologique  $\partial X = N$ . Le théorème de Rohlin-Kneser (théorème 3 du chapitre suivant) permet de remplacer  $X$  par une sous-variété  $W$  de  $\mathbb{R}^5$  de bord  $N$ .

La modification  $\mathcal{O}_2$  n'a pas de mystère : c'est une simple "chirurgie ronde plongée, d'indice un" (Rohlin utilise implicitement son analogue en dimension quatre lorsqu'il calcule  $\Omega_4$  dans le quatrième article); la modification  $\mathcal{O}_1$  est moins connue. Nous analyserons donc les cercles de points doubles ; nous décrirons explicitement des modèles plongés des modifications  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  et remarquerons que le cas qui conduit à la modification la plus subtile  $\mathcal{O}_1$  ne peut se produire en dimension quatre, ce qui explique que, quand il calcule  $\Omega_4$  dans le quatrième article, Rohlin considère triviale cette partie de la démonstration, alors qu'il y consacre l'essentiel de la rédaction du troisième article.

Supposons que les deux fibres  $C_+$  et  $C_-$  sur lesquelles on va faire les transformations logarithmiques soient dans un voisinage en produit autour d'une courbe lisse  $C_0$  que l'on a supposé trivialisé de la forme  $C_0 \times 2D^2$  de façon à ce que  $C_\pm$  corresponde à  $C_0 \times \pm 1$  (ici  $aD^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq a\}$ ). Les deux transformations logarithmiques ont pour effet de remplacer  $C_0 \times 2D^2$  par

$R = C_0 \times (2D^2 - \frac{1}{2}D^2) / (x, y) \sim (x + \tau, y^{-1})$ , où  $\tau$  est un élément d'ordre 2 dans le groupe de la courbe elliptique  $C_0$ ; en identifiant  $C_0$  à  $T^2$ , on peut prendre  $\tau = (\frac{1}{2}, 0)$ .

Ceci donne la décomposition suivante de la surface d'Enriques :  $E = N_1^4 \cup R$ .

Remarque. En faisant opérer sur  $C_0 \times D^2$  des difféomorphismes de monodromie, on peut changer à volonté l'élément  $\tau$ . Cet argument de monodromie était d'ailleurs implicitement utilisé quand on a écrit que les transformations logarithmiques sur  $C_+$  et  $C_-$  correspondent au même  $\tau$  lorsque l'on identifie  $C_+$  et  $C_-$  avec  $C_0$  à l'aide de la trivialisatation du tube  $C_0 \times 2D^2$ .

Le revêtement double d'une surface d'Enriques est une surface K3; sur notre exemple, elle est difféomorphe à

$$K = N_1^4 \cup C_0 \times (2D^2 - \frac{1}{2}D^2) \cup N_1^4 \cong N_1^4 \underset{\psi}{\cup} N_1^4,$$

où le difféomorphisme de recollement  $\psi : T^3 = \partial N_1^4 \rightarrow \partial N_1^4 = T^3$  est donné par  $\psi(x, y, z) = (x + \frac{1}{2}, y, -z)$ .

Remarque. Si on recolle au moyen de  $\psi' : T^3 = \partial N_1^4 \rightarrow \partial N_1^4 = T^3$ ,  $\psi'(x, y, z) = (x, y, z)$  on remarque que l'on obtient la même variété  $K^{(\dagger)}$  mais que celle-ci est un revêtement de  $\widehat{\mathbb{C}P^2}$  ramifié sur deux fibres lisses : c'est la résolution du revêtement double de  $\mathbb{C}P^2$  ramifié sur la réunion de deux cubiques lisses. Le lecteur est invité à montrer qu'elle est difféomorphe au revêtement double de  $\mathbb{C}P^2$  ramifié sur une sextique lisse et plus généralement à trouver des difféomorphismes explicites entre les exemples de surfaces K3 algébriques qu'il a rencontrées. <sup>†</sup> (Pour de tels exemples, voir les chapitre VIII et IX (et surtout leurs exercices) du livre de Beauvillé, Surfaces algébriques complexes, Astérisque n° 54.)

(†)  $\psi'$  est isotope à  $\psi$ ; d'ailleurs la proposition 1 permet de remplacer  $\psi$  par n'importe quel difféomorphisme de degré -1.

(‡) On sait grâce à la théorie des périodes des surfaces K3 que toutes les surfaces K3 sont difféomorphes.

§1 . CERCLES DE POINTS DOUBLES D'IMMERSIONS GENERIQUES.

Soit  $f : M^{n+1} \rightarrow V^{2n+1}$  une immersion générique <sup>(†)</sup> entre deux variétés closes orientées de dimension  $n+1$  et  $2n+1$  respectivement.

L'ensemble singulier  $\Sigma$  de  $f$  est une collection de cercles sur laquelle la restriction de  $f$ ,  $f_1 : \Sigma \rightarrow f(\Sigma)$ , est un revêtement double (explicitement  $\Sigma = \{x \in M \mid \exists x' \neq x, f(x') = f(x)\}$ ).

Soit  $c$  une composante connexe de  $f(\Sigma)$  que l'on identifie à  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \cong [0, \pi]/0 \sim \pi$ . Soit  $T$  une tranche transverse au cercle  $c$  en le point paramétré par  $0 = \pi$ . Il y a un voisinage  $\mathcal{V}(c)$  dans la variété  $V$  tel que si on le découpe le long de la tranche  $T$ , on obtient une variété  $\mathcal{V}^T(c)$  diffeomorphe au produit  $[0, \pi] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ; de plus, l'image réciproque  $f^{-1}(f(M) \cap \mathcal{V}^T(c))$  est diffeomorphe à  $\{0, 1\} \times [0, \pi] \times \mathbb{R}^n$ , l'application  $f$  étant donnée dans ces cartes par la formule  $f(u, t, x) = (t, ux, (1-u)x)$ ,  $u \in \{0, 1\}$ ,  $t \in [0, \pi]$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  (la composante " $u = 0$ " va sur le "facteur vertical"  $[0, \pi] \times 0 \times \mathbb{R}^n$  de  $[0, \pi] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , la composante " $u = 1$ " allant sur le "facteur horizontal"  $[0, \pi] \times \mathbb{R}^n \times 0$  (voir la figure 1)).

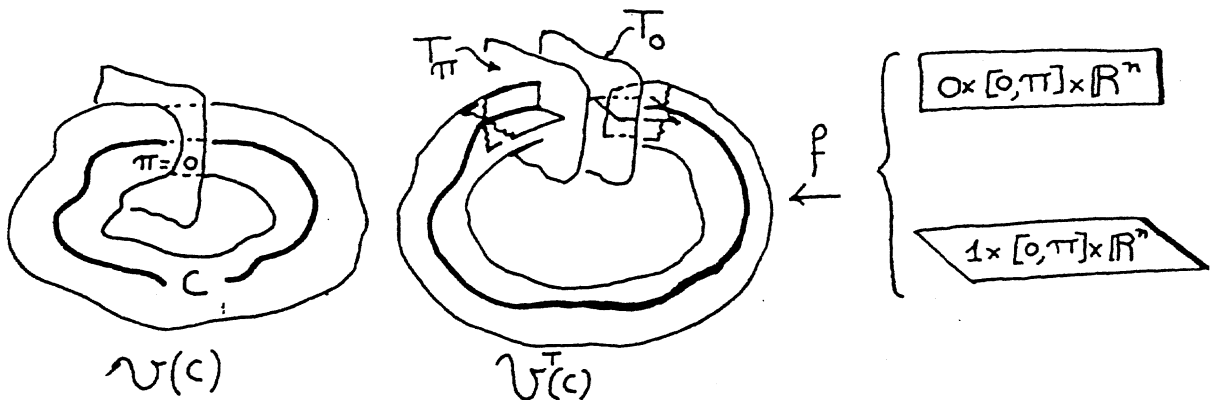


Figure 1

Remarquons que, comme la variété  $M$  est orientable, le cercle  $f^{-1}(c)$  a un voisinage en produit dans  $M$  et les identifications sur le bord de la carte  $\{0, 1\} \times [0, \pi] \times \mathbb{R}^n$  pour obtenir un voisinage de  $f^{-1}(c)$  peuvent être choisies comme :

(†) Une immersion  $f : M^{n+1} \rightarrow V^{2n+1}$  est générique si pour deux points distincts  $x$  et  $x'$  de  $M$  tels que  $f(x) = f(x')$ , les images  $Tf_x(T_x M)$  et  $Tf_{x'}(T_{x'} M)$  par l'application tangente à  $f$  des espaces tangents en  $x$  et  $x'$  sont transverses à  $T_{f(x)} V$ , l'espace tangent à  $V$  en  $f(x) = f(x')$ .

- (\*) 1)  $(u, \pi, x) \sim (1-u, 0, x)$  si le revêtement  $f_1$  est non trivial sur  $c$ .  
 2)  $(u, \pi, x) \sim (u, 0, x)$  sinon.

Les identifications qui produisent  $v(c)$  à partir de  $v^T(c)$  sont alors :

cas 1)  $(\pi, y, z) \sim (0, z, y)$

cas 2)  $(\pi, y, z) \sim (0, y, z)$ .

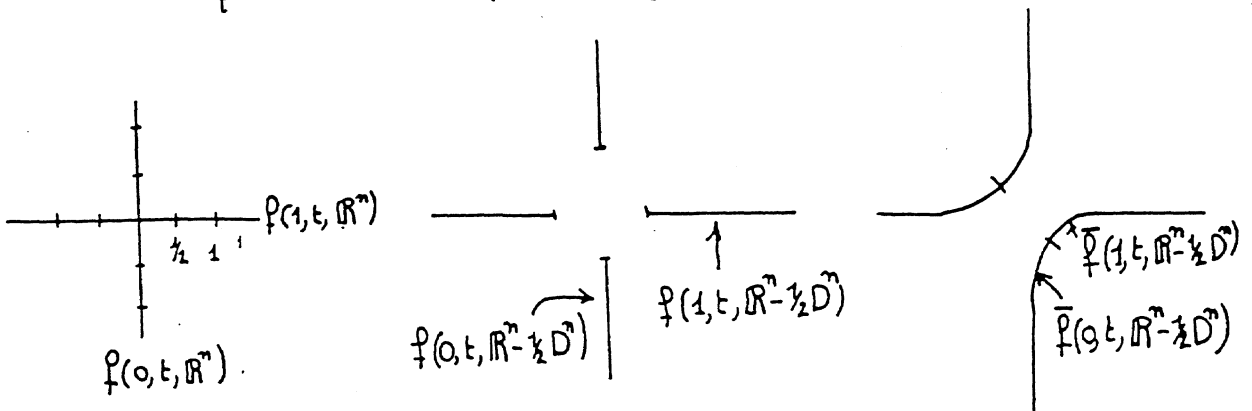
Dans les deux cas l'application  $f$  est donnée par :  $f(u, t, x) = (t, ux, (1-u)x)$ .

Dans le cas 1), la monodromie de recollement de  $v^T(c)$  est l'application  $(y, z) \rightarrow (z, y)$  qui échange les coordonnées du produit  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ; comme la variété ambiante  $V$  est orientable, cette monodromie conserve l'orientation et la codimension  $n$  de l'immersion doit être paire : nous avons établi que le cas 1) ne peut se produire que si la dimension de la variété  $M$  est impaire.

Précisons que les coordonnées ci-dessus ont été choisies dans l'orientation de la variété  $M$  (+).

§2. LA VERSION AMBIANTE DES MODIFICATIONS  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  de ROHLIN.

L'idée des modifications  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  est de faire une élimination dépendant continuellement du point  $t$  de  $c$  de la singularité de point double isolé formée par  $f(M)$  dans une tranche  $T_t$  normale à  $c$  au point  $t$  (figure 2).



Les modifications  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  vues dans une tranche  $T_t$

Figure 2

(+) Si l'on veut tenir compte de l'orientation de la variété ambiante  $V$ , il faudra distinguer dans chacun des cas ci-dessus deux sous-cas suivant que les coordonnées produites donnent ou non l'orientation de  $V$ . Comme l'orientation de  $V$  ne joue aucun rôle ici (seule son orientabilité a été utilisée pour montrer que si  $M$  est de dimension paire seul le 2e cas se produit), nous n'entrerons pas dans cette distinction plus fine.



Précisément, Rohlin enlève à la variété  $M$  les tores solides  $K_i$  correspondant aux points dont la coordonnée  $x$  vérifie  $|x| \leq \frac{1}{2}$  (un seul tore dans le cas 1) et deux dans le cas 2)) ; il produit alors un plongement de la variété  $N$  obtenue par identification sur le bord de  $M - \overset{\circ}{K}$  en remplaçant, sur  $M - \overset{\circ}{K}$ , l'immersion  $f$  par le plongement  $g$ . En notant, pour  $m \in f^{-1}(v(c))$ ,  $m = (u, t, x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , le plongement  $g$  est défini par :

$$1) \text{ Si } m \notin f^{-1}(v(c)) \text{ ou } |x| \geq 1, \quad g(m) = f(m).$$

$$2) \text{ si } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1, \quad g(0, t, x) = (t, \varphi(|x|)(-x_1, x_2, \dots, x_n), x)$$

$$g(1, t, x) = (t, x, \varphi(|x|)(-x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

où  $\varphi: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [0, 1]$  est une application  $C^\infty$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\frac{1}{2}) = 1 ; \varphi'(\frac{1}{2}) = -1 ; \varphi^{(n)}(\frac{1}{2}) = 0 \text{ pour } n \geq 2 ; \\ \varphi(1) = 0 ; \varphi^{(n)}(1) = 0 \text{ pour } n \geq 1 ; \\ \varphi'(t) < 0 \text{ pour } t < 1 \text{ (voir la figure 3)} \end{array} \right.$$

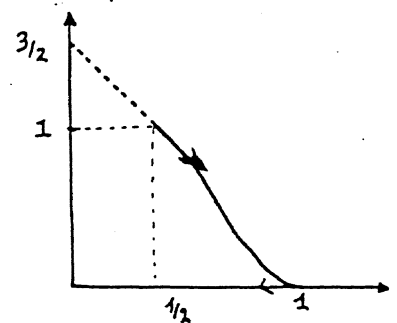


Figure 3 : le graphe de  $\varphi$

Pour  $|x| = \frac{1}{2}$ , l'application  $g$  identifie  $(u; t; x_1, x_2, \dots, x_n)$  à  $(1-u; t; -x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Ce sont les identifications qui produisent la variété  $N$ .

Pour ceux qui préfèrent des équations implicites, donnons, dans le cas  $n = 2$ , l'équation suivante de la partie d'un plongement de  $N$  se trouvant dans la carte  $v(c)$  :

$$0 = F(t, y, z) = y \cdot z + \varphi(|y|^2 + |z|^2)$$

(où on identifie  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$  et prolonge  $\varphi$  par :  $\left. \begin{array}{l} \varphi(t) = 3/2 - t \text{ pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(t) = 0 \text{ pour } t \geq 1 \end{array} \right\}$ )

Le point de vue "anses rondes" et "anses rondes tordues" qui résulte des formules et des dessins ci-dessus nous permet de voir que les modifications  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  conservent la classe de cobordisme orienté de  $M$  :

Pour  $\mathcal{O}_2$ , il suffit d'ajouter à  $M \times I$  une "anse ronde"  
 $H = [0, 1] \times [0, \pi] \times D^n / (u, 0, x) \sim (u, \pi, x)$  en identifiant les points de  $H$  paramétrés par  $(0, t, x)$  et  $(1; t; x_1, x_2, \dots, x_n)$  aux points de  $M \times 1$  paramétrés par  $((0; t; x); 1)$  et  $((1; t; -x_1, x_2, \dots, x_n); 1)$ .

Pour la modification  $\mathcal{O}_1$ , on fait la même chose avec l'"anse ronde tordue"  
 $\tilde{H} = [0, 1] \times [0, \pi] \times D^n / (u; 0; x_1, x_2, \dots, x_n) \sim (1-u; \pi; -x_1, x_2, \dots, x_n)$  : c'est une variété orientable et l'image de la partie  $\partial([0, 1]) \times [0, \pi] \times D^n / \sim$  du bord de  $\tilde{H}$

sur laquelle se fait le recollement est connexe ; on a donc bien un cobordisme orienté.

### §3. LES FORMULES DE ROHLIN.

Rohlin utilise le même cobordisme : la variété qu'il nomme  $W^4$  est le fibré tordu en disques, ayant une section, sur la bouteille de Klein  $B^2$  ; la variété  $Q^3$  est la restriction de ce fibré à une courbe unilatérale de  $B^2$  : la variété  $W^4$  découpée le long de  $Q^3$  est un fibré en disques sur le ruban de Möbius  $M^2$  ; c'est notre anse tordue  $\tilde{H}$  (avec nos coordonnées, la fibration est l'application  $\pi : \tilde{H} \rightarrow M^2$  donnée par :

$$\pi(u; t; x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (u, x_1) ,$$

où on prend  $[0, 1] \times D^1 / (1, x) \sim (0, -x)$  comme modèle pour la bande de Möbius  $M^2$ , et on prend le carré  $D^1 \times D^1$  comme modèle du disque  $D^2$  co-âme de  $\tilde{H}$ . La variété  $W^4$  découpée le long de  $Q^3$  est un cobordisme orienté entre le bord d'un voisinage régulier de  $Q^3$  : un tore solide, et le fibré en cercles associé au fibré en disques sur  $M^2$ .

Le jeu que Rohlin effectue avec les coordonnées angulaires consiste à montrer que le fibré en cercles associé à ce fibré en disque est difféomorphe au fibré non trivial en intervalles sur la bouteille de Klein (par lequel on remplace le tore  $K$  de la variété  $M$  pour former  $N$ ). Ce fait se voit directement :

Soit en remarquant qu'un fibré (en cercles) sur la bande de Möbius  $M$  est un voisinage régulier de sa restriction à l'âme de  $M$  ; ici cette restriction est une bouteille de Klein dont un voisinage régulier dans le fibré (en cercles) non trivial sur la bande de Möbius est un fibré non trivial en intervalles.

Soit en considérant les deux espaces comme fibrés, non triviaux et d'espace total orientable, en anneaux sur le cercle. (Il suffit de composer les fibrations définissant ces espaces avec les fibrations  $M^2 \rightarrow S^1$  et  $B^2 \rightarrow S^1$  respectivement.). Sur notre modèle, la fibration sur la bouteille de Klein  $B^2$  est  $(u, t, x) \mapsto (t, x)$  (cas  $n = 2$  de notre modèle).

## 2. LA METHODE DE KNESER POUR LISSER LES CYCLES

### D'UNE VARIETE COMBINATOIRE

Une tentative de démonstration combinatoire de  $\Omega_4 = \mathbb{Z}$

#### INTRODUCTION.

La courbe  $C_0$  d'équation  $x.y = 0$  a une singularité isolée et peut être approchée par des courbes lisses  $C_\epsilon$  d'équation  $x.y = \epsilon$ . La méthode de Kneser ([K]) que nous allons présenter est une généralisation de cette déformation de lissage au cas où, au lieu d'avoir des singularités isolées de variétés algébriques, on a seulement un sous-polyèdre d'une variété combinatoire qui vérifie certaines hypothèses homologiques.

Énonçons l'un des résultats que l'on obtient par cette méthode.

THEOREME 2. Soit  $K^n$  un sous-complexe fini orienté <sup>(†)</sup> de dimension  $n$  d'une variété triangulée  $M^{n+1}$  de dimension  $n+1$ . On suppose que la chaîne  $\bar{K}$  définie par les  $n$  simplexes (orientés) de  $K$  est un cycle à coefficients entiers. Alors, il existe une subdivision de  $M$  et un sous-complexe  $N$  de cette subdivision qui est une sous-variété orientée localement plate de  $M$  et homologue sur les entiers au cycle  $\bar{K}$ .

Dans le cas où  $M$  est orientable, on montre aujourd'hui ce théorème en utilisant la transversalité de Thom: Le dual pour Poincaré de l'élément de  $H_n(M, \mathbb{Z})$  défini par le cycle  $K$  est un élément de  $H^1(M, \partial M; \mathbb{Z})$  (si  $M$  est non compacte, la remplacer par un voisinage compact de  $K$ ), on représente alors ce dernier élément par une application  $f$  de  $M$  sur le cercle  $S^1$ , constante sur le bord  $\partial M$  et transverse à un point de  $S^1$  (distinct de  $f(\partial M)$ ). Remarquons que dans le cas où la variété  $M$  n'est pas orientable, une "démonstration moderne" de ce théorème n'est pas aussi aisée, alors qu'il ne suffit que de très légères modifications de la méthode de Kneser ([K] qui

---

(†) Chaque simplexe de dimension maximale  $n$  est muni d'une orientation.

date de 1924) pour attraper, dans tous les cas (que la variété  $M$  soit orientable ou non), le théorème de lissage cohomologique : tout élément de  $H^1(M; \mathbb{Z})$  se représente par une sous-variété de codimension un, plate et transversalement orientée.

Mais l'intérêt d'exposer cette méthode aujourd'hui est autre. Rohlin, dans l'article ([R]) où il montre que le groupe de cobordisme des variétés orientables de dimension trois est nul, énonce une méthode de Kneser à bord qui peut être vue comme le commencement d'une "machine combinatoire" de Kneser qui permettra de lisser les cycles de codimension deux ; il est naturel d'essayer de poursuivre ; on se trouve bloqué à l'étape suivante, mais on récolte une démonstration du calcul du groupe de cobordisme  $\Omega_4$  semblable à celle de  $\Omega_3 = 0$ . Cependant, nous ne réussirons pas à donner une démonstration combinatoire du théorème de Rohlin, et devrons soit nous restreindre aux variétés différentiables, soit utiliser le théorème de Wall d'unicité des fibrés normaux PL en codimension deux ; mais ce théorème n'a pas de démonstration satisfaisante (on utilise le théorème de Schönflies en petite dimension, la théorie des anses de Smale en grande dimension, et on a besoin du théorème de Cerf :  $\text{Diff}(S^3)$  est connexe, pour faire le pont !). Nous noterons que le théorème de Rohlin implique le théorème de Wall élémentairement (par des arguments qui sont les mêmes pour toutes les dimensions) et demandons donc une démonstration combinatoire et élémentaire dans le sens précédent du théorème de Rohlin.

Au paragraphe 1, nous exposerons la construction fondamentale. Le paragraphe 2 est consacré à l'analogie non orientable du théorème 2 énoncé ci-dessus ; le théorème 2 sera démontré au paragraphe 3. Le théorème de Rohlin (lissage, en fixant le bord, d'un polyèdre  $K$ , orienté, dont le bord homologique est une sous-variété localement plate de codimension deux) sera "établi" au paragraphe 4 ; ce résultat permettra, dans le paragraphe 5, d'établir l'analogie du théorème 2 en codimension 2. Le paragraphe 6 sera consacré à la difficulté technique, signalée plus haut, rencontrée dans la preuve du théorème de Rohlin ; nous échouons au paragraphe 7 en tentant de généraliser le théorème de Rohlin en codimension deux, mais récupérerons la démonstration de  $\Omega_4 = \mathbb{Z}$  annoncée plus haut. Nous terminerons enfin par des exercices indiquant, entre autres, comment obtenir les résultats sur  $H^1(M, \mathbb{Z})$ ,  $H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ,  $H^2(M, \mathbb{Z})$  en utilisant la méthode de Kneser.

### § 1. LA CONSTRUCTION FONDAMENTALE.

Commençons par rappeler certaines notions de topologie combinatoire. Soit  $\sigma$  un simplexe d'un complexe simplicial  $K$ . Le site de  $\sigma$  dans  $K$  (ou l'étoile de  $\sigma$  dans  $K$ , en anglais star) est le sous-complexe de  $K$  formé de toutes les faces des simplexes dont  $\sigma$  est une face, on le note  $St(\sigma, K)$ . La lice de  $\sigma$  dans  $K$  (en anglais link) est le sous-complexe formé des faces, disjointes de  $\sigma$ , des simplexes dont  $\sigma$  est une face, on la note  $L(\sigma, K)$ . Si  $K'$  désigne la première subdivision barycentrique de  $K$  et  $\sigma_i$  sont les simplexes de plus grande dimension de  $\sigma' = \sigma \cap K'$ , toutes les lices  $L(\sigma_i, K')$  sont égales, on note cette lice commune  $L(\sigma, K')$ ; la réunion des sites  $St(\sigma_i, K')$  forme le site de  $\sigma$  dans  $K'$  que l'on note  $St(\sigma, K')$ .

Nous utiliserons les faits connus suivants :

- (1) Le site de  $\sigma$  dans  $K'$  est isomorphe au joint de  $\sigma$  et de la lice de  $\sigma$  dans  $K'$  :  $St(\sigma, K') \cong \sigma * L(\sigma, K')$  (l'isomorphisme est simplicial si  $\sigma$  est triangulé par  $\sigma \cap K'$ ). Il en résulte que la frontière du site de  $\sigma$  dans  $K'$  est isomorphe au joint du bord de  $\sigma$  et de la lice de  $\sigma$  dans  $K'$  :

$$\partial St(\sigma, K') \cong \partial \sigma * L(\sigma, K') .$$

- (2) Un sous-complexe  $K^n$  d'une variété combinatoire  $M^{n+q}$  est une sous-variété localement plate de  $M$  si et seulement si pour tout simplexe  $\sigma^p$  de  $K$  la paire de lices  $(L(\sigma, M), L(\sigma, K))$  est une paire de sphères dénouée (de dimension  $(n-p-1+q, n-p-1)$ ).

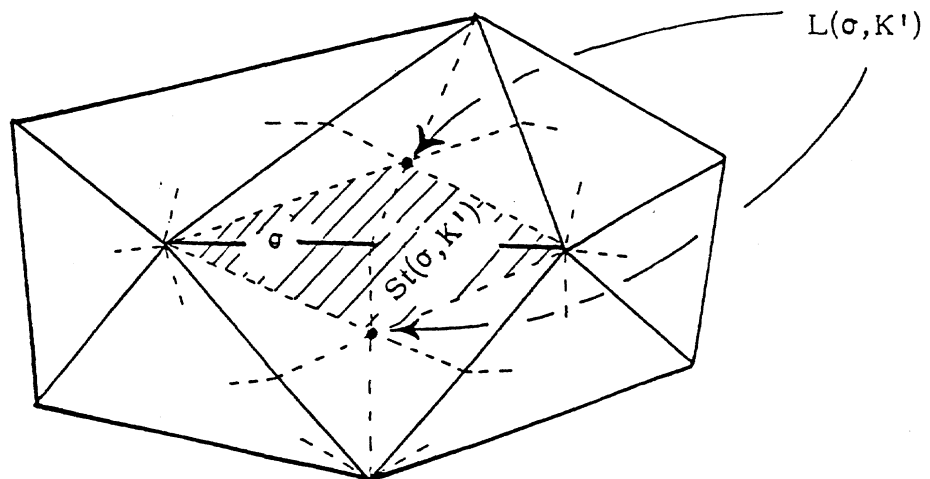


Figure 1. Site et Lice

Soit  $K^n$  un sous-complexe de dimension  $n$  d'une variété triangulée  $M^{n+q}$  de dimension  $n+q$ . Nous dirons que  $K$  a des singularités de codimension  $c$  si  $K - K^{[n-c]}$  est une sous-variété localement plate de  $M$  ( $K^{[n-c]}$  désigne le  $n-c$  squelette du complexe  $K$ ). Cette propriété se traduit techniquement de la manière suivante :

Pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq c$ , et tout  $n-i$  simplexe  $\sigma^{n-i}$  de  $K$ , la paire des lices de  $\sigma$  dans  $M'$  et  $K' (= K \cap M')$ ,  $(L(\sigma, M'), L(\sigma, K'))$  est PL isomorphe à la paire standard de sphères dénouées  $(S^{i-1+q}, S^{i-1})$ . Un simplexe pour lequel cette propriété est violée est dit singulier.

Nous pouvons maintenant présenter la construction fondamentale :

Soit  $\sigma$  un  $(n-c)$  simplexe d'un sous-complexe ayant des singularités en codimension  $c$ . La lice  $L(\sigma, K')$  est alors une sous-variété localement plate  $V^{c-1}$  de dimension  $c-1$  de la lice  $L(\sigma, M')$  qui est une sphère de dimension  $q+c-1$  <sup>(†)</sup>.

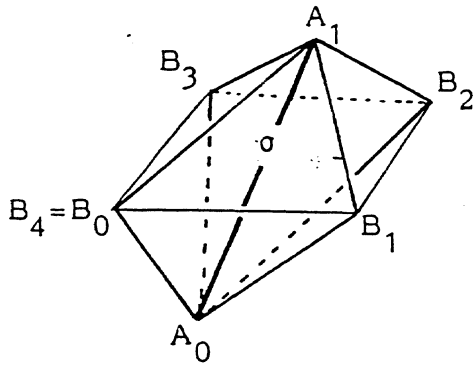
Si la lice  $V$  borde  $W^c$  une sous-variété localement plate de la sphère  $L(\sigma, M')$ , Kneser élimine la singularité du complexe  $K$  en remplaçant  $K$  par :

$$K_1 = K - \text{St}(\sigma, K') \cup \partial\sigma * W \quad (\text{voir la figure 2}).$$

Désignons par  $M_1$  une subdivision de  $M$  qui triangule  $K_1$  comme un sous-complexe. Hors du site  $\text{St}(\sigma, M')$  le complexe  $K_1$ , tout comme  $K$ , a des singularités en codimension  $c$ . Sur  $\text{St}(\sigma, M') - \partial\sigma$ ,  $K_1$  est une sous-variété localement plate <sup>(‡)</sup>. Donc, les seuls simplexes  $\tau$  qui peuvent voir leur paire de lice  $(L(\tau, M'_1), L(\tau, K'_1))$  modifiée sont ceux de  $\partial\sigma$ , mais ils sont de codimension  $c+1$ . Bien sûr, pour gagner quelque chose, il faut effectuer cette modification simultanément sur tous les  $n-c$  simplexes singuliers de  $K$ , ce qui peut se faire en ayant pris soin de subdiviser une fois de plus (pour tous les simplexes  $\sigma^{n-c}$  de  $K^{[n-c]} \cap K'$ , les sites  $\text{St}(\sigma, K'')$  n'ont en commun que des points de  $\partial\sigma$ ).

(†) Démonstration de cette affirmation : soient  $\tau^j$  un  $j$  simplexe de  $V = L(\sigma, K)$  et  $\bar{\tau}$  le  $(n-c+j+1)$  simplexe du site  $\text{St}(\sigma, K')$  dont  $\tau$  est la face opposée à  $\sigma$ . La paire de lices  $(L(\tau, L(\sigma, M')), L(\tau, L(\sigma, K')))$  est simplicialement isomorphe à la paire  $(L(\bar{\tau}, M'), L(\bar{\tau}, K'))$  qui est dénouée car  $K$  est singulier en codimension  $c$  et  $\bar{\tau}$  est hors de  $K^{[n-c]}$  ( $\dim \bar{\tau} = n-c+j+1 \geq n-c+1$  car  $j \geq 0$ ).

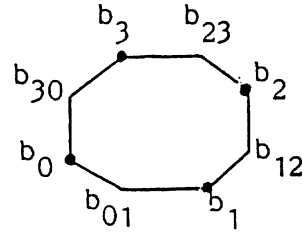
(‡) car  $W \cap K = \partial W = V$  puisque  $\text{St}(\sigma, M') \cap K = \text{St}(\sigma, K')$  (c'est pour avoir cette propriété que l'on a travaillé dans la première subdivision barycentrique).



$\sigma$  est le segment  $A_0A_1$  ;  $St(\sigma, M)$  est l'octaèdre union des quatre tétraèdres

$A_0A_1B_iB_{i+1}$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) ;

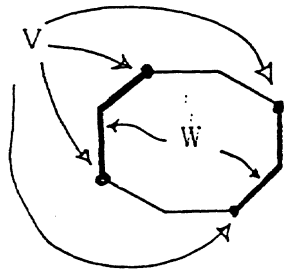
$St(\sigma, K)$  est l'union des quatre triangles  $A_0A_1B_i$ .



$L(\sigma, M')$  est un octogone

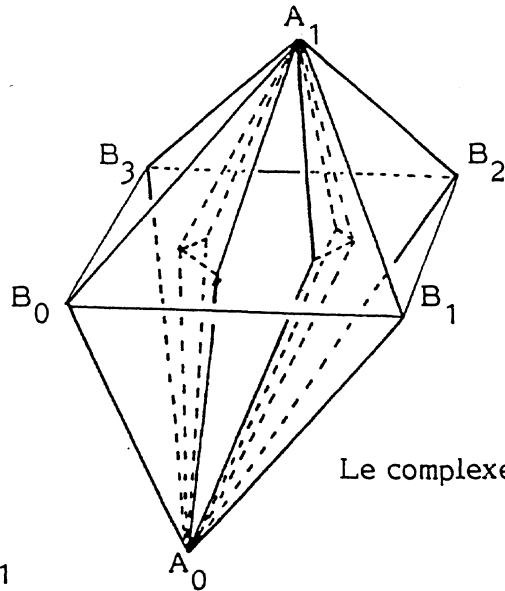
$(b_{i,i+1}$  est le barycentre de  $A_0A_1B_iB_{i+1}$ ,  
 $b_i$  est le barycentre de  $A_0, A_1, B_i$ )

$L(\sigma, K')$  est formé des quatre points  $b_0, b_1, b_2, b_3$ .



$W$  est l'union des segments

$b_1b_{12}b_2$  et  $b_3b_{30}b_0$



Le complexe  $K_1$  plongé

abstraitement  $K_1$  est :

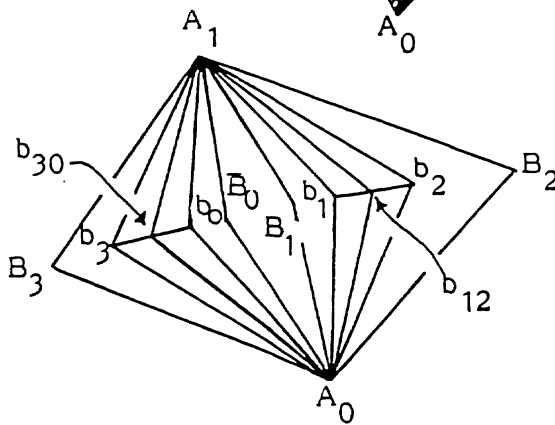


Figure 2. La construction fondamentale dans un cas où  $n = 2, q = 1, c = 1$ .

Remarquons le lien entre cette construction et la déformation  $C_\epsilon$  de l'introduction : Si une hypersurface algébrique d'équation  $f = 0$  possède une singularité isolée au point  $x$ , on peut prendre pour variété  $W$  la fibre de Milnor de la singularité, que l'on sait isotope à  $St(x, M') \cap \{f^{-1}(\epsilon)\}$ .

Tout le problème dans la suite est de trouver des hypothèses garantissant l'existence de la variété  $W$  : un problème de "surface de Seifert" pour une sous-variété localement plate de la sphère.

## § 2 . LE THEOREME DE KNESER (COEFFICIENTS ENTIERS MODULO 2)

THEOREME 1. Soit une variété de dimension  $(n+1)$   $M$  ayant une triangulation  $T$  et soit  $K^n$  un sous-complexe fini de dimension  $n$  de  $T$  qui soit un cycle modulo 2 . Alors, il y a une sous-variété localement plate  $N$  de  $M$ , homologue à  $K$  modulo deux et qui est un sous-complexe du  $2n$ -ème subdivisé barycentrique  $T^{(2n)}$  de  $T$  .

Démonstration. Supposons construit un sous-complexe  $K_i$  de  $M_i = T^{(2i)}$  qui soit singulier en codimension  $i+1$  et homologue modulo deux à  $K$  (on commence la récurrence avec  $K_0 = K$  et on posera  $N = K_n$ ).

Soient  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  les  $n-(i+1)$  simplexes de  $K_i^{[n-(i+1)]} \cap K_i'$  où  $K_i^{[n-(i+1)]}$  est le  $n-(i+1)$  squelette de  $K_i$  et  $K_i'$  est le subdivisé barycentrique de  $K_i$ . Soit  $V_j$  la lice  $L(\sigma_j, K_i'')$ ; elle borde une sous-variété localement plate  $W_j$  de la sphère  $L(\sigma_j, M_i'')$  : Si  $i = 0$ , puisque  $K_0 = K$  est un cycle modulo deux, chaque  $V_j$  est formé d'un nombre pair de points et donc borde une réunion disjointe d'arcs  $W_j$  dans le cercle  $L(\sigma_j, M_i'')$  (voir la figure 2); si  $i > 0$ , c'est parce que toute variété de codimension un disconnecte une sphère simplement connexe.

Comme les sites  $St(\sigma_j, M_i'')$  ne se touchent qu'aux bords des simplexes  $\sigma_j$ , on peut appliquer simultanément dans les sites de tous les  $\sigma_j$  les modifications de Kneser pour obtenir :

$$K_{i+1} = (K_i - \bigcup_{j=1}^N St(\sigma_j, K_i'')) \bigcup_{j=1}^N \partial \sigma_j * W_j .$$

La réunion des joints  $\bigcup_{j=1}^N \sigma_j * W_j$  fournit une homologie modulo deux entre  $K_i$  et  $K_{i+1}$ .  $\square$



### § 3. LE THEOREME DE KNESER (COEFFICIENTS ENTIERS)

Démonstration du théorème 2. Supposons construit un sous-complexe orienté de dimension  $n$ ,  $K_i$ , d'une subdivision  $M_i$  de  $M$  qui soit singulier en codimension  $i+1$  et homologue sur les entiers à  $K$  (on commence la récurrence avec  $K_0 = K$  et l'on posera  $N = K_n$ ).

Nous utiliserons les mêmes notations que dans la démonstration précédente et choisissons une orientation pour chaque  $n-(i+1)$  simplexe  $\sigma_j$ . Comme le complexe  $K_i$  est orienté, la lice  $L(\sigma_j, K_i)$  est une sous-variété orientée  $V_j$  de codimension un de la sphère  $L(\sigma_j, M_i)$ .

AFFIRMATION. Il existe une sous-variété  $W_j$  orientée, de codimension zéro de la sphère  $L(\sigma_j, M_i)$  telle que  $W_j \cap V_j = \partial W_j \neq \emptyset$  et les orientations coïncident.

En effet, pour  $i = 0$ , puisque  $K$  est un cycle sur les entiers,  $V_j$  est formé d'un nombre pair  $2k$  de points disposés sur un cercle,  $k$  d'entre eux exactement étant affectés d'une orientation positive; il y a donc un arc dans le complémentaire dont les extrémités sont d'orientations opposées. Pour  $i > 0$ , il suffit de prendre une composante de  $V_j$  la plus intérieure.

On effectue la modification de Kneser partielle sur les  $W_j$  en posant :

$$K_i^1 = (K_i - \bigcup_{j=1}^N \text{St}(\sigma_j, K_i)) \cup \bigcup_{j=1}^N \partial \sigma_j * W_j \cup \bigcup_{j=1}^N \sigma_j * (V_j - \partial W_j).$$

La réunion des joints  $\bigcup_{j=1}^N \sigma_j * W_j$  fournit une homologie entre  $K_i$  et  $K_i^1$  (voir figure 3).

Le complexe  $K_i^1$  peut encore être singulier en codimension  $i+1$ , mais il est plus simple que  $K_i$ : définissons la complexité de  $K_i$  comme étant le maximum des nombres de composantes connexes de  $V_j$ , la lice  $L(\sigma_j, K_i), \sigma_j$  parcourant les simplexes singuliers de dimension  $n-(i+1)$ . Remarquons que pour toute subdivision de  $K_i^1$ , les seuls simplexes singuliers de dimension  $(n-(i+1))$  sont des simplexes  $\tau^{n-(i+1)}$  qui sont inclus dans un  $\sigma_j$  et que, pour un tel simplexe, la lice  $L(\tau, K_i^1)$  est PL isomorphe à  $V_j - \partial W_j$ , donc  $K_i^1$  a une complexité moindre que celle de  $K_i$  et, par récurrence, on obtient  $K_i^k$  de complexité nulle et on pose  $K_{i+1}^k = K_i^k$ .

Remarquons que les théorèmes 1 et 2 admettent des formes relatives: Si le complexe  $K$  est, près d'un fermé une sous-variété localement plate (orientée pour le théorème 2), on peut imposer à la variété  $N$  d'être égale à  $K$  près de ce fermé il suffit de n'effectuer les modifications de Kneser qu'aux simplexes  $\sigma_j$  singuliers (ceux pour lesquels la paire de lice  $(L(\sigma_j, M_i), L(\sigma_j, K_i))$  n'est pas une paire de sphères dénouée).

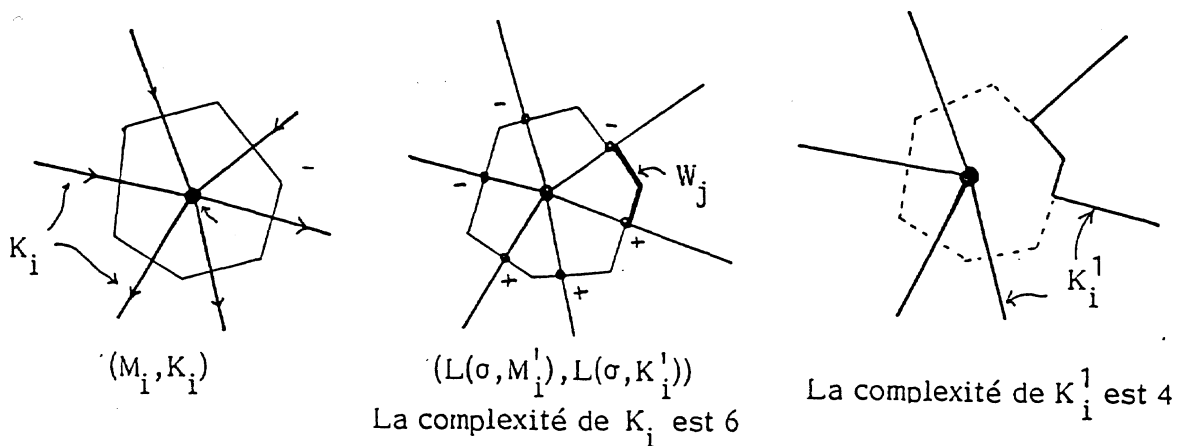


Figure 3. La modification de Kneser partielle

#### § 4. LE THEOREME DE ROHLIN

THEOREME 3. Soit  $K^n$  un sous-complexe fini, orienté, de dimension  $n$  d'une variété triangulée  $M^{n+1}$  de dimension  $n+1$ . On suppose que le bord de la chaîne  $\bar{K}$  définie par les  $n$  simplexes orientés de  $K$  est une sous-variété localement plate  $Q^{n-1}$  de  $M$ .

Alors, il y a une subdivision de  $M$  et un sous-complexe de cette subdivision qui est une sous-variété localement plate,  $N$ , de  $M$ , de bord la sous-variété  $Q$  et homologue, modulo  $Q$  et sur les entiers à la chaîne  $\bar{K}$ .

Démonstration. Tout d'abord, nous dirons que le complexe  $K$  est singulier en codimension  $c$  si  $K - K^{[n-c]}$  est une sous-variété localement plate de bord  $Q - K^{[n-c]}$ ; cela se traduira techniquement par :

i) Pour tout  $(n-i)$  simplexe de  $Q$  ( $0 \leq i < c$ ), la lice  $L(\sigma, K')$  est un disque localement plat dans la sphère  $L(\sigma, M')$  de bord  $L(\sigma, Q')$  (rappelons que, puisque  $Q$  est une sous-variété localement plate, cette dernière lice est une sphère dénouée).

ii) Pour les  $(n-i)$  simplexes de  $K - Q$  ( $0 \leq i < c$ ), la même condition qu'auparavant.

Supposons construit un sous-complexe orienté  $K_i$  d'une subdivision  $M_i$  de  $M$ , singulier, en codimension  $i+1$  et homologue modulo  $Q$  à  $K$  (le bord homologique de  $K_i$  est donc la sous-variété  $Q$ ). Nous utiliserons les mêmes notations que dans la démonstration du théorème 2.

La lice  $L(\sigma_j, K_i'')$  est une sous-variété localement plate et orientée  $V_j$  de la sphère  $L(\sigma_j, M_i'')$ , qui n'a un bord non vide que si  $i \geq 1$  et si le simplexe  $\sigma_j$  est dans

$Q$ , auquel cas le bord de  $V_j$  est  $L(\sigma_j, K_i'' \cap Q)$  qui est une sphère dénouée  $S_j$ .  
Supposons d'abord  $i \geq 1$  et  $\sigma_j$  dans  $Q$ .

AFFIRMATION. Il y a un disque  $D_j$  de dimension  $i$  localement plat dans  $L(\sigma_j, M_i'')$  de bord  $S_j$  et tel que :

- a) Sur un voisinage régulier  $R_j$  de  $S_j$ , les variétés  $V_j$  et  $D_j$  coïncident.
- b) Le cycle  $(D_j \cup V_j) - \overset{\circ}{R}_j$  est trivial en homologie entière dans  $E_j = L(\sigma_j, M_i'') - \overset{\circ}{R}_j$ , l'extérieur de  $R_j$ .

Complément. a) Si  $\sigma_j$  n'est pas dans  $Q$ , l'affirmation est vraie pour  $D_j = R_j = \emptyset$  (vraie aussi si  $i = 0$ ).

b) Si  $i = 0$  et  $\sigma_j$  est dans  $Q$ , l'affirmation est vraie avec  $R_j$  un voisinage régulier de  $D_j$ .

Le complément n'est que la traduction de ce que, sur les entiers, le bord homologique de  $K_i$  est la sous-variété  $Q$  pour  $i = 0$  et pour  $i \geq 1$ ,  $H_1(L(\sigma_j, M_i'')) = 0$ . Pour l'affirmation, comme la sphère  $S_j$  est dénouée, elle borde un disque  $D_j$  de dimension  $i$ . Par existence de collier de  $S_j$  dans  $D_j$  et  $V_j$ , et de bicollier autour de  $D_j$  et  $V_j$  dans  $L(\sigma_j, M_i'')$ , on peut, dans un voisinage de  $S_j$ , interpréter  $D_j$  et  $V_j$  comme les traces de deux sections de deux fibrés normaux à  $S_j$  dans  $L(\sigma_j, M_i'')$ . Faisant appel au théorème de Wall ([W]) d'unicité des fibrés normaux en codimension deux, on peut, après une isotopie de  $D_j$ , supposer que les deux fibrés sont égaux et donc les deux sections diffèrent par une application de  $S_j$  dans le cercle  $S^1$ . Comme les deux sections sont homologues sur les entiers (car  $D_j$  et  $V_j$  sont orientables), l'application de comparaison est triviale en homotopie ; les deux sections sont isotopes et l'on peut réaliser la condition a) (c'est ici que l'on utilise la condition d'orientabilité; voir dans les exercices 3b) et 3c) ce qui se passe sans la condition d'orientabilité).

Comme  $E_j$  a le type d'homotopie d'un cercle, la condition b) est automatiquement vérifiée pour  $i \geq 2$ , et pour  $i = 1$ , il suffit de faire des sommes connexes de l'arc  $D_j$  avec des cercles bords de petits disques transverses à  $S_j$  (ou si l'on préfère, enrouler  $D_j$  autour de  $S_j$  (voir la figure 4)).

Terminons, à l'aide de l'affirmation, la démonstration du théorème 3.

Soit  $\check{\sigma}_j$  le barycentre du simple  $\sigma_j$  et  $e_j = \check{\sigma}_j * L(\sigma_j, M_i'')$  la cellule duale de  $\sigma_j$ . Considérons  $E_j \times [\frac{1}{2}, 1]$  ( $[\frac{1}{2}, 1]$  étant la "moitié extérieure" de l'intervalle  $[0, 1]$  de joint ; voir la figure 5). Dans le bord de  $E_j \times [\frac{1}{2}, 1]$ , considérons la sous-variété  $T_j = (V_j \cap E_j) \times 1 \cup (V_j \cap \partial E_j) \times [\frac{1}{2}, 1] \cup (D_j \cap E_j) \times \frac{1}{2}$ . Avec l'orientation

qu'elle hérite de  $V_j$ , la variété  $T_j$  borde homologiquement dans  $E_j \times [\frac{1}{2}, 1]$ , donc par la version relative du théorème 2 signalée à la fin du paragraphe précédent,  $T_j$  borde dans  $E_j \times [\frac{1}{2}, 1]$  une sous-variété  $W_j'$ . Posons alors :

$$W_j = W_j' \cup (V_j - \overset{\circ}{E}_j) \times [\frac{1}{2}, 1]$$

$$\text{et } K_{i+1} = K_i - \left( \bigcup_{j=1}^N \text{St}(\sigma_j, K_i'') \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^N \partial\sigma_j * W_j \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^N \sigma_j * (D_j \times \frac{1}{2}) \right).$$

La réunion  $\bigcup_{i=1}^N \sigma_j * W_j$  est une homologie entière entre  $K_i$  et  $K_{i+1}$ .

(Remarquons que, contrairement à ce qui se passe dans les théorèmes précédents, les joints  $\sigma_j * W_j$  ne sont pas plongés dans  $L(\sigma_j, K_i'')$  bien que les deux réunions dans la formule définissant  $K_{i+1}$  le soient.)

Signalons l'exercice 3a) où une démonstration plus naïve est présentée.

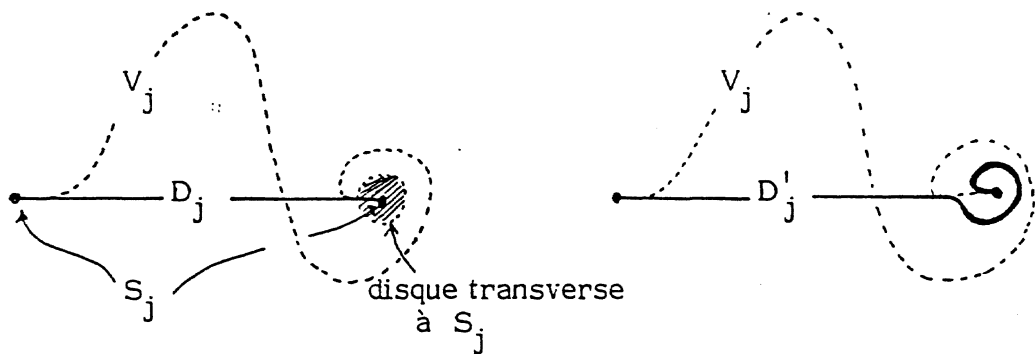


Figure 4. L'enroulement de  $D_j$  autour de  $S_j$

**COROLLAIRE.** Soit  $Q^{n-1}$  une sous-variété orientée localement plate de codimension deux de  $M^{n+1}$  dont la classe fondamentale est nulle dans  $H_{n-1}(Q, \mathbb{Z})$ . Alors, il y a dans  $M$  une surface de Seifert  $S$  pour  $Q$  : une sous-variété  $S$  orientée de dimension  $n$ , localement plate dans  $M$  dont le bord soit  $Q$ .

**Démonstration.** On applique le théorème 3 à un complexe  $K^n$  qui réalise une homologie à zéro de  $M$ .  $\square$

**Remarque.** Dans le cas classique où  $M^{n+1} = S^3$  et  $Q$  est un enlacement orienté, on peut choisir un point  $x_0$  dans  $S^3$  d'où l'on voit l'enlacement  $Q$  immergé avec

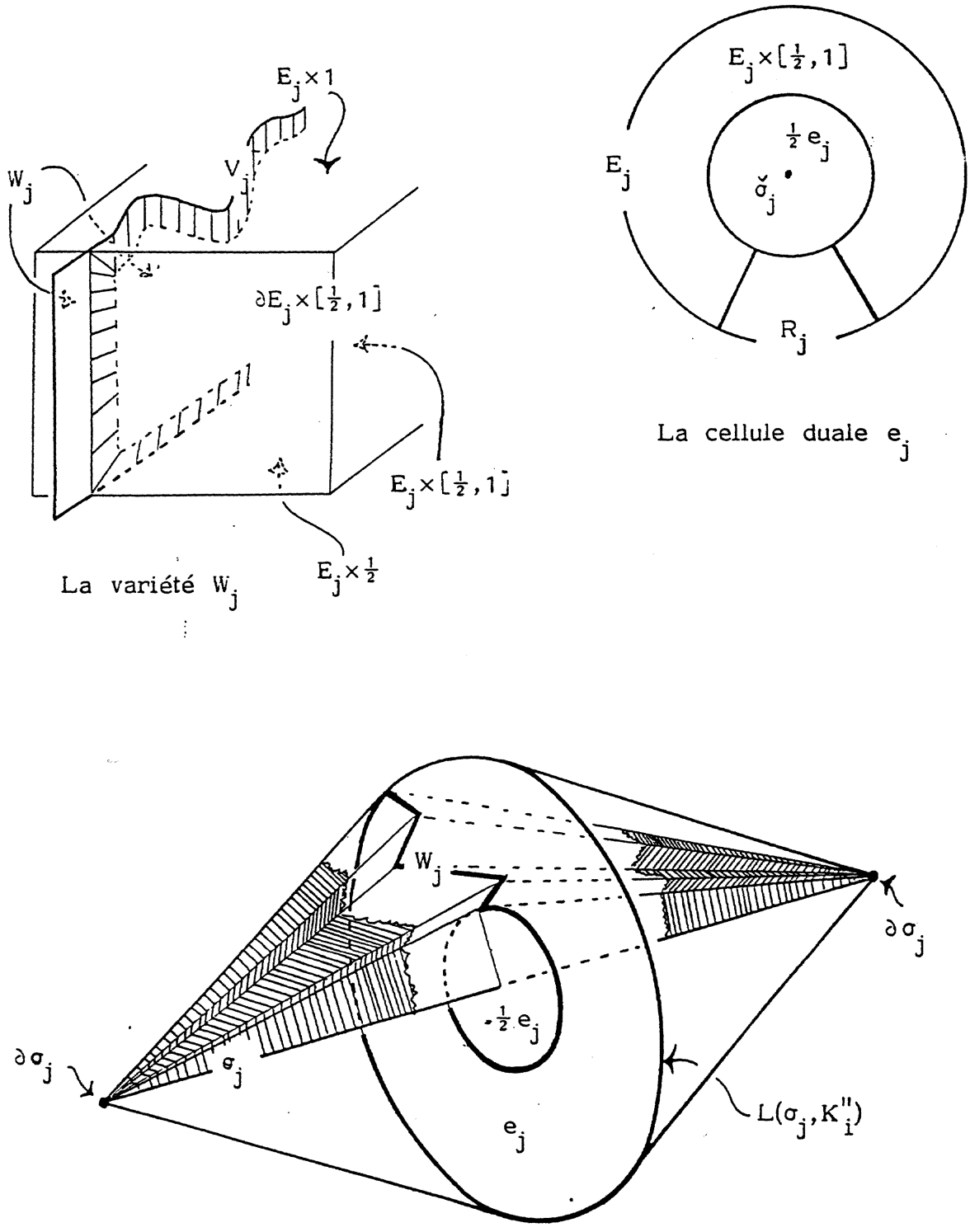
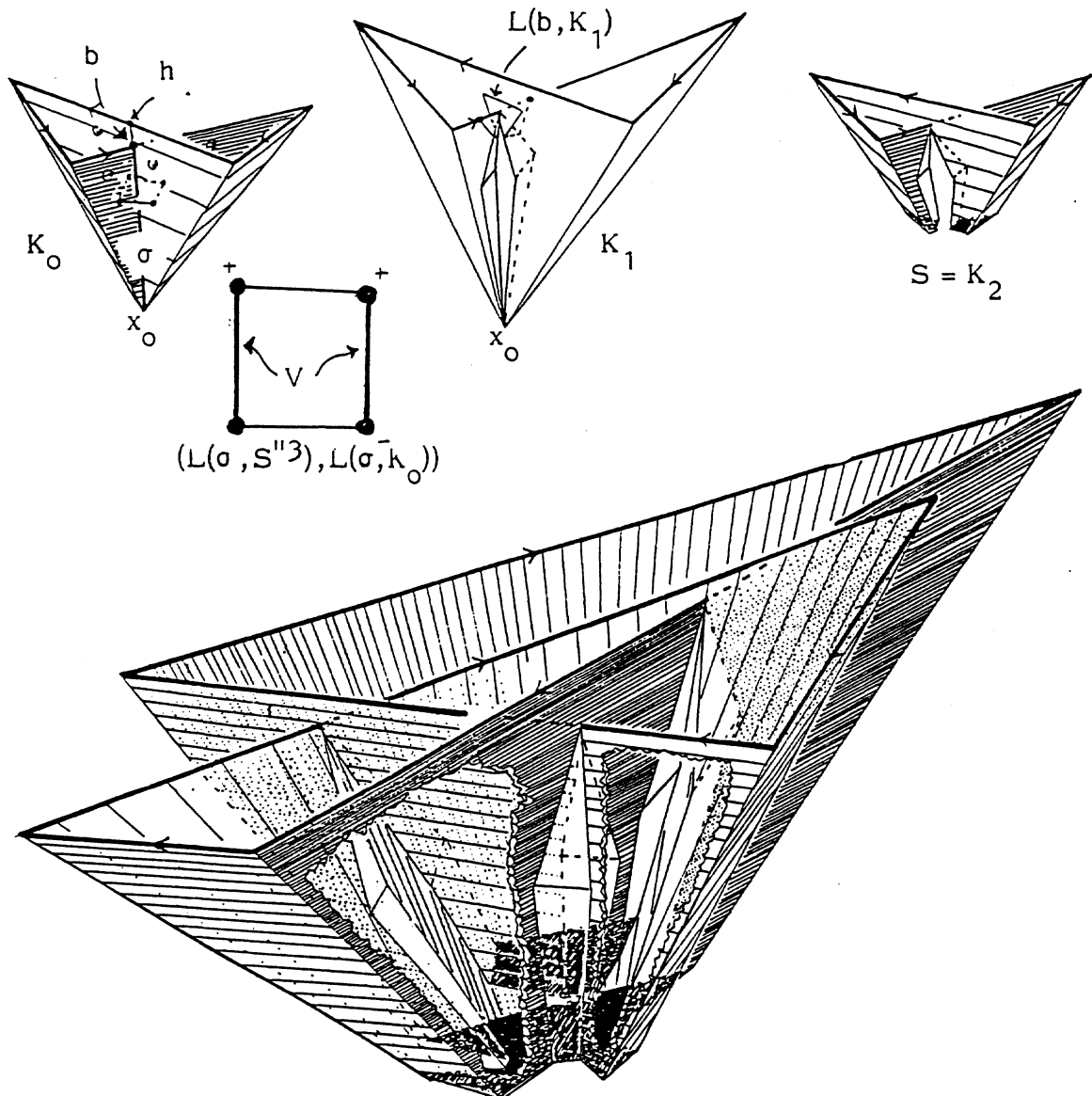


Figure 5. La construction finale de la démonstration du théorème 3.

seulement des points doubles transverses. Prenons pour  $K$  le cône sur  $Q$  issu de ce point (voir la figure 6). La démonstration se simplifie car si l'on applique aux arêtes singulières de  $K$  (qui sont hors de l'enlacement  $Q$ ) la modification de Kneser (celle du théorème 2 ; comme la lice a quatre points, on peut le faire en une seule fois !), le complexe  $K$  devient une sous-variété localement plate sauf au point de cône. On lui applique la modification de Kneser et l'on obtient la première démonstration de construction de surface de Seifert due à Frankl et Pontriaguine ([FP]) ; on remarquera qu'elle donne la même surface que l'algorithme de Seifert ([S]).



On a percé deux fenêtres dans la surface de Frankl-Pontriaguine du noeud de trèfle (pour voir ce qui se passe "à l'intérieur")

Figure 6. La construction de Frankl-Pontriaguine

## § 5. LA METHODE DE KNESER EN CODIMENSION DEUX

THEOREME 4. Soit  $K^n$  un sous-complexe fini, orienté, de dimension  $n$  d'une variété triangulée  $M^{n+2}$  de dimension  $n+2$ . On suppose que la  $n$ -chaîne  $\bar{K}$  à coefficients entiers définie par  $K$  est un cycle.

Alors, il y a une subdivision de  $M$  et un sous-complexe  $N$  de cette subdivision qui est une sous-variété, orientée, localement plate de  $M$ , homologue sur les entiers au cycle  $\bar{K}$ .

Démonstration. Elle est analogue à celle du théorème 2. Nous utilisons les mêmes notations. Remarquons que, puisque le complexe  $K_i$  est orienté, une orientation du simplexe  $\sigma_j$  ( $\in (K_i^{[n-i]})'$ ) détermine une orientation de la lice  $V_j = L(\sigma_j, K_i'')$ . Le corollaire du théorème 3 permet de construire une surface de Seifert orientée  $W_j$  pour  $V_j$ ; la suite de la démonstration est identique à celle du théorème 2.  $\square$

## § 6. RETOUR SUR LA DEMONSTRATION DU THEOREME DE ROHLIN

L'enchaînement des théorèmes 2, 3 et 4 semble être le début d'une récurrence pour lisser les cycles de toute codimension. On sait depuis Thom que ce rêve est impossible; il nous semble cependant intéressant de mettre en marche la "machine de Kneser" et de tirer des informations géométriques des faits qui la font caler: nous tenterons au paragraphe 7 une démonstration d'un théorème de Rohlin en codimension deux qui échouera, mais nous fournira un calcul du groupe de cobordisme  $\Omega_4$ .

Un argument du § 4 ne se généralisera pas, c'est l'utilisation du théorème de Wall. Ce paragraphe est consacré à l'étude du théorème de Wall, et à une version affaiblie du théorème de Rohlin n'utilisant pas le théorème de Wall; c'est cette version que nous généraliserons au § 7.

### 6.1. Une esquisse des arguments géométriques du théorème de Wall.

Par la théorie des immersions, Wall réduit son théorème au fait que si un noeud différentiable de codimension deux  $(S^{n+2}, \Sigma^n)$  est trivial dans la catégorie PL, il est trivial dans la catégorie différentiable ( $\Sigma^n$  est une variété différentiable PL isomorphe à la sphère  $S^n$  standard). Esquisons la démonstration que Wall donne de ce fait.

Par unicité des voisinages réguliers PL et le théorème de lissage de Hirsch,

un tube autour de  $\Sigma^n$  est difféomorphe à  $S^n \times D^2$  en position standard dans  $S^{n+2}$  ; en prenant une section du tube, on trouve  $\Sigma^n$  et  $S^n \times 1$  plongés dans  $S^n \times S^1$ . A l'aide d'une grande translation du revêtement infini cyclique  $S^n \times \mathbb{R}$ , on a deux relèvements disjoints de  $S^n$  et  $\Sigma^n$  dans  $S^n \times \mathbb{R}$  ; soit  $A$  la région compacte comprise dans  $S^n \times \mathbb{R}$  entre ces exemplaires de  $S^n$  et de  $\Sigma^n$ . En enroulant le revêtement infini cyclique autour de  $\Sigma^n$ , on peut voir  $A$  plongé dans  $S^n$  et former  $\Delta^{n+1} = \Sigma^n \times I \cup A \cup D^{n+1}$  un disque d'homotopie bordant  $\Sigma^n$  (voir la figure 7).

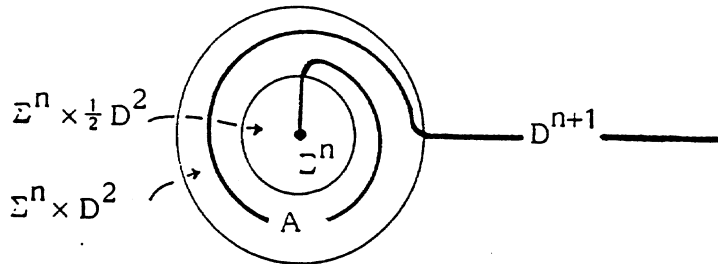


Figure 7 . L'enroulement de Wall

Si  $n \neq 3, 4$ , on conclut par le théorème de Schönflies <sup>(†)</sup> qui est vrai dans ces dimensions (élémentairement par Schönflies et Alexander pour  $n = 1, 2$ , et par la théorie des anses de Smale pour  $n \geq 5$ ). Wall traite les cas restants ( $n = 3$  est le plus difficile) par un brillant rétablissement qui utilise d'une manière essentielle la théorie des anses et le théorème de Cerf :  $\text{Diff}(S^3)$  est connexe.

Ce théorème utilise donc les résultats les plus profonds de la topologie différentielle et surtout est non élémentaire dans le sens suivant : bien que vrai en toute dimension, les arguments pour le prouver sont différents suivant les dimensions.

## 6.2. Le théorème de Rohlin implique le théorème de Wall.

Il est tout d'abord clair que l'affirmation du paragraphe 4 implique le théorème de Wall : Considérons  $V^{n+1}$  une surface de Seifert lisse pour le noeud  $(S^{n+2}, \Sigma^n)$ . Par l'affirmation,  $\Sigma^n$  borde un disque  $D^{n+1}$  qui est localement plat presque différentiable et égal à  $V$  près de  $\Sigma^n$  (donc près de son bord  $\Sigma^n$ , le disque  $D^{n+1}$  est une sous-variété lisse de  $S^{n+2}$ ). En appliquant le théorème de lissage en codimension 1 de Hirsch, il y a une isotopie presque différentiable fixe près du noeud  $\Sigma^n$  qui pousse  $D^{n+1}$  sur une sous-variété lisse de  $S^{n+2}$ . Il n'y a qu'une structure lisse sur un disque PL compatible avec la structure PL (grâce à la théorie d'obstruction

(†) Indiquons au lecteur l'exercice 5 où un autre lien entre le problème de Schönflies et les fibrés normaux en codimension deux est établi.



au lissage de Munkres, ou si l'on préfère au théorème de structure en produit de Hirsch). Le noeud  $\Sigma^n$  bordant un disque différentiable est donc trivial.

Voyons maintenant que la forme relative du théorème de Rohlin <sup>(†)</sup> implique le théorème de Wall.

Considérons  $(S^{n+2}, \Sigma^n) \times I$  l'épaissi du noeud  $(S^{n+2}, \Sigma^n)$ . Soit  $V$  une surface de Seifert lisse pour  $\Sigma^n$  et  $D$  un disque presque différentiable trivialisant le noeud PL. Près de  $S^{n+2} \times 0$ , considérons l'épaissi  $V \times [0, \epsilon]$  de  $V$  et près de  $S^{n+2} \times 1$  l'épaissi  $D \times (1-\epsilon, 1]$  de  $D$  et complétons sur la partie restante de  $S^{n+2} \times I$  par  $K$ , une homologie modulo  $\Sigma^n$  entre ces deux surfaces de Seifert. La forme relative du théorème de Rohlin nous donne une sous-variété localement plate  $W$  de  $S^{n+1} \times I$  de bord  $\partial W = V \times 0 \cup \Sigma^n \times I \cup D \times 1$ .

Soit  $(E, F)$  un voisinage régulier de  $\Sigma^n \times I$  dans la paire  $(S^{n+2} \times I, W)$ . Par existence de voisinage en collier de  $\Sigma^n \times I$  dans  $W$  et unicité de voisinage régulier de  $\Sigma^n \times I$  dans  $S^{n+2} \times I$ , la paire  $(E, F)$  est isomorphe à  $(\Sigma^n \times D^2 \times I, \Sigma^n \times I \times I)$ , et donc son "bord"  $(\partial E, F \cap \partial E) \cong (\Sigma^n \times D^2 \times I, \Sigma^n \times I)$  est une concordance entre  $\partial E_0 \cap V$  et  $\partial E_1 \cap D$  ( $E_i = E \cap S^{n+2} \times i$ ). En voyant  $E_0$  inclus dans  $\overset{\circ}{E}_1$ , on construit un disque  $D_1$  égal à  $V$  (donc lisse) sur  $E_0$  et égal à  $D$  hors de  $E_1$ . (Rappelons que par unicité de voisinage régulier,  $E_1 - \overset{\circ}{E}_0 \cong \partial E_0 \times I$ .) (voir la figure 8).

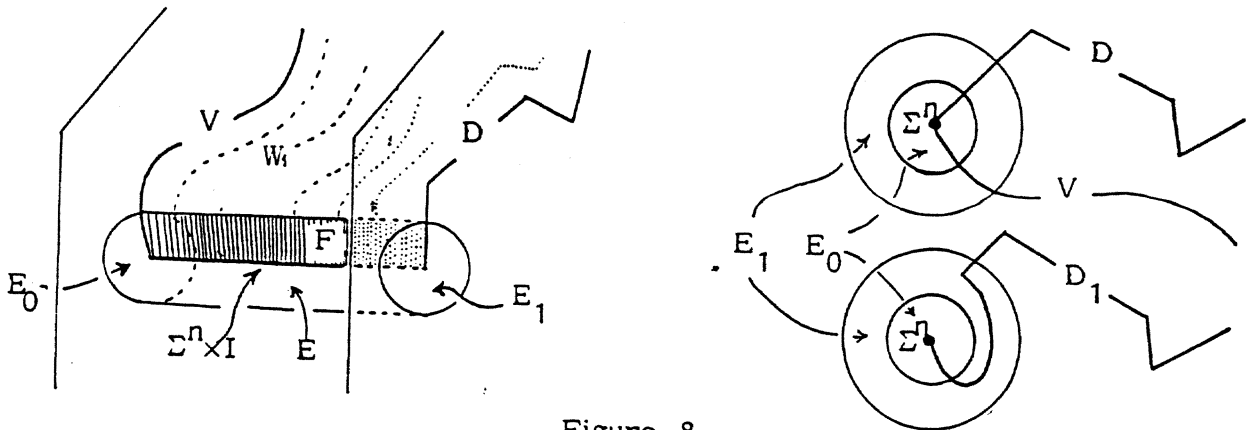


Figure 8

(†) On impose  $N = K$  près d'un sous-ensemble de  $K$  auprès duquel le complexe  $K$  est une sous-variété localement plate. Cette forme relative du théorème 3 a lieu comme pour les théorèmes 1 et 2 et pour exactement les mêmes raisons (voir la remarque clôturant le paragraphe 3).

La fin de la démonstration est identique à celle du premier paragraphe de 6.2. On a laissé au lecteur dans l'esquisse précédente le soin d'appliquer les théorèmes de triangulation de Whitehead pour les changements de catégorie implicites entre presque différentiable et linéaire par morceaux. Remarquons aussi que ces théorèmes de Whitehead, comme le théorème de lissage de Hirsch (corollaire du théorème de structure en produit) que l'on a utilisé ici, sont, contrairement aux arguments de Wall, élémentaires en notre sens.

Rappelons que Rohlin a énoncé son théorème en 1951 <sup>(†)</sup> et n'avait à sa disposition ni le théorème de Wall, ni surtout ce que Wall utilise ; malgré de nombreuses tentatives, nous ne sommes pas arrivés à donner de démonstration élémentaire du théorème de Rohlin (et par là même du théorème de Wall) <sup>(‡)</sup>. Nous allons élucider cette difficulté en prouvant de manière élémentaire une forme affaiblie du théorème de Wall au point suivant.

### 6.3. Une méthode de Kneser lisse.

Il s'agit de faire toutes les constructions pour avoir à effectuer les modifications de Kneser sur des paires de lices qui sont des paires de variétés  $C^\infty$  lisses car, dans la catégorie  $C^\infty$ , il y a existence et unicité des fibrés normaux (et ce élémentairement).

Pour cela, il faut modifier les hypothèses des théorèmes 1, 2 et 3, en demandant à la variété ambiante d'être  $C^\infty$  et aussi, pour le théorème 3, il faut que la sous-variété  $Q$  soit une sous-variété lisse. Le complexe  $K$  devra être un sous-complexe d'une triangulation  $C^\infty$  de  $M$  possédant une subdivision barycentrique pour laquelle les cellules duales sont des sous-variétés  $C^\infty$ . Ceci s'obtient relativement facilement

---

(†) Bien qu'il énonce son théorème en toute dimension, Rohlin ne l'utilise que pour un complexe de dimension quatre dans  $\mathbb{R}^5$  ; en ce cas, la démonstration de l'affirmation que l'on peut tirer du premier paragraphe de 6.2 et de 6.1 n'utilise que le théorème d'Alexander-Schönflies et n'est pas anachronique.

(‡) En suivant la machine de théorie des immersions dans l'article de Wall [W], le lecteur astucieux pourra par une double récurrence établir d'un seul coup les théorèmes de Rohlin et Wall, mais, du moins pour la récurrence que nous avons montée, elle s'appuie sur une faute de frappe dans l'article de Wall : les obstructions pour la théorie de lissage des sous-variétés de Haefliger sont dans  $H^i(M, \Gamma_{i-1}^2)$  pour existence et  $H^i(M, \Gamma_i^2)$  pour unicité et non, comme l'écrit Wall page 6,  $H^{i+1}(M, \Gamma_{i-1}^2)$  pour existence et  $H^i(M, \Gamma_{i-1}^2)$  pour unicité !

de la manière suivante : on munit la variété d'une métrique riemannienne  $C^\infty$  et l'on part d'une triangulation quelconque. Alors, il y a un  $\epsilon > 0$  dépendant de la triangulation de départ telle que la triangulation a des subdivisions arbitrairement fines dont tous les simplexes sont d'épaisseur <sup>(†)</sup> supérieur à  $\epsilon$ .

Soit  $K$  une telle subdivision et  $\sigma$  un simplexe de cette subdivision de sommets  $k_0, k_1, \dots, k_p$ . On note  $e(\sigma)$  l'ensemble des points à même distance de tous les  $k_i$  et plus près de chaque  $k_i$  que des autres sommets de  $K$ . Alors, si la subdivision  $K$  est suffisamment fine, les  $e(\sigma)$  sont des sous-variétés lisses isomorphes à un polyèdre convexe. Les  $e(\sigma)$  forment les cellules duales pour une subdivision de  $K$  isomorphe à la subdivision barycentrique. (Sans subdiviser, le résultat est encore vrai c'est un lemme célèbre de Munkres ([M] théorème 1.4).) On prendra alors pour lice  $L(\sigma, M)$  une sphère lisse située dans l'intérieur de  $e(\sigma)$  et se déformant radialement sur le bord de  $e(\sigma)$ .

On modifie la définition d'être singulier en codimension  $i+1$  en demandant à  $K_i$  d'être une sous-variété  $C^\infty$  hors du squelette de dimension  $n - (i+1)$  de  $K_i$ . On remarquera alors que pour tout simplexe  $\sigma_j$  de dimension  $n - (i+1)$ , la lice  $L(\sigma_j, K_i'')$  est l'intersection transverse de  $K - K^{[n-(i+1)]}$  avec  $L(\sigma_j, M'')$  et que, si l'on prend soin d'arrondir les coins de  $K_{i+1}$  situés en  $K_i \cap (\partial\sigma_j * L(\sigma_j, M'') - \partial\sigma_j)$ , le complexe  $K_{i+1}$  construit par la modification de Kneser est singulier en codimension  $i+2$ .

Nous laissons au lecteur courageux le soin de rédiger les modifications des arguments des paragraphes 1 à 5 suivant l'esquisse ci-dessus (c'est en vue de ces modifications que l'on a préféré la preuve écrite du théorème 3 à celle indiquée dans l'exercice 3a)).

Nous indiquerons dans l'exercice 4 comment, en utilisant des triangulations de Munkres, on peut bâtir "à la Kneser" la théorie d'Haefliger d'obstruction à lisser une sous-variété PL localement plate d'une variété lisse.

---

(†) C'est le rapport du diamètre sur la distance du barycentre au bord du simplexe.

§ 7. LA NON-TRIVIALITE DE  $\Omega_4$  FAIT ECHOUER UNE TENTATIVE DE  
DEMONSTRATION DU THEOREME DE ROHLIN EN CODIMENSION 2

Soit  $K^n$  un sous-complexe orienté de dimension  $n$  d'une variété lisse  $M^{n+2}$  de dimension  $n+2$  ; on suppose que le bord de la chaîne  $\bar{K}$  définie par les  $n$  simplexes orientés de  $K$  est une sous-variété lisse  $Q^{n-1}$  de  $M$ . Tentons de lisser  $K$  en suivant la méthode du paragraphe 4 modifiée comme indiqué dans le paragraphe précédent, pour que les paires de lices soient des paires de variétés  $C^\infty$ . On peut construire un complexe  $K_i$  lisse hors du  $n-(i+1)$  squelette de  $K$ , de bord  $Q$  et homologue modulo  $Q$  à  $K$ , et ce pour  $i = 0, 1, 2, 3$ . Pour  $i = 3$ , il faut utiliser dans la démonstration de l'affirmation que les deux sections du fibré normal à  $L(\sigma_j, Q)$ , une sphère de dimension deux dans  $L(\sigma_j, M)$  une sphère de dimension cinq, sont isotopes <sup>(†)</sup> car elles diffèrent par une application de  $S^2$  dans  $S^2$  nulle en homologie donc triviale en homotopie.

A l'étape suivante, les deux sections diffèrent par une application de  $S^3$  dans  $S^2$ . Or  $\pi_3(S^2)$  est infini cyclique, engendré par l'application de Hopf. Remarquons que le cylindre de l'application de Hopf est un plan projectif troué plongé dans la sphère  $S^6$  vue comme le joint de  $S^3$  et  $S^2$ , le bord est une sphère  $S^3$  non nouée. On peut donc remplacer le disque  $D$  par une somme connexe de plans projectifs troués.

Si la variété  $Q$  dont on était parti est de dimension quatre, on vient de voir qu'on peut lisser  $K$  hors du zéro squelette de  $Q$  et que, quitte à faire des sommes connexes avec des plans projectifs, on peut lisser  $K$ . On vient de donner pour le calcul du groupe de cobordisme orienté de dimension quatre, une démonstration analogue à celle que Rohlin a donnée pour le groupe de cobordisme orienté de dimension trois.

Remarque sur le rôle du § 6. Si on n'avait pas pris soin de travailler dans la catégorie lisse, on ne pouvait pas faire le dernier argument : Il n'y a pas unicité du fibré normal pour une sphère de dimension trois dans  $S^6$ .

Rappelons que le groupe (pour la somme connexe) des sphères différentiables

---

(†) Dès cette dimension, nous ne pouvons utiliser le théorème d'Haefliger et Wall d'unicité du fibré normal dans le domaine stable; on a déjà besoin ici des modifications du § 6.3. Nous verrons cependant dans l'exercice 6 que les arguments de 6.1 et 6.2 donnent l'unicité dans ce cas limite. A l'étape suivante, on ne peut s'en tirer, la non-unicité produit des noeuds différentiables non triviaux de  $S^3$  dans  $S^6$  (voir la remarque à la fin de ce paragraphe).

de dimension trois nouées dans  $S^6$  est isomorphe aux entiers. Soient  $S^3 \subset S^6$  et  $V$  une surface de Seifert pour ce noeud ; le fibré normal à  $V$  dans  $S^6$  est de dimension deux et a  $f \in H^2(V; \mathbb{Z})$  comme classe d'Euler. Alors, l'isomorphisme entre le groupe des noeuds et  $\mathbb{Z}$  est donné par :

$$[\partial V] \longmapsto \frac{\text{signature de } (V) - f \circ f}{8} \quad (\dagger)$$

Soit  $\partial V$  un noeud différentiable non trivial ; comme en codimension trois, il n'y a pas de noeud PL, le noeud  $\partial V$  borde un disque  $D$ . On interprète des colliers de  $\partial D$  dans  $D$  et  $\partial V$  dans  $V$  comme deux sections de deux fibrés PL normaux au noeud. S'il y avait unicité des fibrés normaux, on pourrait supposer que ces deux fibrés coïncident. Quitte alors à remplacer le disque  $D$  par une somme connexe  $V'$  de plans projectifs troués, plongés comme cylindre de l'application de Hopf (qui vérifie  $\text{signature}(V') = f' \circ f'$ ), on peut supposer que les deux sections (collier intérieur à  $V$  et  $V'$  respectivement) coïncident. L'argument de la démonstration du théorème 3 fournirait alors un cobordisme  $W$  entre  $V$  et  $V'$ , ce cobordisme étant en produit sur le bord ; donc :

$$\begin{cases} \text{signature}(V) = \text{signature}(V') \\ f \circ f = f' \circ f' \end{cases},$$

ce qui contredit l'hypothèse  $\text{signature}(V) - f \circ f \neq 0$ .

On a vérifié une fois de plus le "fait expérimental" suivant : Il faut passer par la catégorie différentiable pour montrer qu'une variété PL orientée de dimension quatre et de signature nulle borde une variété orientée de dimension cinq.

### EXERCICES

0) Faire fonctionner la méthode de Kneser pour les sous-complexes infinis, localement finis.

1) Soit  $M$  une variété triangulée.

a) Soit  $C^1$  un 1-cocycle à valeurs entières qui ne prend (sur chaque arête de la triangulation) que les valeurs  $-1, 0, 1$ . Soit  $N$  la réunion des cellules duales des arêtes  $\sigma$  telles que  $C^1(\sigma) \neq 0$ .

Prouver que  $N$  est une sous-variété combinatoire localement plate et normalement orientée de  $M$ .

Indication :  $C^1$  donne naissance à une unique application  $f: M \rightarrow S^1 = [0, 1] / \sim$  cellulaire et linéaire sur chaque simplexe de  $M$ . Remarquer alors que  $N = f^{-1}(\frac{1}{2})$ .

b) Soit  $C^1$  un 1-cocycle à valeurs dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Soit  $N$  défini comme en a).

Prouver que  $N$  est une sous-variété combinatoire localement plate de  $M$ .

---

(†) cf. les commentaires sur le 4e article, exercices.

Indication : Prouver que la restriction de  $C^1$  à chaque simplexe se relève un 1-cocycle à valeurs entières ne prenant que les valeurs  $-1, 0$  et  $1$ .

c) Soit  $C^1$  un 1-cocycle à valeurs entières sur  $M$ . Prouver qu'il y a une subdivision de  $M$  et un cocycle pour cette subdivision représentant la même classe de  $H^1(M; \mathbb{Z})$  que  $C^1$  et ne prenant que les valeurs  $-1, 0$  et  $1$ .

2)

a) Montrer que l'on peut, à partir du § 3, remplacer la condition "le complexe  $K$  est orienté et est un cycle" (relatif pour le théorème de Rohlin) par "chaque simplexe de dimension maximum  $n$  de  $K$  est muni d'une orientation normale telle que, pour tout simplexe  $\sigma$  de dimension  $n-1$  de  $K$ , la somme des orientations obtenue sur la lice  $L(\sigma, M)$  est nulle (dans le cas du théorème de Rohlin, nulle si  $\sigma \in K-Q$  et égale à  $1$  si  $\sigma \in Q$ , étant supposé que  $Q$  est muni d'une orientation normale).

Etablir ainsi la version cohomologique de la méthode de Kneser.

b) Donner une démonstration moderne des théorèmes prouvés dans l'exercice

2.a) (qui ne sont différents des théorèmes du texte que dans le cas où  $M$  est non orientable).

Indication : Utiliser la transversalité de Thom sur des applications de  $M$  dans  $\mathbb{R}P^\infty$ ,  $S^1$  et  $\mathbb{C}P^2$  représentant les éléments de  $H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ,  $H^1(M; \mathbb{Z})$ ,  $H^2(M; \mathbb{Z})$ .

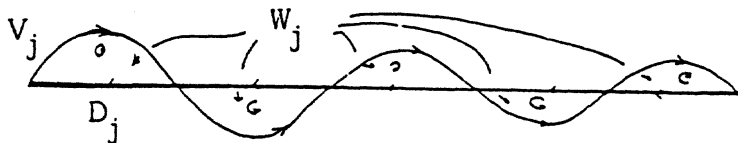
Trouver une "démonstration moderne" des théorèmes du texte quand  $M$  est non orientable.

3) a) Une autre démonstration du théorème de Rohlin.

a.1. Par les méthodes du § 3, se ramener au cas où, pour chaque simplexe  $\sigma_j$  de  $K^{[n-(i+1)]} \cap Q$ , la lice  $L(\sigma_j, K_1^{\parallel})$  est connexe et où il n'y a pas d'autres  $n-(i+1)$  simplexes singuliers.

a.2. Remplacer, dans l'affirmation du § 4, la condition "le disque  $D_j$  est égal à la variété  $V_j$  près du bord" par "le disque  $D_j$  est transverse à la variété  $V_j$ " et modifier la condition homologique pour qu'elle s'applique à cette situation.

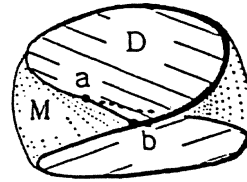
Prouver que  $D_j \cup V_j$  est le bord orienté d'une région  $W_j$  que cette réunion découpe. (Attention, les orientations des composantes de  $W_j$  ne sont pas compatibles avec une orientation ambiante.) La connexité de  $V_j$  est indispensable pour cet argument.



a.3. Prouver que  $K_{i+1} = (K_i - \bigcup_{i=1}^N \text{St}(\sigma_j, M''_1)) \bigcup_{i=1}^N (\partial\sigma_j * W_j) \bigcup_{i=1}^N (\sigma_j * D_j)$

a les propriétés requises.

b) Considérer le noeud torique trivial  $(2, 1)$  ;  
il borde un disque  $D$  et une bande de Möbius  $M$   
se coupant en un segment  $[a, b]$  (voir la figure).



Soit  $K^3$  le polyèdre borné, limité par  $D \cup M$  dans  $\mathbb{R}^3$ . On considère  $N^3 = K \cup_D$  cône sur  $D$  ;  $c$  est un polyèdre de dimension trois dont le bord, comme chaîne à coefficients  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , est un plan projectif  $M \cup$  cône sur  $(\partial M) \cong \mathbb{R}P^2$ .

b.1 (pour les illusionnistes). Prouver que la lice  $L(b, N^3)$  est un disque, en laissant supposer que "par symétrie" il en est de même pour  $L(a, N^3)$  ; "démontrer" que  $N^3$  est une variété combinatoire.

b.2. Demasquer l'illusionniste en montrant que  $L(a, N^3)$  est une bande de Möbius.

c) Utilisant ce phénomène et les idées de a), donner une preuve de ce que le groupe de cobordisme des surfaces est engendré par la classe du plan projectif  $\mathbb{R}P^2$ . Cette preuve n'utilise pas la classification des surfaces.

4) Soit  $N^n$  une sous-variété PL localement plate d'une variété  $C^\infty$ ,  $M^{n+q}$ . Toutes les triangulations ont les propriétés dégagées au §6 ("C $^\infty$  et à cellules duales sous-variétés  $C^\infty$ ") et triangulent  $N$  comme sous-complexe.

On suppose que hors du  $(n-c)$ -squelette de  $N$ , la sous-variété  $N$  est une sous-variété  $C^\infty$ .

a) Soit  $\sigma_j$  un  $n-c$  simplexe de  $N' \cap N^{[n-c]}$ . Prouver que la paire de lices  $(L(\sigma_j, M''), L(\sigma_j, N''))$  est un lissage du noeud standard PL  $(S^{n+q-c-1}, S^{n-c-1})$ . Prouver que la cochaîne qui associe à un  $n-i$  simplexe  $\sigma_j$  de  $N' \cap N^{[n-c]}$  la classe de concordance de ce lissage et 0 aux autres  $n-c$  simplexes de  $N'$  est une cochaîne (il faudra en particulier expliciter comment ses coefficients sont tordus).

b) Soit  $\sigma_k$  un  $n-(c-1)$  simplexe de  $N'$ . Prouver que, en modifiant la paire de sites  $(\text{St}(\sigma_k, M''), \text{St}(\sigma_k, N''))$  (qui est une paire de boules lisses standard  $(B^{n+q-c-1}, B^{n-c-1})$ ) par un lissage arbitraire (mais identité sur le bord), on peut modifier la cochaîne construite en a) par un cobord.

En déduire la théorie d'obstruction de Haefliger au lissage des sous-variétés PL d'une variété  $C^\infty$  ([H]).

c) Si on est en codimension un, les coefficients de la théorie d'obstruction sont nuls ; il est tentant d'essayer d'appliquer cette méthode concrète de lissage au cas où la sous-variété  $N$  a un bord qui est une sous-variété  $C^\infty$  de codimension 2, et en exigeant de ne pas bouger le bord  $N$  au cours du lissage (par les remarques du § 6, cela donnerait une démonstration élémentaire du théorème de Wall !).

Faire cette tentative et voir que, lorsque l'on fait la construction sur un simplexe de  $Q$ , on trouve comme obstruction une classe de concordance de disque de Seifert  $C^\infty$  du noeud trivial.

Dans l'exercice suivant, nous verrons que la nullité des classes d'isotopies des disques de Seifert lisses implique le théorème de Schönflies.

5) a) Par isotopie d'Alexandre, prouver qu'un isomorphisme PL  $h : S^{n+q} \rightarrow S^{n+q}$  tel que  $h|_{S^n} = \text{id}|_{S^n}$  est isotope à l'identité à travers des isomorphismes fixant  $S^n$  (se ramener au cas où  $h$  est l'identité au voisinage d'un point de  $S^n$ ).

b) Soient  $D_1^{n+1}$  et  $D_2^{n+1}$  deux disques de Seifert PL du noeud trivial  $(S^{n+2}, S^n)$ . Prouver qu'il y a un isomorphisme PL  $h : S^{n+2} \rightarrow S^{n+2}$  identité sur  $S^n$  et tel que  $h(D_1) = D_2$  (utiliser des colliers autour de  $D_1$  et  $D_2$  et l'unicité des disques de codimension zéro).

A partir de ce point, une démonstration en toute dimension, pour illusionnistes, du théorème de Schönflies.

c) Par le théorème de Wall d'unicité des fibrés normaux PL en codimension deux, se ramener au cas où l'isotopie  $h_t$ , découlant de b) et a), respecte un voisinage régulier  $E$  de  $S^n$ .

d) Soit  $F = S^{n+2} \times_{\mathbb{Z}_n} E$  et  $F_n$  le revêtement cyclique à  $n$  feuilles de  $F$ . Prouver qu'il y a un entier  $n$  et deux relevés du disque  $D_1$  dans  $F_n$ ,  $D_1$  et  $D_1'$ , tels que si  $h_{nt}$  est le relevé de l'isotopie construite en c), la trace de  $h_{nt}(D_1)$  ne coupe pas  $D_1' \times [0, 1]$ .

Soit dans  $F_n$  le relevé  $h_{n1}(D_1)$  de  $D_2$ . Par extension des isotopies, prouver que la région comprise entre  $h_{n1}(D_1)$  et  $D_1'$  est en produit.

En déduire que, dans le cas où  $D_1$  et  $D_2$  sont disjoints, la région qu'ils délimitent dans  $F$  est un disque.

e) Soit  $\varphi : S^n \rightarrow S^{n+1}$  un plongement PL localement plat. Voyant la sphère  $S^n$  comme la réunion des hémisphères nord  $D_+$  et sud  $D_-$ , déduire de ce qui précède une "démonstration" du théorème de Schönflies.



f) Démasquer l'illusionniste : on ne peut effectuer l'étape c) car Wall ne prouve pas l'unicité à un paramètre des fibrés normaux en codimension deux. Dans la catégorie différentiable, cette unicité a lieu. "Le théorème de Wall ne permet pas d'affirmer que, en codimension deux, les sous-variétés PL sont aussi bonnes que les sous-variétés lisses".

Question. Y a-t-il des contre-exemples à l'unicité à paramètres des fibrés normaux PL en codimension 2 ?

6) a) Toute section d'un fibré normal PL à une sphère  $S^2$  dans  $S^5$ , non enlacée avec la section nulle borde un disque (par la forme relative du théorème 4, lui faire border une surface de Seifert  $V$ . Sachant que  $\hat{V} = V \cup D^3$  borde une variété spin n'ayant que des anses d'indice 2, faire la chirurgie plongée sur  $V$  pour la transformer en un disque.)

b) Dédurre de 6.a), 5.a) et l'analogue de 5.b) en codimension trois, l'unicité des fibrés normaux à  $S^2$  dans  $S^5$ .

#### REFERENCES

- [FP] FRANKL F. und PONTRYAGIN L., Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie, Math. Ann. 102 (1930), p. 785-789.
- [H] HAEFLIGER A., Lissage des immersions II, à paraître (depuis 1967 !).
- [K] KNESER H., Ein Topologisches Zerlegungssatz, Proc. Royal Acad. Amsterdam, 27 (1924), p. 601-616.
- [M] MUNKRES J., Concordance is equivalent to smoothability; Topology 5 (1966), p. 371-389.
- [R] ROHLIN V.A., Toute variété de dimension trois borde une variété de dimension quatre, Dokl. Akad. Nauk SSSR 81 (1951), p. 355-357 (en russe) ; traduction dans ce volume.
- [S] SEIFERT H., Über das Geschlecht von Knoten, Math. Ann. 110 (1934), p. 571-592.
- [W] WALL C.T.C., Locally flat PL submanifolds with codimension two, Proc. Camb. Phil. Soc. 63 (1967), P. 5-8.

### III . SUR LE QUATRIEME ARTICLE

Dans cet article, Rohlin calcule le groupe de cobordisme orienté de dimension quatre  $\Omega_4$  (qui est engendré par la classe de  $\mathbb{C}P^2$  et isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , l'isomorphisme étant  $\varphi: \Omega_4 \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\varphi([M^4]) = \sigma(M) = \frac{X_{22}(M)}{3}$  ( $= \frac{\langle [M], P_1(M) \rangle}{3}$ )), et il utilise ce calcul pour corriger les deux premiers articles. Nous suivrons le plan de Rohlin : Au § 1, nous expliquerons comment Rohlin construit un cobordisme orienté d'une variété de dimension quatre quelconque à une somme connexe de plans projectifs complexes. Le § 2 est consacré au calcul du groupe de cobordisme non orienté des variétés de dimension quatre (Rohlin énonce un résultat faux qu'il a corrigé ultérieurement). Dans le § 3, nous expliquerons la correction des deux premiers articles et, en particulier, l'affirmation de Rohlin selon laquelle  $\Omega_4 = \mathbb{Z}$  implique que la composée de trois suspendues successives de l'application de Hopf est non nulle dans  $\pi_{n+3}(S^n)$ , contrairement à ce qui a été "démonstré" dans le premier article. Nous terminerons par une série d'exercices portant sur les quatre articles de Rohlin et indiquant comment on peut obtenir à l'aide des méthodes géométriques de Rohlin pratiquement tous les énoncés produits depuis 1951 et portant sur les différents types de cobordismes des variétés de dimension inférieure ou égale à quatre, les structures spins sur ces variétés et les corollaires qui en découlent en théorie des noeuds différentiables.

#### §1. CALCUL DU GROUPE DE COBORDISME ORIENTE $\Omega_4$ (§2 du texte)

Après avoir remarqué qu'il suffit de montrer que la classe de  $\mathbb{C}P^2$  est un générateur de  $\Omega_4$ , Rohlin considère une variété  $M^4$  orientée de dimension quatre et affirme :

A) Il existe une variété  $M_1^4$  cobordante à  $M$  et admettant un plongement dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^7$ .

En effet, un théorème de Whitney assure l'existence d'une immersion en position générale  $f: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^7$ . Nous avons vu dans les notes sur le troisième article que les cercles de points doubles de  $f(M^4)$  ont, dans  $M^4$ , des revêtements triviaux : des chirurgies rondes plongées d'indice un <sup>(†)</sup> fournissant un cobordisme de  $M$  à une sous-variété  $M_1$  de  $\mathbb{R}^7$ .

B) La deuxième étape consiste à montrer que : Une somme connexe  $M_2$  de la variété  $M_1$  avec des plans projectifs admet un plongement dans  $\mathbb{R}^7$  dont le fibré normal a une section partout non nulle.

La classe d'Euler du fibré normal à une sous-variété orientée d'un espace euclidien est nulle : le fibré normal à  $M_1^4$  dans  $\mathbb{R}^7$  a donc une section qui est non nulle sur le 3-squelette de  $M_1$ . L'obstruction à trouver une section non nulle définie sur tout  $M_1$  est un élément de  $\pi_3(S^2)$ . Ce dernier groupe est cyclique engendré par l'application de Hopf  $h: S^3 \rightarrow S^2$ . Il existe donc une section  $s$  du fibré normal à  $M_1$  dans  $\mathbb{R}^7$ , non nulle hors d'une réunion disjointe et finie de boules  $B_i$  de  $M_1$ , telle que l'obstruction à l'étendre en une section non nulle sur la boule  $B_i$  soit l'application de Hopf  $h$  ou son opposée  $-h$  : si  $B_i \times D^3$  est une carte, définie sur la boule  $B_i$ , d'un tube  $T_1$  autour de  $M_1$  dans  $\mathbb{R}^7$ , la section  $s$  est donnée sur  $\partial B_i$  par  $s(x) = (x, \pm h(x))$ . Le cylindre de l'application de Hopf (ou de son opposée) est homéomorphe au plan projectif troué (muni de l'orientation complexe ou de l'orientation opposée) et admet un plongement dans le bord du tube  $T_1$ , qui se recolle avec  $s(M_1 - \bigcup_{i=1}^N \overset{\circ}{B}_i)$  pour fournir la variété  $M_2$  cherchée. La variété  $M_2$  étant sous-variété du bord du tube  $T_1$ , son fibré normal a une section partout non nulle (un champ de vecteur extérieur à  $\partial T_1$  par exemple).

Voici quelques formules justifiant les affirmations précédentes. Si un point du plan projectif troué  $\mathbb{C}P_0^2$  est repéré par ses coordonnées homogènes  $[X_0, X_1, X_2]$  ( $|X_0|^2 \leq |X_1|^2 + |X_2|^2$ ), si la sphère  $S^3$  est la sphère unité de  $\mathbb{C}^2$  :

$S^3 = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |X_1|^2 + |X_2|^2 = 1\}$  et si la sphère  $S^2$  est la sphère de Gauss :  
 $S^2 = \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C}U^\infty$ , l'homéomorphisme entre le cylindre de l'application de Hopf,  
 $C(h) = S^3 \times [0, 1] \amalg S^2 / (x, 0) \sim h(x)$ , et le plan projectif troué  $\mathbb{C}P_0^2$  est donné par  
 $[(X_1, X_2), t] \mapsto [t, X_1, X_2] \quad ((X_1, X_2) \in S^3, t \in [0, 1])$ .

---

(†) Ce sont les modifications  $\mathcal{O}_2$  du troisième article.

Le plongement de  $\mathbb{C}P_0^2$  dans le bord du tube  $T_1$  est donné par

$$[X_0, X_1, X_2] \mapsto \left( \frac{2X_0X_1}{|X_0|^2 + |X_1|^2 + |X_2|^2}, \frac{2X_0X_2}{|X_0|^2 + |X_1|^2 + |X_2|^2}; X_1/X_2 \right)$$

où  $\left( \frac{2X_0X_1}{|X_0|^2 + |X_1|^2 + |X_2|^2}, \frac{2X_0X_2}{|X_0|^2 + |X_1|^2 + |X_2|^2} \right) \in B_i^4 = \{Y_1, Y_2 \in \mathbb{C}^2 \mid |Y_1|^2 + |Y_2|^2 \leq 1\}$

et  $X_1/X_2 \in \mathbb{C} \cup \infty = \mathbb{C}P^1 = S^2$ .

Il sera utile pour la suite de voir  $M_2$  comme un éclatement de  $M_1$ . Pour ceci, supposons que près du bord,  $\partial B_i \times S^2$ , de la carte  $B_i \times S^2$ , la section  $s$  est donnée par  $s(Y_1, Y_2) = (Y_1, Y_2; Y_1/Y_2)$ . Une équation de la variété  $M_2$  dans  $B_i \times S^2$  est

$$0 = f(Y_1, Y_2; Z) = Y_1 - ZY_2, \text{ ou si l'on préfère en coordonnées homogènes}$$

$$0 = F(Y_1, Y_2, [X_0, X_1]) = X_0Y_1 - X_1Y_2.$$

Suivant que la carte de la boule  $B_i$  est ou non dans l'orientation de la variété  $M_1$ , on obtient des modèles pour les cas où l'obstruction est l'application de Hopf  $h: S^3 \rightarrow S^2$ ,  $h(Y_1, Y_2) = Y_2/Y_1$ , ou son opposée.

C) La troisième étape consiste à construire dans le bord d'un tube  $T_2$  autour de  $M_2$  une sous-variété  $M_3$  difféomorphe à une somme connexe de  $M_2$  et de plans projectifs complexes et telle que sa classe fondamentale  $[M_3]$  soit nulle dans  $H_4(S^7 - \overset{\circ}{T}_2)$  l'homologie du complémentaire du tube  $T_2$  dans la sphère  $S^7 = \mathbb{R}^7 \cup \infty$ .

Supposons ceci réalisé, il existe alors une sous-variété orientée  $N^5$  de  $S^7 - \overset{\circ}{T}_2$  de bord  $M_3$ ; comme  $M_3$  est difféomorphe à une somme connexe de la variété  $M$  de départ et de plans projectifs complexes, ceci prouve que le groupe de cobordisme orienté de dimension quatre est engendré par le plan projectif complexe  $\mathbb{C}P^2$ . La variété  $N$  peut s'obtenir :

1) Soit en lissant par la méthode de Kneser une chaîne  $U_5$  de  $S^7 - \overset{\circ}{T}_2$  dont le bord homologique est la variété  $M_3$  ;

2) Soit par la méthode de Thom : il y a une application  $f: \partial T_2 \rightarrow \mathbb{C}P(n)$  transverse à  $\mathbb{C}P(n-1)$  et telle que  $f^{-1}(\mathbb{C}P(n-1)) = M_3$  <sup>(†)</sup>. Si  $X$  est le générateur de

---

(†) L'application  $f$  est la construction de Thom sur une application  $f_0: M_3 \rightarrow \mathbb{C}P(n-1)$  classifiant le fibré normal à  $M_3$  dans  $\partial T_2$  (rappelons que  $\mathbb{C}P(n)$ -pt est isomorphe à l'espace total du fibré canonique sur  $\mathbb{C}P(n-1)$  et donc  $\mathbb{C}P(n)$  est homéomorphe à l'espace de Thom de ce fibré.)

$H^2(\mathbb{C}P(n), \mathbb{Z})$ , la classe  $f^*(X) \in H^2(\partial T_2; \mathbb{Z})$  s'étend en une classe  $Y \in H^2(S^7 - \overset{\circ}{T}_2; \mathbb{Z})^{(\dagger)}$ . Si  $n$  est suffisamment grand ( $n \geq 3$  suffit ici), il y a une extension  $\varphi$  de  $f$  à  $S^7 - \overset{\circ}{T}_2$  telle que  $Y = \varphi^*(X)$ . On peut supposer  $\varphi$  transverse à  $\mathbb{C}P(n-1)$  et poser  $N = \varphi^{-1}(\mathbb{C}P(n-1))$ .

Il nous reste à expliquer la troisième étape.

Soit  $M_2^1$  un exemplaire de la variété  $M_2$  dans le bord du tube  $\partial T_2$  qui est l'image de  $M_2$  par une section partout non nulle. Notons  $\pi: \partial T_2 \rightarrow M_2$  la projection du tube.

AFFIRMATION 1. Il existe une surface orientée  $F^2$  dans  $M_2^4$  telle que le cycle  $M_2^1 \cup \pi^{-1}(F)$  soit nul en homologie dans  $S^7 - \overset{\circ}{T}_2$ . ( $\pi^{-1}(F)$  est orientée par l'orientation somme directe de celle de  $F$  et de celle du fibré normal à  $M_2^1$  dans  $\partial T_2$ ).

AFFIRMATION 2. Il existe une sous-variété  $M_3$  de  $\partial T_2$  homologue dans  $\partial T_2$  à  $M_2^1 \cup \pi^{-1}(F)$  et difféomorphe à une somme connexe de la variété  $M_2$  et de plans projectifs complexes. Plus précisément, il y a un ensemble fini  $\{m_1, \dots, m_p\}$  de points de  $M_2$  tel que  $\pi^{-1}(m_i) = \pi^{-1}(m_i) \cap M_3$  est une sphère d'auto-intersection  $\pm 1$  dans  $M_3$  et  $\pi: M_3 - \pi^{-1}(\{m_1, \dots, m_p\}) \rightarrow M_2 - \{m_1, \dots, m_p\}$  est un difféomorphisme.

Démonstration de l'affirmation 2.

a) L'idée est d'enrouler la section  $s$  autour de la surface  $F$  comme cela est suggéré dans la figure suivante.

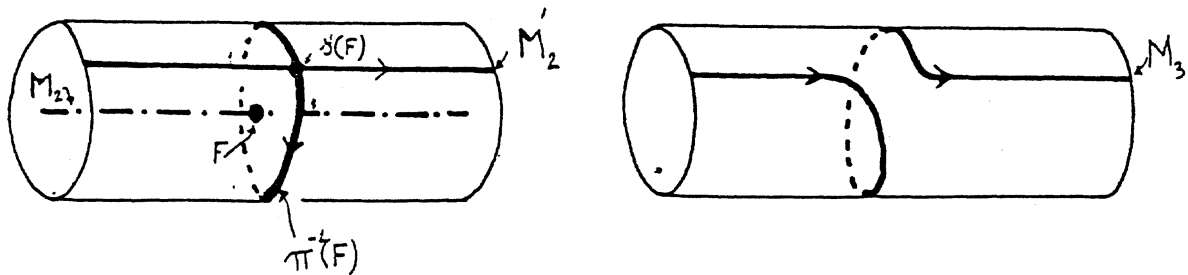


Figure 1: l'enroulement

(†) Cela découle de ce que, comme  $f^*(X)$  est dual pour Poincaré de  $[M_3] \in H_4(\partial T_2)$ ,  $Y$  sera le dual pour Poincaré de  $U_5 \in H_5(S^7 - \overset{\circ}{T}_2, \partial T_2; \mathbb{Z})$ , où  $U_5$  est une homologie à zéro de  $M_3$  dans  $S^7 - \overset{\circ}{T}_2$ .

Cette figure est quelque peu trompeuse car, sur la figure, la codimension de  $F$  dans  $M_2$  est un  $\mathbb{C}$ , et donc les fibrés normaux à  $s(F)$  dans  $s(M_2) = M_2^1$  et  $\pi^{-1}(F)$  sont triviaux. Ce n'est pas toujours le cas et les éclatements vont être imposés par le fait que ces deux fibrés normaux ne sont pas nécessairement isomorphes.

b) Commençons par introduire des modèles. Soit  $\nu$  le fibré normal à  $M_2^1 = s(M_2)$  dans  $\partial T_2$ , il est orienté. Considérons-le comme un fibré en droites complexes. Le tube  $T_2$  est une somme directe de  $\nu$  et d'un fibré trivial de dimension réelle un et le bord de  $T_2$  s'identifie au projectifié du fibré  $\nu$  :  $\partial T_2 - \{-s(M_2)\} \cong E(\nu)$  et  $\partial T_2 \cong E(\nu) \cup -s(M_2)$  où chaque fibre  $\pi^{-1}(m) \cong \mathbb{C}$  est compactifié en une sphère de Gauss par  $\infty_m = -s(m)$ . Pour les formules qui vont suivre, il vaut mieux introduire des coordonnées homogènes et voir  $\partial T_2$  comme le fibré en droites projectives complexe projectifié du fibré  $\nu \oplus \epsilon$  où  $\epsilon$  est un fibré complexe trivial de rang 1. Un point  $P$  de  $\partial T_2$  est représenté par ses coordonnées homogènes

$$[X_p, T_p] \quad \text{où} \quad \begin{cases} X_p \in E(\nu) \quad , \quad \nu(X_p) = p = \pi(P) \\ T_p \in E(\epsilon) \quad , \quad \epsilon(T_p) = p = \pi(P) \\ (X_p, T_p) \neq (0, 0) \\ \text{et } [X_p, T_p] = [X'_p, T'_p] \text{ si et seulement si il y a un } \lambda \in \mathbb{C} \\ \lambda \neq 0 \text{ tel que } X'_p = \lambda X_p \text{ et } T'_p = \lambda T_p \end{cases}$$

(on désigne par  $E(\xi)$  l'espace total d'un fibré  $\xi$ ).

Soit  $\mu$  le fibré normal à  $s(F)$  dans  $M_2^1$  lui aussi considéré comme un fibré en droites complexe induisant son orientation et supposons que son espace total est plongé dans  $M_2^1$  au moyen d'un tube autour de la surface  $s(F)$ . Sur  $E(\mu)$ , on a la restriction du fibré  $\nu$  et le fibré  $\mu^*(\mu)$ ; soit  $t$  la section canonique du fibré  $\mu^*(\mu)$ , elle est non nulle hors de la section nulle

$$(\mu^*(\mu) = \{(x, y) \in E(\mu) \times E(\mu) \mid \mu(x) = \mu(y)\}; t(x) = (x, x) \text{ ) .}$$

Par abus de notation, on désignera par  $\mu^*(\mu)$  un fibré sur  $M_2^1$  étendant  $\mu^*(\mu)$  et tel que la section canonique  $t$  s'étende en une section non nulle sur  $M_2^1 - s(F)$ .

c) En utilisant les notations précédentes, une équation du cycle  $s(M_2) \cup \pi^{-1}(F)$  est :

$$[X_p, T_p] \in s(M_2^1) \cup \pi^{-1}(F) \text{ si et seulement si } X_p \otimes t(p) = 0 \in \nu \otimes \mu^*(\mu) \text{ .}$$

Soit  $\epsilon$  une section du fibré  $\nu \otimes \mu^*(\mu)$ , transverse à la section nulle près de la surface  $F$  et à support dans un voisinage de  $F$ . La variété  $M_3$  cherchée est  $M_\epsilon$  d'équation :

$$[X_p, T_p] \in M_\epsilon \text{ si et seulement si } X_p \otimes t(p) = \epsilon(p) \otimes T_p \in \nu \otimes \mu^*(\mu) \\ (\cong (\nu \otimes \mu^*(\mu)) \otimes \epsilon) \text{ .}$$

Cette équation définit une sous-variété de  $\partial T_2$  telle que si  $\{m_1, \dots, m_p\}$  est l'ensemble des zéros de  $\epsilon$  sur  $F$ , la restriction  $\pi: M_3 - \pi^{-1}(\{m_1, \dots, m_p\}) \rightarrow M_2 - \{m_1, \dots, m_p\}$  est un isomorphisme et  $\pi^{-1}(m_i) = \pi^{-1}(m_i) \cap M_3$  est une sphère  $S_i$  d'auto-intersection  $\pm 1$  dans  $M_3$  <sup>(†)</sup>. La variété  $M_3$  est homologue à  $M_2' \cup s(F)$  car, quand  $t$  décrit  $[0, 1]$ ,  $M_{t\epsilon}$  balaye une homologie entre  $M_0 = M_2' \cup s(F)$  et  $M_\epsilon = M_3$ .  $\square$

#### Démonstration de l'affirmation 1.

Comme  $H_4(S^7) = 0$ , par position générale, il existe une chaîne polyédrale  $C$  telle que :

- 1) le bord homologique  $\partial C$  de  $C$  est  $M_2' = s(M_2)$  ;
- 2) près de son bord, la chaîne  $C$  est dans  $S^7 - \overset{\circ}{T}_2$  ;
- 3)  $C - \partial C$  est transverse au tube  $T_2$ .

Soit  $F$  une surface dans  $M_2$  homologue au cycle  $\Sigma = M_2 \cap (C - \partial C)$ . Le cycle  $\partial T_2 \cap (C - \partial C)$  ( $= \pi^{-1}(\Sigma)$  par la condition de transversalité 3)) est donc homologue dans  $\partial T_2$  à  $\pi^{-1}(F)$ . L'affirmation découle de ce que  $C - \overset{\circ}{T}_2$  est une chaîne de bord  $\partial T_2 \cap C = M_2' \cup (\partial T_2 \cap (C - \partial C))$ .  $\square$

---

(†) Si  $\pi(P) = p$  n'est pas dans  $F$ ,  $t(p)$  est non nul et l'équation définit un unique  $[X_p, T_p] \in \pi^{-1}(P)$ .

Si  $\pi(P) = p_0$  est dans  $F$ , soit  $u$  une coordonnée complexe pour  $F$  autour de  $p_0$  et  $v$  une coordonnée de fibre du fibré normal  $\mu$ . L'équation devient :  $Xv = \epsilon(u, v)T$ , où  $\epsilon$  est une fonction telle que, si  $\epsilon(u, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial u} \epsilon(u, 0)$  inversible (condition de transversalité), on a bien l'équation d'une variété lisse  $M_\epsilon$ . De plus, si  $v = 0$  et  $\epsilon(u, 0) = 0$ , on peut choisir les cartes de sorte que  $\epsilon(u, 0) = \epsilon u$  : " $M_3$  est un éclatement algébrique de  $M_2$ ". Le signe de l'auto-intersection du diviseur exceptionnel  $\pi^{-1}(u, 0)$  est  $-1$  ou  $+1$  suivant que la carte  $(u, v)$  est ou non dans l'orientation de  $M_3$ .

§2. CALCUL DU GROUPE DE COBORDISME NON-ORIENTE  $n_4$  (§3 du texte)

Le résultat que Rohlin énonce dans le §3 est faux : l'espace projectif réel  $\mathbb{R}P^4$  et le plan projectif complexe  $\mathbb{C}P^2$  sont indépendants dans  $n_4$  (ils sont détectés par les nombre de Stiefel-Whitney  $(w_1)^4$  et  $(w_2)^2$ ). Rohlin dévoile cette faute dans un article ultérieur (Homologies intrinsèques, Doklady 1953, 89 n° 5, p. 789-792) et y énonce le résultat correct :  $n_4$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , les générateurs étant  $\mathbb{R}P^4$  et  $\mathbb{C}P^2$ .

La démonstration devrait être la suivante : Soit  $M^4$  une variété de dimension quatre et  $P^3 \subset M^4$  une sous-variété duale de la première classe de Stiefel-Whitney. Soit  $s$  une section, transverse à la section nulle, du fibré normal à  $P$  dans  $M$  et soit  $S = s^{-1}(0)$ . Dans le cas où  $M = \mathbb{R}P^4$ , on peut prendre  $P = \mathbb{R}P^3$  et  $S = \mathbb{R}P^2$ ; comme  $\mathbb{R}P^2$  engendre le groupe  $n_2$  de cobordisme des variétés de dimension deux, on peut, quitte à rajouter cet exemple, supposer que  $S$  borde une variété de dimension trois  $G^3$ . La variété  $P$  est orientable (voir exercice n° I 0)), et donc le fibré normal à  $S$  dans  $P$  est le fibré d'orientation de  $S$  et  $s$  s'étend en le fibré d'orientation  $\nu$  de  $G^3$ . Le fibré normal à  $P^3$  dans  $M^4$  s'étend en un fibré  $\mu$  sur l'espace total de  $\nu$  qui, hors de  $G^3$ , est trivial. Collons l'espace total  $E(\mu)$  du fibré  $\mu$  à  $M^4 \times [0, 1]$ ; nous obtenons un cobordisme de  $M^4$  à  $M^4$  dont l'hypersurface caractéristique associée  $P'$  a un fibré normal trivial. Il ne reste plus qu'à utiliser le fait que  $P'$  borde une variété  $H^4$  orientable (d'après le 3e article) pour obtenir un cobordisme de  $M'$  à une variété orientable  $M''$  (voir la figure 2).

On vient en fait de répéter les arguments géométriques de la suite exacte de Rohlin :  $\Omega_n \rightarrow n_n \rightarrow \Omega_{n-1} \oplus n_{n-2}$ , où la deuxième flèche associe à la classe de  $M^n$  les classes de  $P^{n-1}$  duale de  $w_1(M)$  et de  $S^{n-2}$  l'auto-intersection de  $P$  dans  $M$  (la première flèche est l'oubli).

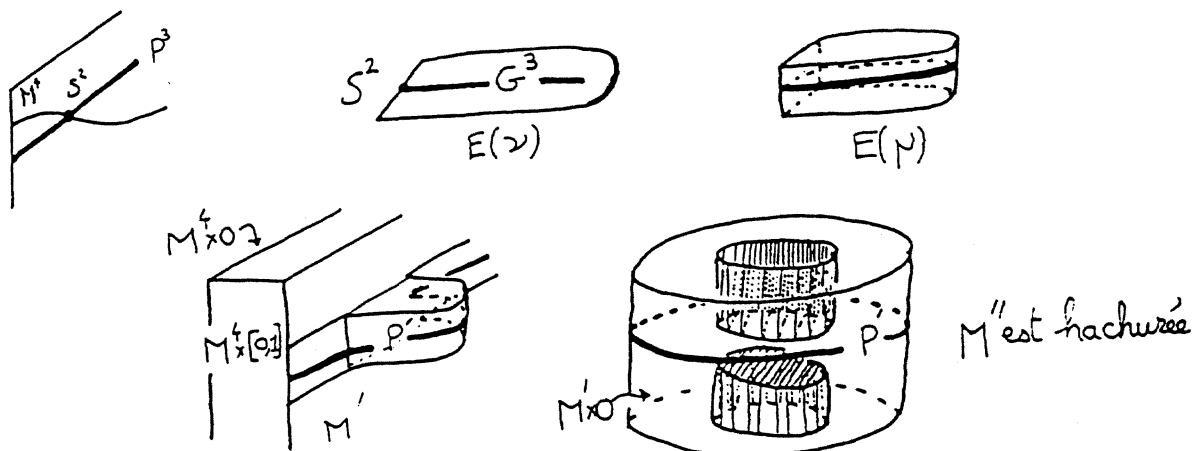


Figure 2



## §3. CORRECTION DES DEUX PREMIERS ARTICLES (§4 du texte).

A. Correction du premier article,  $h_n \neq 0$ .

Soit  $h_n$  la classe dans  $\pi_{n+3}(S^n)$  de la composée de trois suspensions successives de l'application de Hopf ( $n \geq 2$ ). Dans le premier article, Rohlin a montré que la nullité de  $h_n$  est équivalente à l'existence d'une variété orientée fermée  $Q^4$  telle que :

a) Il y a dans  $Q^4$  un tore  $T^2$  possédant un voisinage en produit  $E^4 = T^2 \times D^2$  tel que  $T^2$  est une surface caractéristique dans  $Q^4$  et reste surface caractéristique dans la variété obtenue en enlevant  $E^4$  de  $Q^4$  et en le recollant d'une manière différente.

b) Le nombre de Pontriaguine  $X_{22}(Q^4)$  est nul.

Rohlin remarque alors que, grâce au calcul de  $\Omega_4$ , la condition b) est équivalente à

b')  $Q^4$  est le bord d'une variété orientable  $N^5$ .

Le fait que  $h_n$  est non nul est donc réduit à l'affirmation suivante :

AFFIRMATION. Les conditions a) et b') sont contradictoires.

Démonstration de l'affirmation de Rohlin.

PROPOSITION. Il existe une sous-variété  $G^3$  de  $N^5$  telle que :

1) Le bord de  $G^3$  est le tore  $T^2$ .

2) Il y a sur le 2-squelette de  $N - G$ , une trivialisat[i]on du fibré tangent à  $N$  dont  $G$  est un cycle d'obstruction.

Démonstration de l'affirmation à l'aide de la proposition.

Par dualité de Poincaré, le noyau de  $H_1(T^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(G^3; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est de rang un. Soit  $C$  une courbe simple fermée dans le tore  $T^2$  dont la classe d'homologie modulo 2 engendre ce noyau et soit  $F \subset G^3$  une surface connexe de bord  $C$ . La restriction à  $F$  du fibré normal à  $G^3$  dans  $N^5$  a une section  $s$  partout non nulle <sup>(†)</sup>. Soit  $F'$  et  $C'$  les images de  $F$  et de  $C$  par cette section (on choisit la courbe  $C'$  dans  $T^2 \times S^1$ , le bord du tube  $E^4$  autour de  $T^2$  dans  $Q^4$ ). Soit  $\varphi$  un difféomorphisme de  $T^2 \times S^1$  tel que  $\varphi(* \times S^1) = C'$  <sup>(‡)</sup>.

(†) car la surface  $F$  a le type d'homotopie d'un complexe de dimension un.

(‡) Un tel difféomorphisme existe car la courbe  $C$  est isotop[e] à une courbe linéaire dans le 2-tore  $T^2$ ; la courbe  $C'$  sera alors isotop[e] à une courbe linéaire dans le 3-tore  $T^3 = T^2 \times S^1$ .

Dans la variété  $X^4 = Q^4 - \overset{\circ}{E}^4 \cup_{\varphi} E^4$ , le tore  $T^2$  n'est pas caractéristique car la trivialisaton de la restriction du fibré tangent à la courbe  $* \times \partial D^2$  s'étend à  $* \times D^2$  puisqu'elle s'étend à la surface  $F$ . Ceci contredit la condition a).  $\square$

Démonstration de la proposition. Puisque le tore  $T^2$  est caractéristique dans la variété  $Q^4$ , il y a au-dessus du 2-squelette de  $Q - T$  une trivialisaton  $t$  du fibré tangent stable de  $Q$  dont  $T$  réalise un cycle d'obstruction.

Soit  $K^3 \hookrightarrow N^5$  une chaîne modulo 2 de bord homologique  $T^2$ , obtenue comme cycle d'obstruction à étendre à  $N^5$  la trivialisaton  $t$ . Il s'agit de prouver que l'on peut prendre pour  $K^3$  une sous-variété  $G^3$  de  $N^5$ .

La chaîne  $K^3$  est en codimension deux mais à coefficient modulo 2. La méthode de Kneser en codimension deux ne peut s'appliquer brutalement car elle exige une chaîne orientée (à coefficients entiers). Cependant, les premières étapes de la méthode fonctionnent (car tant un nombre pair de points dans la sphère  $S^2$ , tant un enlacement dans la sphère  $S^3$  possèdent une surface de Seifert ; voir les notes sur la méthode de Kneser). Nous pouvons donc supposer que hors de son zéro squelette, le complexe  $K^3$  est une sous-variété. En connectant par un arbre tous les sommets près desquels  $K^3$  n'est pas une sous-variété, et en contractant cet arbre, on peut supposer qu'il n'y a qu'un seul point  $x_0$  de  $K^3$  près duquel  $K^3$  n'est pas une sous-variété.

La lice <sup>(†)</sup> de  $x_0$  dans  $K^3$  est alors une surface  $M^2$  sous-variété de la lice de  $x_0$  dans  $N^5$ , une sphère de dimension quatre. On peut supposer que la surface  $M^2$  est connexe : il suffit de rajouter à  $K^3$  des cônes issus de  $x_0$  sur des épaissis  $b_i$  dans  $L(x_0, N^5)$  d'arcs  $a_i$  joignant les composantes de  $M^2$  (voir la figure 3).

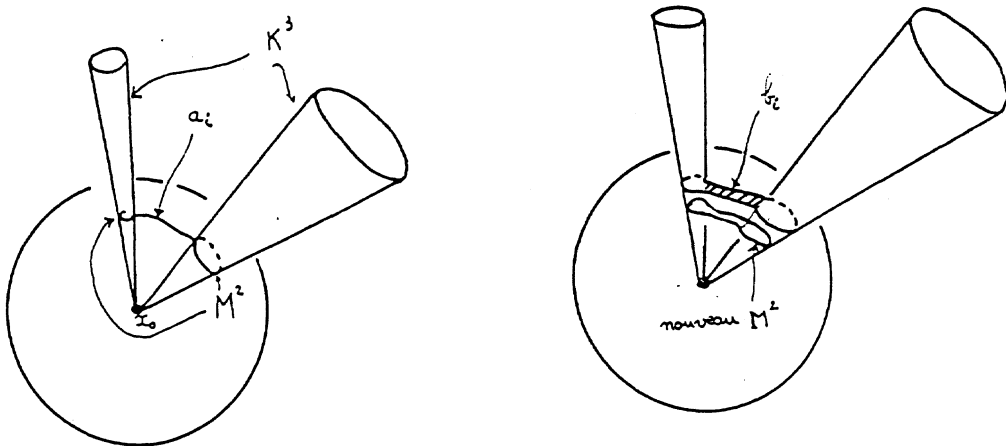


Figure 3 : Rendre la surface  $M$  connexe

(†) Lice est la traduction que l'on a donné du terme anglais "link" dans les notes sur la méthode de Kneser.

La sous-variété  $K^3 - L(x_0, K^3)$  réalise un cobordisme du tore  $T^2$  à la surface  $M^2$ ; on en déduit que l'auto-intersection de la surface  $M^2$  dans la sphère  $S^4 = L(x_0, N)$  est nulle. En ce cas, la surface  $M^2$  borde une surface de Seifert  $W^3$  dans  $S^4$ : on procède comme dans l'étape c) du calcul de  $\Omega_4$  effectué au §1<sup>(†)</sup>. Il suffit alors de poser  $G^3 = (K^3 - L(x_0, N)) \cup W$ . Le cône  $x_0 * W$  réalise l'homologie modulo 2 entre  $K^3$  et  $G^3$ .

B. Correction de la démonstration de l'égalité  $\pi_{n+3}(S^n) = \pi_{n+3}^0(S^n)$  [ $\pi_{n+3}^0(S^n)$  est l'image du J-homomorphisme  $J: \pi_3(SO(n)) \rightarrow \pi_{n+3}(S^n)$ ].

Dans le deuxième article, Rohlin a montré que toute variété stablement parallélisée de dimension trois,  $M^3$ , est cobordante, comme variété stablement parallélisée à une variété stablement parallélisée en produit  $P^2 \times S^1$  où  $P^2$  est une surface orientable<sup>(‡)</sup>.

AFFIRMATION. Une variété stablement parallélisée en produit  $P^2 \times S^1$  est cobordante comme variété stablement parallélisée à une union disjointe de tores  $T^3$ .

Démonstration. Soit  $N^3$  la trace d'une chirurgie d'indice zéro ou un sur  $P$  telle que, si elle est d'indice un, son cercle d'attachement sépare  $P$ . Alors, la parallélisation s'étend à l'âme de la chirurgie donc à  $N^3$ . Ceci permet de se ramener d'abord au cas où  $P$  est de genre supérieur ou égal à un, puis au cas où  $P$  est une union disjointe de tores.

(†) Pour l'enroulement, les dimensions sont celles que l'on voit sur la figure 1. Dans les formules qui suivent les fibrés réels de rang 1 remplacent les fibrés complexes de rang 1. Il faut remarquer de plus que, comme la sphère  $S^4$  est orientable, le fibré  $\nu \otimes \mu^*(\mu)$  est trivial et on peut choisir la section  $\epsilon$  sans zéros sur  $F^1$  (ici  $F^1$  est la courbe de la surface  $M^2$  autour de laquelle on veut enrouler). Pour le lissage, on utilise soit la méthode de Kneser à coefficients modulo 2, soit la méthode de Thom en utilisant  $\mathbb{R}P(n)$  au lieu de  $\mathbb{C}P(n)$  (il faut  $n \geq 4$  ici).

(‡) Esquissons l'argument:  $M^3$  est bord d'une variété simplement connexe  $Q^4$  (car  $\tau_3 = 0$ ). La deuxième classe de Stiefel-Whitney  $w_2(Q^4)$  est représentée par une surface orientable  $P^2$  (car comme  $H_1(Q^4) = 0$ , la réduction modulo 2  $\rho: H^2(Q^4; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(Q^4; \mathbb{Z}/2$  est surjective). En faisant des sommes connexes de paires de  $(Q^4, P^2)$  avec des  $(\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1)$ , on peut supposer que  $P^2$  a un voisinage en produit  $E^4 \cong P^2 \times D^2$ . La variété stablement parallélisée  $Q^4 - E^4$  fournit le cobordisme cherché.

Démonstration de l'égalité  $\pi_{n+3}(S^n) = \pi_{n+3}^0(S^n)$  .

Elle se réduit aux deux lemmes suivants :

LEMME 1. Si  $h_n \in \pi_{n+3}(S^n)$  est la composée de trois suspensions successives de l'application de Hopf,  $h_n \in \pi_{n+3}^0(S^n)$  .

LEMME 2. Modulo  $\pi_{n+3}^0(S^n)$  , toute parallélisation stable du tore  $T^3$  est congrue à la parallélisation triviale ou à  $h_n$  .

Démonstration des lemmes 1 et 2. On remarque tout d'abord que deux parallélisations stables sur une variété  $M^3$  connexe qui coïncident sur le 1-squelette de  $M^3$  sont homotopes dans le complémentaire d'une boule de  $M^3$  (car  $\pi_2(SO(n)) = 0$ ) ; elles diffèrent donc par un élément de  $\pi_3(SO(n))$  , les éléments de  $\pi_{n+3}(S^n)$  qu'elles définissent sont donc congrus modulo  $\pi_{n+3}^0(S^n)$  .

Ceci suffit à établir le lemme 2, car, si la restriction à l'un des facteurs de  $T^3$  de la parallélisation stable est triviale, la parallélisation est congrue modulo  $\pi_{n+3}^0(S^n)$  à une parallélisation qui s'étend au tore solide  $T^2 \times D^2$  correspondant ; sinon la parallélisation est congrue modulo  $\pi_{n+3}^0(S^n)$  à  $h_n$  .  $\square$

Pour établir le lemme 1 , il suffit de considérer la variété  $M_1^4$  du deuxième article. Cette variété contient un tore caractéristique  $T^2$  ayant un voisinage en produit  $T^2 \times D^2$  ; il suffit de remarquer que la restriction à chacun des facteurs du tore  $T^3 = \partial(T^2 \times D^2)$  d'une parallélisation stable définie sur  $M_1^4 - T^2$  est non triviale. Pour le troisième facteur, c'est parce que le tore  $T^2$  est caractéristique ; pour les deux autres, cela se voit sur le modèle que nous avons proposé pour  $M_1^4$  à l'appendice D des commentaires sur le premier article :  $M_1^4$  est l'éclaté  $\widehat{\mathbb{C}P^2}$  de  $\mathbb{C}P^2$  en neuf points fixes d'un pinceau  $C_t$  de cubiques ; le tore  $T^2$  est l'image directe  $\widehat{C}_0$  de  $C_0$  une cubique lisse du pinceau. Une base de l'homologie du tore  $T^2$  est représentée par des cycles évanescents, ils bordent donc dans  $M_1^4$  des disques qui ont une auto-intersection  $-1$  si on les pousse par un champ de vecteurs qui, sur le bord, est tangent au tore  $T^2$  : la parallélisation stable induite sur les deux premiers facteurs de  $T^3$  est aussi non triviale et  $h_n$  est congrue modulo  $\pi_{n+3}^0(S^n)$  à cette parallélisation stable de  $T^3$  , qui est nulle car elle s'étend à  $M_1^4 - \widehat{T^2 \times D^2}$  .  $\square$

## EXERCICES

### I. LES GROUPES DE COBORDISMES $\Omega_4, \Omega_3, n_3$ .

0) Soit  $M^n$  une variété de dimension  $n$ ,  $V^{n-1}$  une sous-variété duale de  $w_1(M)$ , prouver que  $V$  est orientable. [Indication : sinon le fibré  $\nu$  normal à  $V$  dans  $M$  serait le fibré d'orientation (pourquoi ?) et  $M = (M - \widehat{E(\nu)}) \cup E(\nu)$  serait orientable.]

Ce résultat dû à Rohlin se trouve dans l'article "Le plongement d'une variété de dimension 3 non orientable dans un espace euclidien de dimension 5", Dokl. Akad. Nauk. SSSR 160 (1965), pp. 549-551 (en russe) ; traduction anglaise Sov. Math. Dokl. 6 (1965), pp. 153-156. Cet article est splendide surtout si on le compare à la seule alternative existant dans la littérature pour plonger dans  $\mathbb{R}^5$  une variété de dimension 3 non orientable (cette alternative de Wall utilise la suite spectrale d'Adams !). Il est bien dommage que cet article soit méconnu. (Il semble que pour le critique des Math. Reviews, un isomorphisme de fibré est l'identité sur la base, alors que Rohlin permet, dans cet article, n'importe quel difféomorphisme sur la base.)

1) Donner une démonstration de  $\Omega_3 = 0$  en s'inspirant des méthodes du 4e article.

Deux possibilités :

a) Plonger  $M^3$  dans  $\mathbb{R}^6$  et enrouler une section du fibré normal autour de cercles pour la faire border homologiquement (puis géométriquement) dans le complémentaire de  $M$  dans  $S^6$  (on évite ainsi les modifications  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$ ).

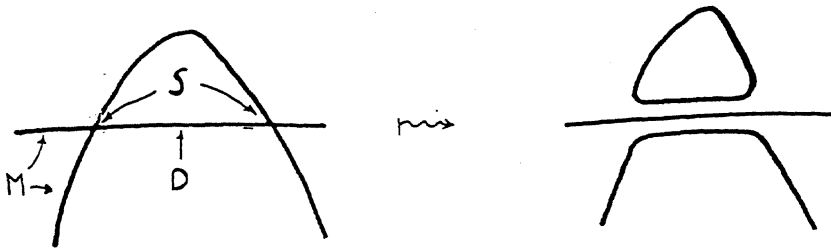
b) Soit,  $M^3$  étant plongée dans  $\mathbb{R}^5$ , enrouler une section du fibré normal pour la faire border homologiquement dans le complémentaire de  $M$  dans  $S^5$ .

2) Variantes de  $\Omega_4 = \mathbb{Z}$ . Il s'agit de se passer de l'opération de chirurgie ronde  $\Theta_2$ .

a) Plonger  $M$  dans  $\mathbb{R}^8$ . Par enroulement sur des cercles, trouver une section qui borde homologiquement dans le complémentaire de  $M$  dans  $S^8$ . Lisser une homologie hors de son 0-squelette par la méthode de Kneser en utilisant que toute variété orientable de dimension  $i$  dans  $S^{3+i}$ ,  $0 \leq i \leq 3$ , borde une surface de Seifert orientable. On arrive à un cobordisme de  $M$  à une variété qui se plonge dans  $S^7$ . Continuer comme Rohlin le fait dans le 4e ou le 3e article (voir le dernier paragraphe des notes sur la méthode de Kneser).

b) (d'après Melvin) Si  $M$ , simplement connexe, est immergée dans  $\mathbb{R}^7$ , prouver qu'un cercle  $C$  de points doubles borde un disque  $D$  dans  $M^4$  disjoint des

autres cercles de points doubles. Eliminer alors les points doubles de  $C$  par une chirurgie plongée d'indice deux :



3) Le groupe de cobordisme non orientable  $n_3$  est nul.

a) Démontrer qu'une variété non orientable de dimension 3 borde par un argument de suite exacte de Rohlin.

b) Démonstration collant aux méthodes des 3e et 4e articles.

b.1) Montrer que toute variété de dimension 3 est cobordante à une variété  $M$  plongée dans  $\mathbb{R}^5$  (pour éliminer les points doubles d'une immersion en position générale, seul un cas nouveau apparaît : cercle de points doubles à revêtement trivial, chacune des composantes ayant un voisinage non orientable dans la variété de départ).

b.2) Prouver qu'il y a un cercle  $C$  plongé dans  $M$  hors duquel le fibré normal à  $M$  a une section non nulle, l'obstruction à étendre cette section à un disque transverse au cercle  $C$  étant  $\pm 2 \in \pi_1(SO(2))$ .

b.3) Eclater  $M$  le long du cercle  $C$  pour trouver une variété  $M_1$  plongée dans  $\mathbb{R}^5$  dont le fibré normal à une section partout non nulle, la variété  $M_1$  étant cobordante à  $M \cup V$  où  $V$  est l'espace total d'un fibré en plans projectifs réels sur le cercle. Prouver qu'un tel fibré est toujours trivial, donc  $V \approx S^1 \times \mathbb{R}P^2 = \partial(D^2 \times \mathbb{R}P^2)$ . Opérer alors sur  $M_1$  comme dans l'exercice 1.b) (mais en utilisant l'homologie modulo 2).

Remarque : Il semble nécessaire d'opérer ainsi car la méthode de Kneser à bord ne fonctionne pas dans le cas non orientable.

## II. LE GROUPE DE COBORDISME $\Omega_3^{\text{Spin}}$ DES VARIÉTÉS DE DIMENSION 3 MUNITES D'UNE STRUCTURE SPIN EST NUL.

La nullité du groupe de cobordisme spin en dimension 3 est équivalente à la surjectivité du  $J$ -homomorphisme  $J : \pi_3(SO(n)) \rightarrow \pi_{n+3}(S^n)$  pour  $n \geq 3$  (dans la terminologie de Rohlin,  $\pi_{n+3}(S^n) = \pi_{n+3}^0(S^n)$ ). Rohlin a montré ce fait dans le 2e article

(corrigé par le 4e article). Les exercices suivants permettent de voir ce résultat plus directement en suivant la démonstration du 3e article.

1) a) Soit  $M^3$  une variété de dimension 3 munie d'une structure spin  $s$ . Montrer que l'on peut choisir l'immersion de  $M$  dans  $\mathbb{R}^5$  de façon à ce que la variété plongée  $M_1$ , se déduisant de  $M$  par les opérations  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$ , possède une structure spin  $s_1$  telle que  $(M_1, s_1)$  est spin cobordante à  $(M, s)$  (immerger  $M \times D^2$  dans la structure spin donnée).

b) Remarquer que si une variété  $M^3$  est plongée dans  $\mathbb{R}^5$ , le nul cobordisme construit dans le 3e article est une variété spin (mais la structure spin induite sur le bord peut être différente de la structure spin donnée !).

c) Soient  $s$  et  $s'$  deux structures spin sur une variété  $M$  de dimension 3. Prouver que la variété spin  $(M, s) \amalg (M, -s')$  est spin cobordante à  $(F \times S^1, s'')$  où  $F \times S^1$  est l'espace total d'un  $S^1$  fibré sur une surface  $F$  d'espace total orientable et de classe d'Euler nulle.

Prouver que : (i)  $(F \times S^1, s'') \amalg (\mathbb{R}P^2 \times S^1, s''')$  est spin cobordante à une union de  $(\mathbb{R}P^2 \times S^1, s''')$  ;

(ii)  $\mathbb{R}P^2 \times S^1$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$  la somme connexe de deux exemplaires de  $\mathbb{R}P^3$  ;

(iii) toute structure spin sur  $\mathbb{R}P^3$  borde (un fibré sur la sphère  $S^2$  de classe d'Euler  $\pm 2$  suivant la structure).

Conclure que  $\Omega_3^{\text{Spin}} = 0$ .

2) a) Soit  $M$  un sous-fibré non orientable d'un fibré trivial  $S^1 \times D^2$  sur le cercle. Soit  $M'$  le fibré orthogonal. Soit  $f: S^1 \times D^2 \rightarrow S^1 \times D^2$  le difféomorphisme qui, en identifiant  $S^1 \times D^2$  à  $M \oplus M'$ , s'écrit  $\text{id} \oplus -\text{id}$ .

a.1) Prouver qu'il y a un entier  $n$  tel que le difféomorphisme  $f$  soit isotope à  $(z, t) \mapsto (z, z^{2n+1} t)$ .

a.2) En déduire qu'un difféomorphisme de  $\mathbb{R}P^3$  de degré  $-1$  échange les deux structures spin de  $\mathbb{R}P^3$  (il faudra d'abord définir l'image d'une structure spin par un difféomorphisme, préservant ou non l'orientation).

b) Donner une démonstration par l'absurde de a.2) (construire une variété spin de dimension 4 de signature  $\pm 2$ ).

### III. INJECTIVITE DE L'OUBLI $\Omega_4^{\text{Spin}} \rightarrow \Omega_4$ .

Soit  $M$  une variété de dimension 4 munie d'une structure spin et de signature nulle.

a) Prouver qu'il y a une variété  $M_1$  de dimension quatre, simplement connexe, spin cobordante à  $M$  et plongée dans  $\mathbb{R}^7$ .

b) i) Prouver que le fibré normal à  $M_1$  dans  $\mathbb{R}^7$  a une section partout non nulle. [Indication : considérer sa première classe de Pontriaguine.]

Soit  $E$  un tube autour de  $M_1$  dans  $\mathbb{R}^7$ .

ii) Prouver qu'il y a une section  $s$  du fibré normal dont l'image est dans  $\partial E$ , qui borde homologiquement dans le complémentaire  $\overset{\circ}{E}$  et dont l'auto-intersection géométrique dans  $\partial E$  consiste en deux exemplaires parallèles  $F_0$  et  $F_1$  d'une surface  $F$  d'auto-intersection nulle dans  $M_1$ . [Indication : enrrouler une section donnée par b.i) autour d'une surface  $G \subset M_1$ , prouver que  $M_1$  spin entraîne que  $[G]$  est un double dans  $H^2(M; \mathbb{Z})$ , utiliser que la signature de  $M_1$  est nulle pour conclure que l'auto-intersection de  $G$  dans  $M_1$  est nulle.]

c) Soit  $W^5$  une surface de Seifert bordant  $s(M_1)$  dans  $\mathbb{R}^7$  et  $\tilde{G}^3$  l'auto-intersection de  $W$  dans  $\mathbb{R}^7$  :  $\tilde{G}$  est orientable et  $\partial \tilde{G} = F_0 \cup F_1$ . Soit  $G$  obtenue en collant  $F_0$  à  $F_1$  par l'"identité" ; attention !  $G$  n'est pas orientable.

1) Montrer que  $M_1$  est spin cobordante au bord  $\partial \xi_G$  d'un fibré en disque  $\xi_G$  sur  $G$ .

2) Construire un cobordisme  $V$  de  $G$  à  $H$  tel que :

- i) le fibré  $\xi_G$  s'étend en un fibré  $\xi_V$  dont la restriction à  $H$  est triviale.
- ii) la structure spin sur le bord de  $\xi_G$  s'étend en une structure spin sur le bord de  $\xi_V$  : elle induit donc une structure spin sur  $\partial \xi_H = H \times S^1$  qui est spin cobordante à la structure de départ.

Construire une variété spin  $K^4$  de bord  $H$  telle que la structure spin sur  $H \times S^1$  s'étende à  $K \times S^1$ .

d) Procéder abstraitement.

Soit  $Q^5$  une variété bordant  $M^4$  (car signature  $(M^4) = 0$ ). Construire une chaîne polyédrale  $G^3$  dans  $Q^5$  représentant  $w_2(Q^5)$ . Appliquer la méthode de Kneser comme dans la proposition de 3. A pour lisser  $G^3$ , prouver que le  $w_1(G^3)$  est représenté par une surface  $F$  orientable à fibré normal trivial dans  $G^3$ , continuer alors comme en c).



IV. CONTROLE DES ECLATEMENTS, THEOREME DE HAEFLIGER-BOECHAT, NOEUDS DE  $S^3$  DANS  $S^6$ .

1) Soit  $M^4$  une sous-variété de dimension 4 de  $\mathbb{R}^7$ . Soit  $s$  une section de son fibré normal non nulle dans le complémentaire d'un point  $x_0$ ; soit  $\xi$  le fibré de rang 2 défini dans le complémentaire de  $x_0$  comme supplémentaire de la section  $s$ ; soit enfin  $F$  une surface représentant la classe d'Euler de  $\xi$ .

a) Prouver que  $F$  est un cycle caractéristique de  $M$  ( $[F]_2 = w_2(M) \in H^2(M; \mathbb{Z}); [F]$  la réduction modulo 2 de  $[F] \in H^2(M; \mathbb{Z})$ ).

b) Prouver que l'obstruction à étendre  $s$  en une section partout non nulle est  $-\frac{F \cdot F + 3\sigma(M)}{4} \in \mathbb{Z} = \pi_3(S^2)$ . L'éclatement consiste alors à faire la somme connexe avec  $\frac{F \cdot F + 3\sigma(M)}{4}$  plans projectifs complexes avec l'orientation opposée : la signature de la variété éclatée est  $\frac{\sigma(M) - F \cdot F}{4}$ . [Indication : calculer la première classe de Pontraguine du fibré normal à  $M$ .]

c) Prouver que si on avait enroulé la section  $s$  autour d'une surface disjointe de  $x_0$  et représentant une classe  $X \in H^2(M; \mathbb{Z})$ , il aurait fallu éclater  $F \cdot X + X^2$  points (la signature devient :  $\frac{\sigma(M) - F \cdot F - 4F \cdot X - 4X \cdot X}{4} = \frac{\sigma(M) - (F + 2X)^2}{4}$ )

Prouver que la classe d'Euler du fibré normal à la section éclatée est  $F + 2X - \mathbb{Z}$  "diviseurs exceptionnels".

2) Théorème de Haefliger-Boechat.

a) Dédire de 1) que si  $M$  admet un plongement dans  $\mathbb{R}^7$ , il y a une surface caractéristique  $F \in H^2(M; \mathbb{Z})$  telle que :  $F \cdot F =$  signature de  $M$ .

b) Réciproquement, si  $M^4$  simplement connexe possède une surface caractéristique  $F$  telle que  $F \cdot F =$  signature de  $M$ , prouver que  $M$  admet un plongement dans  $\mathbb{R}^7$  : Soit  $\xi$  le fibré de rang 2 sur  $M$  de classe d'Euler  $F$  et  $\nu$  le fibré de rang 3 obtenu en tordant  $\xi \oplus \epsilon$  de  $-\sigma(M) \in \mathbb{Z} = \pi_3(S^2) = P_*(\pi_3(SO(3)))$  ( $P : SO(3) \rightarrow S^2$  est l'évaluation sur le premier vecteur de base).

b.1) Prouver que l'espace total  $E(\nu)$  de  $\nu$  est parallélisable et qu'il y a une application  $f : (E(\nu), \partial(E(\nu))) \rightarrow (S^4 \times D^3, S^4 \times S^2)$  de degré un (pour la deuxième projection, utiliser la construction de Thom sur le fibré normal à une "section éclatée" obtenue à partir de la section  $(0, 1)$  de  $\nu$  sur le complémentaire de  $\sigma$  points dans  $M$  (où  $\nu \cong \xi \oplus \epsilon$ )).

b.2) Ajouter  $k = \text{rg } H_2(M)$  anses d'indice 3 pour obtenir une équivalence d'homotopie  $\varphi : V^7 = (E(\nu) \bigcup_{i=1}^k D^3 \times D^4, \partial) \rightarrow (S^4 \times D^3, \partial)$ . Prouver que  $V^7$  est difféomorphe à  $S^4 \times D^3$ . Conclure.

3) Noeuds différentiables de  $S^3$  dans  $S^6$ .

Soit un noeud formé par une sphère  $S^3$  plongée différemment dans  $S^6$ .

i) Prouver qu'il y a une surface de Seifert  $V^4$  pour ce noeud et qu'après d'éventuelles sommes connexes avec le cylindre de l'application de Hopf ou de son opposée, deux telles surfaces de Seifert sont cobordantes.

ii) Soit  $F$  la classe d'Euler du fibré normal à  $V^4$  dans  $S^6$ . Prouver que  $\frac{\text{signature de } V - F \cdot F}{8} \in \mathbb{Z}$  est un invariant qui ne dépend que du noeud et que tous les entiers sont réalisés. (Pour la réalisation, utiliser une immersion générique de l'espace total d'un fibré en disque de classe d'Euler 3 sur le plan projectif troué  $\mathbb{C}P^2_0$ ; comme  $\mathbb{C}P^2_0$  est l'espace total d'un fibré en disque sur la sphère  $S^2$ , une immersion générique est un plongement.)

iii) Prouver qu'un noeud d'invariant zéro est trivial. [Faire la chirurgie plongée sur une surface de Seifert simplement connexe, de signature nulle, en remarquant que l'on peut choisir, pour  $V$ , une somme connexe de plans projectifs  $V = \#_n \mathbb{C}P^2 \#_n -\mathbb{C}P^2$  tels que la classe  $F$  soit une classe diagonale (c'est une conséquence des théorèmes de Wall : 1) Il existe  $m, n$  tels que  $V \#_m \mathbb{C}P^2 \#_n -\mathbb{C}P^2$  est difféomorphe à  $\#_k \mathbb{C}P^2 \#_l -\mathbb{C}P^2$ .

2) le groupe des difféomorphismes de  $V = \#_p \mathbb{C}P^2 \#_p -\mathbb{C}P^2$  est transitif sur les éléments primitifs, caractéristiques, de norme 0 de  $H^2(V, \mathbb{Z})$ .]

# UNE EXTENSION D'UN THEOREME DE ROHLIN SUR LA SIGNATURE

Lucien GUILLOU et Alexis MARIN

## INTRODUCTION.

C'est un problème fondamental et non résolu que de savoir quelles formes quadratiques peuvent être réalisées comme formes d'intersection  $H_2(M; \mathbb{Z}) \times H_2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  d'une variété orientée fermée lisse  $M^4$  de dimension quatre. Récemment, M. Freedmann [Fr] a montré que toute forme quadratique peut être ainsi réalisée par une variété topologique et dans le cas lisse, Donaldson [D] a montré que, parmi les formes définies positives, seule la forme triviale est représentable. En général, si  $M^4$  est une variété fermée orientée de dimension quatre et si  $F^2$  est une surface fermée orientable dans  $M^4$  représentant dans  $H_2(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  un élément dual à la deuxième classe de Stiefel-Whitney  $w_2(M)$ , l'algèbre nous dit que  $\sigma(M) - F.F = 0 \pmod{8}$  [MH, II §5] où  $F.F$  représente l'autointersection de la classe d'homologie de  $F$  et  $\sigma(M)$  la signature de la forme d'intersection sur  $H_2(M; \mathbb{R})$ . Dans le cas où  $M$  est lisse, Rohlin [R2] a donné une formule explicite calculant  $\sigma(M) - F.F \pmod{16}$  en fonction de l'invariant d'Arf d'une certaine forme quadratique  $q : H_2(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Ceci généralisait son vieux résultat de 1952 [R1] disant que  $\sigma(M) = 0 \pmod{16}$  si  $F = \emptyset$  (résultat qui disait déjà que certaines formes quadratiques ne sont pas représentables comme ci-dessus par des variétés lisses, par exemple  $E_8$ , cf. [MH, II §6]).

Nous donnons ici une formule semblable dans le cas où  $F$  n'est pas nécessairement orientable. Ces surfaces caractéristiques non orientables se rencontrent naturellement dans l'étude du 16e problème de Hilbert ([Mar1] [A1]). D'ailleurs, le papier [R2] de Rohlin est consacré à ce problème.

Notre but principal ici est d'énoncer et de prouver notre généralisation d'une manière simple et directe, sinon la plus élégante, à la suite de nos commentaires aux travaux de Rohlin [GM3]. Nous renvoyons à l'article de Matsumoto [Mat] pour un point de vue et une preuve un peu différents. Le papier de Freedman et Kirby [FK] qui donne une preuve de la formule de Rohlin contient aussi des motivations et commentaires que nous ne répétons pas. (+)

Signalons enfin que les articles récents de T. Fiedler [Fi] et Turaev [T] traitent de questions voisines.

---

(+) Notre formule a été annoncée en 1977 [GM1] et nous avons donné une première version du présent texte en 1980 [GM2] (elle contient malheureusement quelques bêtises).

I. - ENONCE DU RESULTAT.

Nous travaillons dans la catégorie des variétés lisses compactes. Soit  $M^n$  une variété de dimension  $n$  et soit  $V^{n-2}$  une sous-variété de codimension 2. On dit que  $V^{n-2}$  est caractéristique si il existe une trivialisation du fibré tangent à  $M - V$  au-dessus du 2-squelette de  $M$  qui ne s'étend à aucun 2-disque transverse à  $F$  pour une triangulation du couple  $(M, V)$ , cf. [GM3, I appendice C]. On note  $i : V \hookrightarrow M$  l'inclusion de  $V$  dans  $M$ .

Soit  $M^4$  une variété fermée, orientée de dimension 4 et soit  $F^2$  une surface fermée caractéristique (non nécessairement orientable) dans  $M$  telle que  $i_* (H_1(F^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \{0\} \subset H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Alors, on peut définir une forme quadratique naturelle  $q : H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , associée à la forme d'intersection homologique sur  $F$ , telle que la généralisation suivante de la formule de Rohlin [R2] ait lieu :

THEOREME. On a :  $\sigma(M) - F.F = 2\alpha(M, F) \pmod{16}$  où  $\sigma(M)$  désigne la signature de la variété orientée  $M$ ,  $F.F$  l'auto-intersection de  $F$  dans  $M$  (cf. [W]) et  $\alpha(M, F)$  l'invariant de Brown de la forme quadratique  $q$  associée au couple  $(M, F)$  (cf. [B] et le paragraphe suivant).

Rappelons que  $F.F$  peut être commodément défini comme suit : Soit  $s$  une section, n'ayant que des zéros simples, du fibré normal à  $F$  dans  $M$  ; on pousse légèrement  $F$  selon  $s$  pour obtenir une surface  $F'$  et un difféomorphisme  $\varphi : F \rightarrow F'$ . Maintenant  $F \cap F' = \{x \in F \mid \varphi(x) = x\}$  est fini. Etant donné  $a \in F \cap F'$ , on choisit une orientation locale  $\theta$  près de  $a$  pour  $F$ , ce qui définit une orientation locale  $\varphi(\theta)$  près de  $a$  pour  $F'$ . Si l'orientation  $\theta \oplus \varphi(\theta)$  près de  $a$  pour  $M$  coïncide avec l'orientation donnée de  $M$ , nous donnons le signe  $\epsilon(a) = +1$  à  $a$  et le signe  $-1$  dans le cas contraire. Clairement,  $\epsilon(a)$  ne dépend pas du choix de  $\theta$  près de  $a$ . Alors,  $F.F = \sum_{a \in F \cap F'} \epsilon(a)$ .

Remarque. Si la surface  $F$  est orientable, la forme quadratique  $q$  prend ses valeurs dans  $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\alpha(M, F)$  qui vaut alors 0 ou 4 s'identifie au quadruple de l'invariant de Arf de  $q$  : on retrouve la formule connue de Rohlin [R2]. Rappelons que le cas  $F = \emptyset$  est très célèbre, il date de 1952 et est aussi dû à Rohlin [R1].

II. - LES FORMES QUADRATIQUES SUR LES  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ESPACES  
ET L'INVARIANT DE BROWN

(cf. [B], [BLLV, appendices])

Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  de dimension finie  $n$ , muni d'une forme bilinéaire  $(x, y) \rightarrow x \cdot y$  symétrique, non dégénérée à valeurs dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

DEFINITION 1. Une forme quadratique sur  $V$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  est une application  $q : V \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  vérifiant :

$$q(x + y) = q(x) + q(y) + 2x \cdot y ,$$

où  $2 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  est l'unique homomorphisme non nul.

Remarques et exemples.

1) On a  $q(0) = q(0+0) = q(0) + q(0) + 2 \cdot 0 \cdot 0 = q(0) + q(0)$ , d'où  $q(0) = 0$ .

2) Sur  $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  il n'y a qu'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée : le produit du corps  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Et on a :

$$0 = q(1+1) = q(1) + q(1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2q(1) + 2 , \text{ donc } q(1) = \pm 1 .$$

Il y a donc deux formes quadratiques,  $q_+$  et  $q_-$ , sur un espace de dimension un.

3) Si  $\bar{q} : V \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est une forme quadratique ordinaire sur le corps  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (cf. [MH, Appendix 1]), alors  $q = 2\bar{q}$  est une forme quadratique sur  $V$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

DEFINITION 2. Une forme quadratique  $q : V \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  est neutre s'il existe un sous-espace  $H \subset V$  de dimension moitié sur lequel  $q$  est nulle (et alors  $H$  est égal à son orthogonal pour la forme bilinéaire).

On définit de la manière usuelle la somme orthogonale de deux formes quadratiques ; remarquons que si  $V = V_1 \oplus V_2$  est une décomposition orthogonale pour la forme bilinéaire, alors  $q = q|_{V_1} \oplus q|_{V_2}$ .

En quotientant le semi-groupe des formes quadratiques ainsi obtenu par le semi-groupe des formes neutres, on obtient le groupe de Witt  $WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$  des formes quadratiques sur les  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  espaces vectoriels à valeurs dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  (cf. [BLLV, appendices]).

Si  $q : V \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  est une forme quadratique et si  $x \in V$ , on pose  $\psi(x) = \exp\left(\frac{i\pi}{2} q(x)\right) = i^{q(x)}$ .

DEFINITION 3. L'invariant multiplicatif de Brown de la forme quadratique  $q$  est le nombre complexe :

$$\gamma(q) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{x \in V} \psi(x) \quad (\text{où } n = \dim V) .$$

PROPOSITION. L'application  $\gamma$  établit un isomorphisme entre le groupe de Witt  $WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$  et le groupe des racines huitièmes de l'unité.

En notations additives, on écrira :

$$\alpha : WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} , \quad \text{où } \gamma = \epsilon \circ \alpha ,$$

avec  $\epsilon : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \{\text{racines huitièmes de l'unité}\}$  donné par  $\epsilon(1) = \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ .

Remarque. Si la forme bilinéaire est isotrope, i.e. vérifie  $x.x = 0$  pour tout  $x$  de  $V$ , la forme quadratique  $q$  ne prend que des valeurs paires :  $0 = q(2x) = q(x) + q(x)$  ; de sorte que  $q = 2\bar{q}$ , où  $\bar{q} : V \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est une forme quadratique ordinaire,  $\psi$  ne prend que les valeurs  $+1$  et  $-1$  et l'invariant de Brown  $\gamma$  de  $q$  est le classique invariant d'Arf de  $\bar{q}$  qui vaut  $+1$  si la forme représente plus souvent  $0$  que  $1$ , et  $-1$  dans le cas contraire.

Démonstration de la proposition.

LEMME 1.  $\gamma(q_1 \oplus q_2) = \gamma(q_1)\gamma(q_2)$ .

$$\begin{aligned} \text{Preuve. } \gamma(q_1 \oplus q_2) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_1+n_2} \sum_{x \in V_1, y \in V_2} i^{q_1(x)} i^{q_2(y)} = \\ &= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_1} \sum_{x \in V_1} i^{q_1(x)}\right] \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_2} \sum_{y \in V_2} i^{q_2(y)}\right] = \gamma(q_1)\gamma(q_2) . \end{aligned}$$

LEMME 2. Si la forme quadratique  $q$  est neutre,  $\gamma(q) = 1$ .

Preuve. Soit  $H \subset V$  un sous-espace de dimension moitié sur lequel  $q$  s'annule. Soit  $V = H \oplus L$  une décomposition en somme directe. Alors, si  $n = \dim V$  :

$$\begin{aligned} \gamma(q) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{h \in H, \ell \in L} \psi(h+\ell) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{h \in H, \ell \in L} \psi(\ell)(-1)^{\ell \cdot h} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left[ \sum_{\ell \in L - \{0\}} \left( \sum_{h \in H} (-1)^{\ell \cdot h} \psi(\ell) \right) + \text{card}(H) \right] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \text{card}(H) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n (2^{n/2}) = 1 . \end{aligned}$$

La quatrième égalité suit de ce que la forme bilinéaire étant non dégénérée, pour  $\ell \neq 0$ , la forme linéaire  $\varphi$  sur  $H$  donnée par  $\varphi(h) = \ell \cdot h$  est non nulle ( $H$  est égal à son orthogonal) et donc prend la valeur  $0$  autant de fois que la valeur  $1$  ( $\dim(\text{Ker } \varphi) = \dim H - 1$ ).

LEMME 3. Si la forme bilinéaire n'est pas isotrope, V se décompose en une somme orthogonale d'espaces de dimension un.

Preuve. Puisque l'application  $x \rightarrow x.x$  est linéaire, la non dégénérescence fournit  $c \in V - \{0\}$  tel que pour tout  $x \in V$ ,  $c.x = x.x$ . Si  $\dim V \geq 2$ , il existe  $y$  distinct de  $c$  tel que  $y.y = 1$  (si  $c.c = 1$  et  $y.y = 0$ , alors  $(c+y).(c+y) = 1$ ) et  $V$  se décompose en  $(y) \oplus (y)^\perp$ . Puisque  $y$  est distinct de  $c$ , la restriction de la forme bilinéaire à  $(y)^\perp$  est non isotrope (si  $z.z = c.z = 0$  pour tout  $z \in (y)^\perp$ , alors  $c \in ((y)^\perp)^\perp = (y)$ ). On termine par induction sur  $\dim V$ .

LEMME 4. Si q est une forme quadratique à valeurs dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , alors  $4(\oplus q) = q \oplus q \oplus q \oplus q$  est isométrique à  $4(\oplus (-q))$ . Et donc  $8(\oplus q)$  est neutre.

Preuve. Soit  $W = V \oplus V \oplus V \oplus V$  et soient  $\varphi_i : V \rightarrow W$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , les applications  $\varphi_1(x) = (0, x, x, x)$ ;  $\varphi_2(x) = (x, 0, x, x)$ ;  $\varphi_3(x) = (x, x, 0, x)$ ;  $\varphi_4(x) = (x, x, x, 0)$ . On a  $4(\oplus q)(\varphi_i(x)) = 3q(x) = -q(x)$ , et  $\varphi_i(V)$  orthogonal à  $\varphi_j(V)$  pour  $i \neq j$ .

L'isomorphisme cherché est  $\bigoplus_{i=1}^4 \varphi_i : V \oplus V \oplus V \oplus V \rightarrow W$ .

Pour conclure la preuve de la proposition, on note que puisque  $q_+ \oplus q_-$  est neutre, le lemme 3 appliqué à  $q \oplus q_+ \oplus q_-$  montre que  $WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$  est cyclique, engendré par la classe de  $q_+$  (exemple 2) et d'ordre un diviseur de huit par le lemme 4. Les lemmes 1 et 2 assurent que  $\gamma$  est un homomorphisme. Finalement, on vérifie que  $\gamma(q_+) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$  est une racine huitième primitive de l'unité.  $\square$

Remarque. Il est maintenant facile d'établir que l'invariant de Brown d'une forme quadratique, son rang et l'isotropie ou l'anisotropie de la forme bilinéaire associée déterminent sa classe d'isométrie.

### III. - DEFINITION GEOMETRIQUE DE LA FORME QUADRATIQUE

$$q : H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

On se place maintenant dans la situation du paragraphe I.

**DEFINITION 4.** Une membrane  $P^2$  pour la surface caractéristique  $F$  est une surface compacte (non nécessairement orientable) immergée dans  $M$ , plongée et normale à  $F$  près de son bord  $\partial P \subset F$ , et dont l'intérieur est transverse à  $F$ .

Soit  $f$  une immersion générique  $P^2 \hookrightarrow M$  dont l'image  $f(P)$  est une membrane. Le bord de  $f(P)$  consiste en des courbes simples fermées de  $F$ ; notons  $\mathcal{C}$

l'obstruction à étendre le fibré normal en droites à ces courbes dans  $F$  en un sous-fibré de rang un du fibré normal  $\nu(f)$  de l'immersion. Rappelons que  $\nu(f)$  est défini par la suite exacte  $0 \rightarrow \tau(P) \rightarrow f^*(\tau(M)) \rightarrow \nu(f) \rightarrow 0$ , où  $f^*(\tau(M))$  est le retiré du fibré tangent à  $M$  au-dessus de  $P$  par  $f$ . On vérifie aisément que deux immersions de même image donnent lieu à des fibrés normaux isomorphes et donc que l'obstruction  $\sigma$  ne dépend pas du choix de  $f$ . Cette obstruction habite  $H^2(P, \partial P; \pi_1(\mathbb{R}P^1)^t)$ , les coefficients étant tordus par la première classe de Stiefel-Whitney  $w_1(\nu(f))$ . Son évaluation sur la classe fondamentale  $[P, \partial P] \in H^2(P, \partial P; \pi_1(\mathbb{R}P^1)^t)$  est un entier encore noté  $\sigma$ . On pose alors :  $q^1(P^2) = \sigma + 2P \cdot F \pmod{4}$ , où  $P \cdot F$  désigne le nombre de points d'intersection transverse de l'intérieur de  $P$  (i.e. de  $f(P)$ ) avec  $F$ .

Remarque 1. Une définition plus géométrique, et souvent plus efficace dans les applications, de l'obstruction  $\sigma$  est la suivante :

Soit  $\tilde{P}$  une surface compacte et  $j: \tilde{P} \rightarrow \nu(f)$  une immersion telle que :

(i)  $p \circ j: \tilde{P} \rightarrow P$  est un revêtement ramifié à deux feuillets où  $p$  désigne la projection de l'espace total du fibré  $\nu(f)$  sur sa section nulle  $P$ .

(ii)  $j$  est transverse à  $P$  (vu comme la section nulle de  $\nu(f)$ ), et  $j(\tilde{P}) \cap P$  ne contient aucun des points doubles de  $j(\tilde{P})$  ou de  $P$ .

(iii)  $f(\partial\tilde{P})$  est le bord d'un tube autour de  $\partial P$  dans  $F$ .

Pour chaque point  $a$  de l'intersection  $P \cap j(\tilde{P})$ , une orientation locale  $\theta$  de  $P$  induit (via le revêtement  $p \circ j$ ) une orientation locale  $\theta'$  de  $j(\tilde{P})$ . Si l'orientation  $\theta \otimes \theta'$  coïncide avec celle de l'espace total du fibré  $\nu(f)$ , on attache le signe  $\epsilon(a) = +1$  à  $a$  et le signe  $-1$  dans le cas contraire. Clairement,  $\epsilon(a)$  ne dépend pas du choix de l'orientation  $\theta$  près de  $a$ .

Alors, l'obstruction  $\sigma = \sum_{a \in P \cap j(\tilde{P})} \epsilon(a)$ .

L'existence d'une telle immersion  $j$  peut s'obtenir en désingularisant l'image de deux sections de  $\nu(f)$  en position générale l'une par rapport à l'autre et par rapport à la section nulle de  $\nu(f)$ . Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la somme ci-dessus ne dépend pas des choix de  $\tilde{P}$  et  $j$  (soit directement, soit en montrant l'égalité ci-dessus !).

Remarque 2. Si  $P$  n'a pas de composantes fermées, la membrane  $P$  est homotopiquement équivalente à un bouquet de cercles, donc, par stabilité, on peut écrire  $\nu(f)$  comme une somme directe avec un sous-fibré trivial de rang un. Maintenant deux tels sous-fibrés triviaux de  $\nu(f)$  induisent deux sous-fibrés homotopes de  $\nu(f)|_{\partial P}$  qui est



un fibré trivial. En effet, si nous décrivons nos deux sous-fibrés triviaux de  $\nu(f)$  par des sections sans zéros  $s$  et  $s'$  et si  $d(s|\partial P, s'|\partial P)$  est la différence primaire dans  $H^1(\partial P; \pi_1(\mathbb{R}P^1)^{\dagger}) \cong \mathbb{Z}^{\dagger}$ , on a ([S, §36])  $\delta(d(s|\partial P, s'|\partial P)) = \sigma(s|\partial P) - \sigma(s'|\partial P)$  où  $\delta$  est le cobord  $H^1(\partial P; \pi_1(\mathbb{R}P^1)^{\dagger}) \xrightarrow{\cong} H^2(P, \partial P; \pi_1(\mathbb{R}P^1)^{\dagger})$  et  $\sigma(s|\partial P)$  est l'obstruction primaire à étendre  $s|\partial P$ . Donc  $d(s|\partial P, s'|\partial P) = 0$ , ce qui prouve que  $s|\partial P$  et  $s'|\partial P$  sont homotopes.

Soient  $s_0$  la restriction à  $\partial P$  d'une section sans zéros d'un sous-fibré trivial de rang un de  $\nu(f)$  et  $s_1$  la section sans zéros au-dessus de  $\partial P$  donnée par le fibré normal en droite à  $\partial P$  dans  $F$ . On a  $\delta d(s_1, s_0) = \sigma(s_1) - \sigma(s_0) = \sigma(s_1)$ . Puisque  $\delta$  est un isomorphisme, on peut identifier notre obstruction  $\sigma$  à  $d(s_1, s_0)$ . Ceci explique la relation entre notre définition de la forme quadratique  $q'$  et celle de Y. Matsumoto [Mat].

Remarque 3. Les explications de la remarque 1 (ou les calculs de la remarque 2) montrent que si  $\partial P$  est connexe, l'obstruction  $\sigma$  est paire si et seulement si  $\partial P$  admet un voisinage annulaire dans  $F$ . En général, si toutes les composantes connexes de  $\partial P$  ont des voisinages annulaires dans  $F$ , alors  $\sigma = 2\sigma(v)$ , où  $\sigma(v)$  est l'obstruction à étendre un champ de vecteurs normal à  $\partial P^2$  dans  $F$  en un champ de vecteurs (sans zéros) normal à  $P^2$  dans  $\nu(f)$  (le facteur 2 vient de ce que la flèche naturelle  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$  est de degré 2).

En particulier, si la surface caractéristique  $F$  est orientable, on obtient  $q'(P^2) = 2(\sigma(v) + P \cdot F) \pmod{4}$ . On retrouve la définition de Rohlin [R2].

PROPOSITION 1.  $q'(P^2)$  ne dépend que de la classe d'homologie modulo 2 de  $\partial P^2$  dans  $F$ . Ceci permet de définir une application  $q : H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

LEMME. Supposons que  $(M^4, F^2)$  soit bord de  $(V^5, G^3)$  où  $V^5$  est une variété orientée compacte de dimension 5 et  $G^3$  une sous-variété caractéristique (non nécessairement orientable). Soit  $\Delta^2 \subset G^3$  une surface (non nécessairement orientable) telle que  $\Delta \cap F = \partial \Delta$ , et soit  $P$  une membrane pour  $F$  (dans  $M$ ) de bord  $\partial P = \partial \Delta$ . Alors,  $q'(P) = 0$ .

Preuve de la proposition 1 (à partir du lemme).

Si  $P_0$  et  $P_1$  sont deux membranes dont les bords représentent la même classe d'homologie modulo 2, on applique le lemme à l'union disjointe  $(M \times \{0\}, F \times \{0\}) \sqcup (M \times \{1\}, F \times \{1\})$  de deux copies de  $(M, F)$  avec  $V^5 = M \times [0, 1]$ ,  $G^3 = F \times [0, 1]$  et  $\Delta^2$  une désingularisation d'un cycle modulo 2 qui réalise une homologie dans  $F \times [0, 1]$  entre  $\partial P_0 \subset F \times \{0\}$  et  $\partial P_1 \subset F \times \{1\}$

(†) Dans le cas où  $\partial P$  est connexe; l'extension facile au cas général est laissée au lecteur.

(l'existence de  $\Delta^2$  s'obtient facilement par les méthodes de Kneser, cf. [GM3, II.2]). On obtient alors dans  $\partial V : q(P_0 \times \{0\} \cup P_1 \times \{1\}) = 0 = q(P_1) - q(P_0)$  puisque, avec l'orientation de  $\partial V$ ,  $M \times 0$  hérite l'orientation opposée à celle de  $M$ . Ceci prouve la première assertion. Pour la seconde, tout 1-cycle  $z$  de  $F$  peut être représenté par une famille de courbes simples fermées disjointes, et puisque  $i_* (H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \{0\} \subset H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  toute telle famille borde une 2-chaîne dans  $M^4$  qui peut être désingularisée comme ci-dessus pour donner une membrane dont le bord représente le cycle  $z$ .

Preuve du lemme (cf. la figure).

Supposons d'abord que le bord de  $\Delta^2$  soit connexe. L'auto-intersection de  $\partial\Delta$  dans  $F$  est bord de l'auto-intersection de  $\Delta$  dans  $G$  donc nulle modulo 2. Par suite (puisque  $\partial\Delta^2$  est connexe),  $\partial\Delta^2$  admet un voisinage annulaire dans  $F$  et, comme dans la remarque 3 ci-dessus, si  $\sigma(v)$  est l'obstruction à étendre un champ de vecteurs normal  $v$  à  $\partial P = \partial\Delta$  dans  $F$  en un champ de vecteurs normal (sans zéros) à  $P$  dans  $\nu(f)$ , il suffit de vérifier que  $\sigma(v) + P \cdot F = 0 \pmod{2}$ . Désignons par  $\nu$  et  $\mu$  les fibrés normaux à  $G^3$  dans  $V^5$  et à  $\Delta^2$  dans  $G^3$ , et par  $E(\nu)$  et  $E(\mu)$  les espaces totaux des fibrés en disques associés. Alors,  $(W, U) = (E(\nu|_{\Delta^2} \oplus \mu), E(\mu))$  est un voisinage tubulaire de  $\Delta^2$  dans  $(V^5, G^3)$ . Soient  $N^4$  le bord de la variété  $V - \overset{\circ}{W}$  et  $H^2 = (F - \overset{\circ}{W}) \cup Fr U = N \cap G$ . Clairement,  $H^2$  est une surface caractéristique pour la variété orientable fermée  $N^4$ .

Soient  $s$  et  $s'$  deux sections de  $\nu|_{\Delta^2}$  avec  $s(\Delta^2)$  et  $s'(\Delta^2)$  transverses entre elles aussi bien qu'avec  $\Delta^2$ . Soit  $t$  une section de  $\mu$  identique au champ de vecteurs  $v$  sur  $\partial\Delta^2 = \partial P$  et sans zéros près de  $\Delta^2 \cap (s(\Delta^2) \cup s'(\Delta^2))$ . Soit enfin  $\rho : \Delta^2 \rightarrow [0, 1]$  une fonction lisse nulle sur  $\partial\Delta^2$  et telle que  $\rho^{-1}(\frac{1}{2})$  soit un voisinage des zéros de  $s$  et  $t$  et des points communs à  $s$  et  $s'$ .

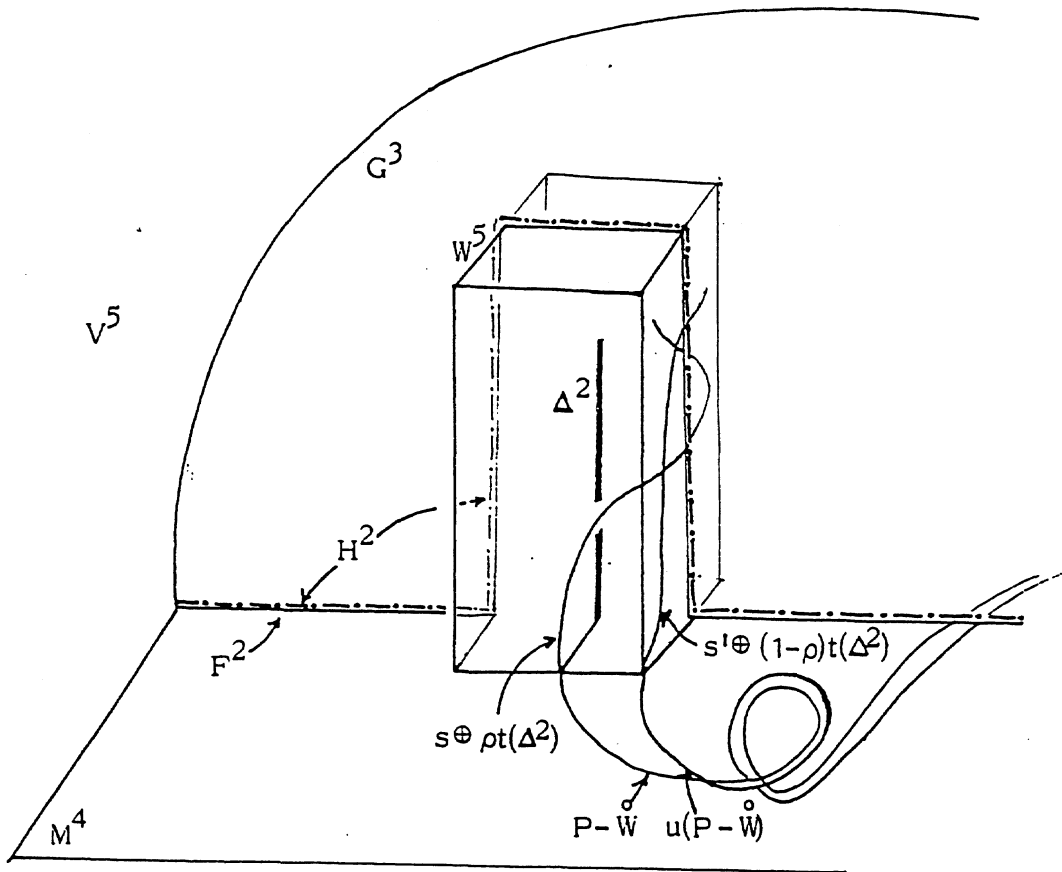
Alors, on peut pousser  $\Delta^2$  dans  $\partial W$  et former le 2-cycle de  $N^4$  :

$$\Sigma^2 = (P - \overset{\circ}{W}) \cup s \oplus \rho t(\Delta^2) ,$$

La formule de Wu (cf. [GM3, I appendice C]) dit :

$$\Sigma^2 \cdot \Sigma^2 + \Sigma^2 \cdot H^2 = 0 \pmod{2} .$$

Soit  $u$  une section du fibré normal  $\nu(f)$  d'une immersion  $f : P \hookrightarrow M$  dont les zéros soient distincts des préimages des points doubles de  $f$  et qui coïncide avec  $v$  sur  $\partial P = \partial\Delta$ . L'immersion  $f$  s'étend en un plongement local  $\bar{f}$  de l'espace total de  $\nu(f)$  dans  $M^4$  tel que  $\bar{f}(u(P))$  soit une copie difféomorphe de  $f(P)$  transverse à  $f(P)$ . Nous maintenons notre notation  $P$  pour  $f(P)$  et notons  $u(P)$  au lieu de  $\bar{f}(u(P))$ .



Figure

On observe alors que le nombre d'intersection homologique modulo 2  $P \cdot u(P)$  (bien défini puisque  $\partial P \cap \partial u(P) = \emptyset$ ) est la réduction modulo 2 du nombre d'obstruction  $\vartheta(v)$  (plus deux fois le nombre d'auto-intersection de la surface immergée  $P$ , ce qui est zéro modulo 2). Ainsi :

$$\begin{aligned} \Sigma \cdot \Sigma &= [(P - \overset{\circ}{W}) \cup (s \oplus \rho t)(\Delta^2)] \cdot [u(P - \overset{\circ}{W}) \cup s' \oplus (1 - \rho)t(\Delta^2)] \\ &= P \cdot u(P) + s(\Delta^2) \cdot s'(\Delta^2) = \vartheta(v) + s(\Delta^2) \cdot s'(\Delta^2) \pmod{2} \end{aligned}$$

$$\Sigma \cdot H = [(P - \overset{\circ}{W}) \cup (s \oplus \rho t)(\Delta^2)] \cdot [(F - \overset{\circ}{W}) \cup \text{Fr} \cup ] = P \cdot F + s(\Delta^2) \cdot \Delta^2 \pmod{2} .$$

Or,  $s(\Delta^2) \cdot \Delta^2 = s(\Delta^2) \cdot s'(\Delta^2)$  par l'invariance homotopique des nombres d'intersection, d'où :

$$0 = \Sigma \cdot \Sigma + \Sigma \cdot H = \vartheta(v) + P \cdot F \pmod{2} .$$

Pour se ramener au cas  $\partial \Delta^2$  connexe, nous énonçons d'abord le

SOUS-LEMME. Soit  $(V, G)$  une paire propre de variétés  $(G \cap \partial V = \partial G)$  avec  $\partial V$  connexe. Alors, il existe une sous-variété propre  $G'$  de  $V$  dont le bord est la somme connexe plongée des composantes de  $\partial G$ .

De plus, on peut choisir  $G'$  coïncidant avec  $G$  excepté dans le voisinage d'arcs plongés dans  $\partial V$  connectant les composantes de  $\partial G$  (de sorte que  $G$  et  $G'$  représentent la même classe d'homologie modulo 2).

La preuve du sous-lemme, qui consiste à creuser des tunnels le long des arcs de l'énoncé, est laissée au lecteur.

Ensuite (on peut bien sûr supposer  $V$  connexe), on se ramène au cas  $\partial V$  connexe en creusant des tunnels le long d'arcs disjoints de  $G^3$  et connectant les composantes de  $\partial V$ . On peut alors appliquer le sous-lemme et obtenir un nouveau  $G$  à bord connexe, toujours contenant  $\Delta^2$ . Une nouvelle application du sous-lemme au couple  $(G, \Delta^2)$  achève de nous ramener au cas  $\partial \Delta^2$  connexe.

Il reste à appliquer encore une fois le sous-lemme pour obtenir une membrane pour ce nouveau  $\Delta^2$  qui ne diffère de l'ancienne que dans le voisinage d'un arc et a même fonction  $q'$ . Il n'y a pas de difficultés.

PROPOSITION 2. L'application  $q : H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  est quadratique pour la  
forme bilinéaire d'intersection de la surface  $F$  :

$$q(\alpha + \beta) = q(\alpha) + q(\beta) + 2\alpha \cdot \beta .$$

Preuve. En considérant, si nécessaire,  $(M, F)$  union disjointe avec  $(S^4, \mathbb{R}P^2)$ , on peut toujours supposer que  $H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  se décompose en une somme directe de sous-espaces de dimension un (cf. §II, lemme 3).

On a donc seulement à montrer :

- 1)  $q(\alpha + \beta) = q(\alpha) + q(\beta)$  si  $\alpha \cdot \beta = 0$
- 2)  $q(\alpha) = 1 \pmod{2}$  si  $\alpha \cdot \alpha = 1$  .

En effet, donné 1) la décomposition de  $H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  induit une décomposition de  $q$ , et donné 2)  $q$  est quadratique sur chaque facteur.

Pour prouver 1), remarquons d'abord que par le sous-lemme précédent on peut supposer  $F$  connexe; dans ce cas, si  $\alpha \cdot \beta = 0$ , on peut représenter  $\alpha$  et  $\beta$  par deux familles disjointes de courbes fermées simples. Alors, si  $P$  et  $Q$  sont des membranes dont les bords représentent  $\alpha$  et  $\beta$ , on rend  $P$  transverse à  $Q$  pour obtenir une membrane  $R = P \cup Q$  dont le bord représente  $\alpha + \beta$ . Clairement,  $\bar{q}(R) = \bar{q}(P) + \bar{q}(Q)$  .

Pour prouver 2), on représente  $\alpha$  par une famille de courbes simples disjointes  $\alpha_i$ . Le point 1) donne  $q(\alpha) = \sum q(\alpha_i)$  et la remarque 3 du §I nous dit  $q(\alpha_i) \equiv \alpha_i \cdot \alpha_i \pmod{2}$  .

Remarque. Nous suggérons au lecteur de se construire une preuve directe de la proposition 2 en fabriquant une membrane pour la réunion de deux courbes se coupant transversalement à partir d'une membrane pour chacune des courbes (cf. notre première version [GM2]) .

#### IV. - PREUVE DU THEOREME.

##### LES EXEMPLES FONDAMENTAUX.

Exemple A. La droite  $\mathbb{C}P^1$  est caractéristique dans le plan projectif complexe  $\mathbb{C}P^2$ ; les invariants sont  $\sigma(\mathbb{C}P^2) = 1$ ,  $\mathbb{C}P^1 \cdot \mathbb{C}P^1 = 1$ ,  $\alpha(\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1) = 0$  .

Exemple B. Soit  $c : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$  la conjugaison complexe.  $C$  est une involution préservant l'orientation dont l'ensemble de points fixes  $\mathbb{R}P^2$  est de codimension deux, et donc  $\Sigma^4 = \mathbb{C}P^2/c$  est une variété lisse fermée orientable. L'exemple B est  $(\Sigma^4, \mathbb{R}P^2)$ . Nous montrons :

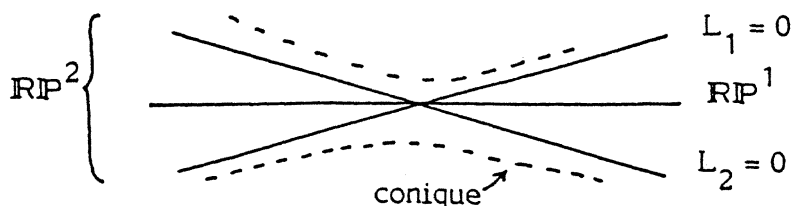
(i)  $\Sigma^4$  est une sphère d'homotopie : si  $p \in \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{C}P^2$ , tout élément de  $\pi_1(\Sigma^4, c(p))$  se représente par un lacet intersectant  $\mathbb{R}P^2 (\subset \Sigma^4)$  transversalement au seul point  $c(p)$ . Un tel lacet se relève à  $\mathbb{C}P^2$  de sorte que  $c_* : \pi_1(\mathbb{C}P^2, p) \rightarrow \pi_1(\Sigma^4, c(p))$  est surjective et  $\pi_1(\Sigma^4) = 0$ . On conclut en calculant la caractéristique d'Euler  $\chi(\Sigma^4) = \frac{1}{2} (\chi(\mathbb{C}P^2) + \chi(\mathbb{R}P^2)) = \frac{1}{2} (3+1) = 2$ .

Remarque. Kuiper et Massey ([K], [Mas2]) ont montré (indépendamment) que  $\Sigma^4$  est PL isomorphe à  $S^4$  et donc difféomorphe à  $S^4$  selon le difficile " $\Gamma_4 = 0$ " de Cerf. Récemment, A. Marin a obtenu une preuve directe et élémentaire de ce dernier résultat [Mar]. Rappelons qu'il y a de nombreuses manières de voir que  $\Sigma^4$  est homéomorphe à  $S^4$ ; par exemple, la fonction de Morse usuelle  $f : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f([x, y, z]) = \frac{|x|^2 + 2|y|^2}{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}$  induit une fonction de Morse sur  $\Sigma^4$  avec deux points critiques.

(ii) Bien sûr,  $\mathbb{R}P^2 \subset \Sigma^4$  est caractéristique et  $\sigma(\Sigma^4) = 0$ .

(iii) L'auto-intersection  $\mathbb{R}P^2 \cdot \mathbb{R}P^2$  dans  $\Sigma^4$  est deux fois l'auto-intersection  $\mathbb{R}P^2 \cdot \mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{C}P^2$  par naturalité de la classe d'Euler (cf. [Mas1, lemma 1]). Ce dernier nombre est  $-\chi(\mathbb{R}P^2)$  puisqu'on peut le calculer en multipliant par  $i$  un champ de vecteurs tangents à  $\mathbb{R}P^2$  avec des points singuliers simples (cf. [A, lemma 6]). Donc,  $\mathbb{R}P^2 \cdot \mathbb{R}P^2$  dans  $\Sigma^4$  vaut  $-2$ .

(iv)  $\alpha(\Sigma^4, \mathbb{R}P^1) = 1$  : puisque  $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est engendré par  $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{C}P^1$ , on choisit comme membrane un des disques bordé par  $\mathbb{R}P^1$  dans  $\mathbb{C}P^1$ . Cette membrane ne rencontre  $\mathbb{R}P^2$  que le long de  $\mathbb{R}P^1$  et son nombre d'obstruction vaut  $+1$ ; en effet, considérons deux droites  $L_1$  et  $L_2$  à coefficients réels proches de  $\mathbb{C}P^1$  se coupant en un point de  $\mathbb{R}P^1$ ; une petite variation des coefficients du produit  $L_1 \cdot L_2$  donne une conique non singulière qui rencontre  $\mathbb{R}P^2$  selon le bord d'un voisinage tubulaire de  $\mathbb{R}P^1$  dans  $\mathbb{R}P^2$  et qui rencontre la droite  $\mathbb{C}P^1$  transversalement en deux points chacun de signe  $+1$  (comme courbes complexes). Par conséquent, cette conique fournit un revêtement double de la membrane pour  $\mathbb{R}P^1$ , comme dans la remarque 1, § III, d'où nous concluons  $q(\mathbb{R}P^2) = 1$ .



Considérons alors un couple  $(M, F)$  comme dans l'énoncé du théorème et remarquons d'abord que  $\sigma(M) \equiv F.F \pmod{2}$  (en effet, toute forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  se décompose en une somme directe dont chaque facteur est soit  $(1)$ , soit  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  d'élément caractéristique respectivement 1 et 0 ; donc  $F.F \equiv \dim H_2(M; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \equiv \bar{\sigma}(M) \pmod{2}$ ). Remarquons aussi que les trois termes de la formule à démontrer sont additifs sous la somme disjointe. L'exemple A permet alors de supposer  $\sigma(M) = 0$ , et donc  $F.F$  pair. L'exemple B permet ensuite de supposer  $\sigma(M) = 0 = F.F$ . Reste alors à montrer  $\alpha(M, F) = 0$  ; pour cela, on s'appuie sur

LEMME. Soient  $M$  une variété close orientée de dimension quatre et  $F \subset M$  une surface close caractéristique. Si  $\sigma(M) = 0 = F.F$ , alors  $(M, F) = \partial(V, G)$  ; où  $V$  est une variété orientée compacte de dimension cinq et  $G$  une sous-variété caractéristique de dimension trois.

Donné le lemme, on conclut aisément que  $\alpha(M, F) = 0$  ; en effet, il faut voir que la forme quadratique  $q$  associée à  $(M, F)$  est neutre. Le lemme du § III dit que le noyau de l'application  $H_1(F; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow H_1(M; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$  induite par inclusion est isotrope. D'autre part, la dualité de Lefschetz montre que ce noyau a une dimension moitié de celle de  $H_1(F; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$  ; donc  $q$  est neutre.

Preuve du lemme. Puisque la signature réalise un isomorphisme du groupe de cobordisme des variétés fermées lisses orientées de dimension quatre vers  $\mathbf{Z}$ ,  $M = \partial V^5$  où  $V^5$  est une variété compacte orientée lisse de dimension cinq. Et, par la théorie des obstructions, il y a, à coefficients  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ , un 3-cycle relatif  $\bar{G}$  dans  $(V, M)$ , caractéristique et vérifiant  $\partial \bar{G} = \bar{G} \cap M = F$ . Nous sommes réduits au

SOUS-LEMME. Soit  $V$  une variété lisse orientable de dimension cinq à bord ; soit  $\bar{G} \subset V$  un 3-cycle relatif modulo 2 dont  $\partial \bar{G} = \bar{G} \cap \partial V$  est une surface d'auto-intersection nulle dans  $V$ . Alors,  $\bar{G}$  est homologue modulo  $\partial \bar{G}$  (et modulo 2) à une sous-variété  $G$  dans  $V$ .

Preuve. Nous utilisons les méthodes expliquées en détails dans [GM3, II.2] dues à Kneser et Rohlin. On peut supposer  $\bar{G}$  triangulé et (par un argument de collier) une variété près de son bord  $F = \partial \bar{G}$ . De plus,  $\bar{G}$  est certainement une variété hors de son 2-squelette. En utilisant les méthodes les plus simples de [GM3, II.2], on peut facilement se ramener au cas où  $\bar{G}$  est une variété hors de son 0-squelette. On réunit les sommets où  $\bar{G}$  n'est pas une variété par un sous-arbre du 1-squelette de  $\bar{G}$ . Le site (= "star") de cet arbre dans  $V$  est une boule  $B^5$  de bord  $S^4 =$  la lice (= link) de cet arbre dans  $V$ . La lice de l'arbre dans  $\bar{G}$  est une surface  $L$  cobordante, par  $\bar{G} - \overset{\circ}{B}^5$ , à  $F$ . En appliquant le sous-lemme du § III au couple  $(\overset{\circ}{V} - \overset{\circ}{B}^5, \overset{\circ}{G} - \overset{\circ}{B}^5)$ , on

peut supposer  $L$  connexe. Par conséquent, puisque le nombre d'auto-intersection  $L.L = 0$  dans  $S^4$  (par cobordisme et parce que  $V$  est orientable), le fibré en disques  $E$  normal à  $L$  dans  $S^4$  admet une section sans zéros  $s$ . On montre alors, comme dans [GM3, III §3], que  $s(L)$  borde dans  $S^4 - \overset{\circ}{E}$  (au besoin en "enroulant" d'abord la section  $s$ ) et donc que  $E$  est bord d'une sous-variété de  $S^4$ . On peut alors utiliser à nouveau les méthodes de [GM3, II.2] pour rendre  $\bar{G}$  lisse dans sa classe d'homologie modulo 2. Ceci termine la preuve du sous-lemme, donc de la proposition 2 et du théorème.

Remarques. La fin de la preuve du sous-lemme ci-dessus montre en fait le résultat suivant :

Soit  $F^2$  une surface d'auto-intersection  $F.F = 0$  dans une variété orientable  $M^4$  de dimension quatre et qui représente zéro dans  $H_2(M^4; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Alors, il y a une variété  $G^3$  dans  $M^4$  de bord  $F^2$ .

Ceci, joint à l'exemple B, donne le

THEOREME. Soient  $M^4$  une variété spin de dimension quatre et  $F^2$  une surface caractéristique telle que  $i_*(H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \{0\} \subset H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , alors :

$$F.F \equiv -2\alpha(M, F) \pmod{16},$$

où  $\alpha(M, F)$  est l'invariant de Brown du couple  $(M, F)$ .

Ceci est une généralisation d'un vieux théorème de Whitney [W] (1941).

THEOREME [Whitney]. Soit  $F^2$  une surface dans la sphère  $S^4$ , alors :

$$F.F \equiv -2\chi(F) \pmod{4}.$$

En effet,  $\alpha(M, F) \equiv \dim H_2(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \equiv \chi(F) \pmod{2}$ .

L'ingrédient nécessaire pour attraper la partie signature du théorème est le résultat de Rohlin : une variété orientée fermée de dimension quatre  $M^4$  borde une variété orientée de dimension cinq si  $\sigma(M^4) = 0$ .

Ainsi, on aurait pu monter la preuve du théorème principal en deux étapes :

1) Prouver le théorème ci-dessus ( $M^4$  spin, en fait  $M^4 = S^4$  suffit).

2) Prouver, comme dans le lemme et le début du sous-lemme ci-dessus, que  $(M, F) \perp\!\!\!\perp -\sigma(M)(\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1) \perp\!\!\!\perp (S^4, F^1)$  est bord de  $(V, G)$  avec  $V$  variété orientée compacte de dimension cinq et  $G$  sous-variété caractéristique de dimension trois pour une certaine surface  $F^1$  dans  $S^4$ .



V. - CHIRURGIE ET COBORDISME CARACTERISTIQUES.

On considère maintenant des triplet  $(M, F, \mathfrak{F})$  où  $M$  est une variété fermée orientée de dimension quatre,  $F$  une surface fermée caractéristique et  $\mathfrak{F}$  le choix d'une trivialisation du fibré tangent à  $M$  au-dessus du 2-squelette de  $M-F$  qui ne s'étend à aucun disque méridien de  $F$  (laquelle existe puisque  $F$  est caractéristique).

DEFINITION 5. Deux triplets  $(M, F, \mathfrak{F})$  et  $(M', F', \mathfrak{F}')$  sont dits caractéristiquement cobordants s'il y a un triplet  $(V, G, \zeta)$  avec  $V$  variété orientée compacte de dimension cinq,  $G$  sous-variété caractéristique de dimension trois et  $\zeta$  une trivialisation du fibré tangent à  $V$  au-dessus du 2-squelette de  $V-G$  qui vérifient  $\partial V = M \sqcup (-M')$ ,  $\partial G = F \cup F'$  et  $\zeta$  étend  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{F}'$ . Le groupe de cobordisme ainsi obtenu est le groupe de cobordisme caractéristique noté  $\Omega_c^4$ .

Remarque 1. Si on néglige les trivialisations dans la définition précédente, la relation obtenue n'est pas transitive ( $[GM1, GM2]$  sont fautifs à ce point-là). On peut négliger les trivialisations si l'on se restreint aux couples  $(M, F)$  comme dans la définition avec  $H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ , car alors il existe une unique trivialisation (à homotopie près) du fibré tangent à  $M$  au-dessus du 2-squelette de  $M-F$  qui ne s'étend à aucun disque méridien de  $F$ .

Soit un couple  $(M, F)$  avec  $M$  variété fermée orientée de dimension quatre et  $F$  surface caractéristique tel que  $i_* (H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \{0\} \subset H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Et soit aussi  $c$  une courbe simple fermée de  $F$ .

LEMME. Le résultat  $(M', F')$  d'une chirurgie de paire sur  $(M, F)$  le long de la courbe  $c$  a la propriété que  $F'$  est caractéristique dans  $M'$  si et seulement si  $q(c) = 0$ .

Preuve. Soit  $P$  une membrane pour  $c$  dans  $M$  et soit  $D$  le 2-disque âme de la chirurgie dans  $M'$ . Alors,  $\Sigma = P \cup D$  est un 2-cycle de  $M'$  et  $2(\Sigma \cdot \Sigma + \Sigma \cdot F') = 2(\sigma(v) + P \cdot F) \equiv q(c) \pmod{4}$ , où  $\sigma(v)$  est l'obstruction à étendre à  $P$  un champ de vecteurs normal à  $\partial P$  dans  $F$  (cf. la remarque 3 du § III ; bien sûr  $c \cdot c = 0 \pmod{2}$  puisque la chirurgie sur  $c$  est possible). Donc, si  $F'$  est caractéristique, la formule de Wu donne  $q(c) = 0$ .

Réciproquement, soit  $\Sigma$  un 2-cycle de  $M'$  que l'on peut supposer coupant transversalement en  $n$  points la co-âme de la chirurgie sur  $M'$ . Alors,  $\Sigma$  peut se voir (après isotopie) comme l'union de  $n$  translatés disjoints de l'âme de la chirurgie et d'une membrane  $P$  pour  $nc$  dans  $M$ ; donc

$2(\Sigma \cdot \Sigma + \Sigma \cdot F') = 2(\sigma(v) + P \cdot F) \equiv q(nc) = nq(c) = 0 \pmod{4}$ , et  $F'$  est caractéristique dans  $M'$ .

Remarque 2. Si  $c$  est une courbe simple fermée dans  $F$  telle que  $q(c) = 0$ , alors (cf. la remarque 3 du § III),  $c \cdot c = 0$  et la chirurgie sur  $c$  est possible.

Soit  $(M, F, \bar{\alpha})$  un élément de  $\Omega_c^4$ , et soit  $M_1$  une variété simplement connexe obtenue à partir de  $M$  par des chirurgies d'indices 2 sur des cercles disjoints de  $F$  telle que la trace de la chirurgie réalise un cobordisme caractéristique entre  $(M, F, \bar{\alpha})$  et le résultat  $(M_1, F, \bar{\alpha}_1)$  de la chirurgie <sup>(†)</sup>

PROPOSITION-DEFINITION. Dans cette situation, si  $c$  est une courbe fermée simple de  $F$ ,  $q_{M_1}(c)$  <sup>(‡)</sup> ne dépend pas du choix de  $M_1$ . De cette manière, on définit une forme quadratique  $q$  (et un invariant de Brown  $\alpha(M, F, \bar{\alpha})$ ) pour le triplet  $(M, F, \bar{\alpha})$ .

Et alors  $q(c) = 0$  si et seulement si la trace d'une chirurgie de paire sur  $(M, F, \bar{\alpha})$  le long de  $c$  est un cobordisme caractéristique.

Preuve. Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux choix possibles; on peut supposer tous les cercles de chirurgie en vue disjoints. Soit  $\tilde{M}$  la variété obtenue en faisant toutes les chirurgies nécessaires pour fabriquer  $M_1$  et  $M_2$ . Alors,  $\tilde{M}$  est simplement connexe, la trace de la chirurgie de  $(M, F)$  à  $(\tilde{M}, F)$  réalise un cobordisme caractéristique entre  $(M, F, \bar{\alpha})$  et le résultat  $(\tilde{M}, F, \tilde{\alpha})$  de la chirurgie, et clairement  $q_{M_1}(c) = q_{\tilde{M}}(c) = q_{M_2}(c)$ .

Supposons maintenant que la trace d'une chirurgie de paire sur  $(M, F, \bar{\alpha})$  le long de  $c$  soit un cobordisme caractéristique, alors  $q(c) = 0$  par le lemme du § III. Inversement, d'après le lemme ci-dessus, si  $q(c) = 0$ , le résultat  $(M', F')$  de la chirurgie sur  $(M_1, F)$  le long de  $c$  admet  $F'$  comme surface caractéristique dans  $M'$ . Soit  $(W, N)$  le complémentaire dans  $(M_1, F)$  d'un voisinage de  $c$ ,  $c'$  est aussi le complémentaire dans  $(M', F')$  d'un voisinage de la sphère duale à la sphère d'attachement de l'anse de chirurgie. Comme  $W$  est simplement connexe,  $H_1(W-N; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est engendré par les méridiens de  $F \cap N$  et deux trivialisations du fibré tangent de  $W-N$  au-dessus du 2-squelette de  $W-N$  provenant de trivialisations des fibrés tangents à  $M_1 - F$  et  $M' - F'$  au-dessus de leurs 2-squelettes sont homotopes (leur différence  $x \in H^1(W-N; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  s'annule sur tout méridien de  $F \cap N = F' \cap N$ ). Donc la trace de la chirurgie liant  $(M_1, F)$  à  $(M', F')$  réalise un cobordisme caractéristique; par définition, il en est de même pour celle liant  $(M, F)$  à  $(M', F')$ ; on conclut par transitivité.

---

(†) On sait bien qu'une telle variété  $M_1$  existe toujours et qu'elle dépend de la trivialisat ion  $\bar{\alpha}$  donnée.

(‡)  $q_{M_1}$  désigne la forme quadratique associée, au § III, à  $(M_1, F)$ .

On se propose maintenant de calculer le groupe  $\Omega_c^4$ .

THEOREME. La suite  $0 \rightarrow \Omega_c^4 \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \rightarrow 0$  est exacte avec  $\chi(M, F, \mathfrak{F}) = (\sigma(M), F.F, \alpha(M, F, \mathfrak{F}))$  et  $\pi(x, y; z) = x - (y+2z)$ . Autrement dit,  $(M, F, \mathfrak{F}) \mapsto (\sigma(M), F.F)$  réalise un isomorphisme de  $\Omega_c^4$  sur le sous-groupe d'indice 2 de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  défini par  $x - y$  pair,  $(x, y) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

Preuve. (a) Si  $(x, y, z) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  vérifie  $x = y + 2z \pmod{16}$ , on veut trouver  $(M, F, \mathfrak{F}) \in \Omega_c^4$  tel que  $x = \sigma(M)$ ,  $y = F.F$  et  $z = \alpha(M, F, \mathfrak{F})$ . Mais, l'exemple A du § IV nous réduit à réaliser les éléments  $(0, y, z)$  avec  $y = -2z \pmod{16}$ , ce que l'on peut faire avec une union disjointe de  $z$  exemples B.

(b)(1) Soit  $(M, F, \mathfrak{F}) \in \Omega_c^4$ , alors  $\alpha(M, F, \mathfrak{F}) = 0$  si et seulement si  $(M, F, \mathfrak{F})$  est caractéristiquement cobordant à un triplé  $(N, S^2, \zeta) \in \Omega_c^4$ .

En effet, si  $\alpha(M, F, \mathfrak{F}) = 0$ , la forme quadratique  $q$  sur  $H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  associée à  $(M, F, \mathfrak{F})$  admet un sous-espace isotrope de dimension moitié dont une base peut être représentée par des courbes simples fermées disjointes de  $F$ . La proposition précédente assure que la trace de la chirurgie sur  $(M, F)$  le long de ces courbes sera un cobordisme caractéristique et la surface  $F'$  obtenue vérifie  $H_1(F'; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ , donc  $F' = S^2$ . La réciproque découle aussi de la proposition.

(2) Soit  $(M, F, \mathfrak{F}) \in \Omega_c^4$ , alors  $\alpha(M, F, \mathfrak{F}) = 0 = F.F$  si et seulement si  $(M, F, \mathfrak{F})$  est caractéristiquement cobordant à un triplé  $(N, \emptyset, \zeta) \in \Omega_c^4$ . Cela suit de (1) et du fait que si une sphère  $S^2$  vérifie  $S^2.S^2 = 0$ , on peut ajouter une 3-anse dessus sans changer le caractère caractéristique.

(3) Enfin,  $(M, F, \mathfrak{F}) \in \Omega_c^4$  est nul si et seulement si  $\sigma(M) = F.F = 0 = \alpha(M, F)$ . Cela suit du point (2), du calcul du groupe de cobordisme ordinaire  $\Omega^4$  et de l'injectivité de l'inclusion canonique  $\Omega_{Spin}^4 \rightarrow \Omega^4$  (cf. [GM3, III, exercices]).

Remarque. La démonstration précédente a été écrite pour dégager le point de vue de la chirurgie caractéristique ; en fait, on a seulement besoin du théorème qui assure  $\pi \circ \chi = 0$ , du point (a) pour avoir  $\ker \pi \subset \text{Im}(\chi)$  ; enfin, l'injectivité de  $\chi$  démontrée au point (b) a déjà été établie : c'est le lemme du § IV (dont la preuve commence par étendre la structure spin donnée). Le lecteur en déduira comme en [GM3, III, exercice III d)] une preuve de l'injectivité de l'inclusion canonique  $\Omega_{Spin}^4 \rightarrow \Omega_4$ .

## A P P E N D I C E

Dans cet appendice, nous esquissons une définition de  $\alpha(M, F)$  qui passe par une immersion de  $F$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Ce point de vue nous a été expliqué par L. Siebenmann et ce sont ses explications que nous rapportons.

### 1. La forme quadratique attachée à une surface immergée dans $\mathbb{R}^3$ .

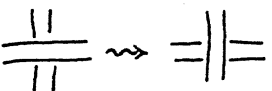
Une bande sera pour nous une union disjointe d'anneaux et de bandes de Moëbius.


. Pour une bande  $Q$  plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , supposons l'âme  $C$  de la bande et son bord  $\partial Q$  orienté de manière cohérente. Alors, le nombre d'enlacement de  $C$  et de  $\partial Q$  donne un entier bien défini  $\tau(Q) \in \mathbb{Z}$ , indépendant du choix cohérent d'orientation.

.  $\tau(Q)$  est un invariant de la classe d'isotopie, et même de concordance, de  $Q$  (calculer  $\tau(Q)$  en utilisant l'intersection de deux surfaces dans  $B^4$  bordant  $C$  et  $\partial Q$ ).

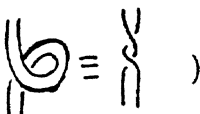
. Définissons  $q(Q) = \tau(Q) \bmod 4$ . Alors,  $q(Q)$  est un invariant de la classe d'homotopie régulière de  $Q$ .

(On utilise une surface de Seifert pour  $C$  dans  $\mathbb{R}^3$  pour calculer  $\tau$ .)

Il faut vérifier que  modifie  $\tau(Q)$  par un multiple de 4.

On se ramène au cas  où  $\tau(Q)$  vaut respectivement -2 et +2.)

. <sup>on vérifie</sup> Similairement que  $q$  réalise un homomorphisme de l'ensemble des classes d'homotopie régulière de bandes munies de l'opération somme disjointe sur  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . D'ailleurs, si l'on se restreint aux bandes connexes, on obtient un isomorphisme.



(Par homotopie régulière, on peut dénouer  $C$  dans  $\mathbb{R}^3$ , ensuite utiliser  )


. La forme quadratique  $q: H_1(F^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

$F$  est une surface fermée, non nécessairement orientable, immergée dans  $\mathbb{R}^3$ . Si  $x \in H_1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , on représente  $x$  par une bande  $Q \subset F$ . Après perturbation de l'immersion de  $F$  dans  $\mathbb{R}^3$ , on peut supposer  $Q$  plongée. La classe d'homotopie régulière de ce plongement est bien définie et on pose  $q(x) = q(Q)$ . On vérifie aisément que  $q(x)$  est bien défini.

On remarque que  $q$  ne dépend que de la classe d'homotopie régulière de l'immersion de  $F$  dans  $\mathbb{R}^3$  (car il en est de même de  $q(Q)$  pour une bande  $Q \subset \mathbb{R}^3$ ).

La forme  $q$  est quadratique :  $q(x+y) = q(x) + q(y) + 2x \cdot y \bmod 4$ .

(En effet, la différence entre  et  est  $q(\mathcal{R}) = \pm 2$ .)

. Exemple [B, exemple 1.28] . A une surface fermée orientée  $M^2$  stablement parallélisée est associée une unique parallélisation de  $M^2 \times \mathbb{R}$  et donc une immersion de  $M^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Comme  $M^2$  est orientable, l'invariant de Brown de  $q$  se trouve dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ . On a ainsi une flèche de l'ensemble  $\pi_2$  des classes d'homotopie régulière des surfaces orientées immergées dans  $\mathbb{R}^3$  vers  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . C'est un isomorphisme et l'élément non nul de  $\pi_2$  peut se représenter par  union un disque.

## 2. L'immersion associée à une surface caractéristique.

Soit  $M^4$  une variété fermée orientée de dimension 4 et soit  $F^2$  une surface fermée caractéristique (non nécessairement orientable). On suppose  $H_1(M^4; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$  <sup>(†)</sup>. Puisque  $F$  est caractéristique, il existe une structure spin sur  $M-F$  et donc une trivialisat<sup>ion</sup>  $\mathfrak{F}_0$  du fibré tangent à  $M^4$  au-dessus du 2-squelette de  $M^4 - F$  (ce qui équivaut à une trivialisat<sup>ion</sup> du fibré tangent à  $M^4$  au-dessus de  $(M^4 - F)$  sauf un point) qui ne s'étend à aucun 2-disque transverse à  $F$ .

. Puisque  $H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ , deux telles structures spin coïncident (leur différence est un  $x \in H^1(M-F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  dont la restriction à tout méridien de  $F$  est nulle. Donc  $x$  s'étend à  $\bar{x} \in H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$  et  $x = 0$ ).

. Soit  $F_0 = F - \text{quelques points}$ , une partie de  $F$  sur laquelle existe un champ de vecteurs normal dans  $M$ .

PROPOSITION. Il y a une classe d'homotopie régulière d'immersions de  $F_0$  dans  $\mathbb{R}^3$  bien définie par le procédé suivant :

Fixons un champ de vecteurs normal  $\xi$  à  $F_0$  et soit  $\eta$  son complément :  $\xi \oplus \eta = \nu(F_0, M)$  le fibré normal à  $F_0$  dans  $M$ . Alors, l'espace total du fibré en disques associé à  $\eta$ ,  $E(\eta)$ , est un épaississement à trois dimensions de  $F_0$ . A isotopie près, il y a une unique façon de faire coïncider le premier champ de vecteurs de la structure spin  $\mathfrak{F}_0$  sur  $M-F$  avec  $\xi$  le long de  $F_0$  poussée par  $\xi$ . Alors, on projette le champ  $\mathfrak{F}_0$  sur  $E(\eta)$  parallèlement au premier champ de vecteurs de  $\mathfrak{F}_0$  pour obtenir une trivialisat<sup>ion</sup>  $\mathfrak{G}$  du fibré tangent à  $E(\eta) \supset F_0$ , et par suite une immersion  $g : E(\eta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

(†) Si  $H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est non nul, mais si  $(M, F)$  est équipé d'une trivialisat<sup>ion</sup> du fibré tangent à  $M$  au-dessus du 2-squelette de  $M-F$  qui ne s'étend à aucun méridien de  $F$ , alors  $q$  est défini puisque  $F_0$  poussé par  $\xi$  récupère cette trivialisat<sup>ion</sup> (cf. la proposition). Comparer au § V.

Pour montrer la proposition, supposons que  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  et  $g'$  proviennent d'une autre construction. Nous allons montrer qu'il existe un isomorphisme de fibrés  $\alpha: \nu(F_0, M) \rightarrow \nu(F_0, M)$  qui envoie  $\xi$  sur  $\xi'$ ,  $\eta$  sur  $\eta'$  et  $\zeta$  sur  $\zeta'$  à homotopie près. Il s'ensuivra que  $g|_{F_0}$  est régulièrement homotope à  $g'|_{F_0}$ .

Le complément  $\eta'$  de  $\xi'$  est isomorphe à  $\eta$  puisque tous les deux sont déterminés par  $w_1(\nu)$ . Donc  $\xi'$ ,  $\eta'$  et  $\alpha\mathfrak{F}_0$  conduisent comme précédemment à une trivialisat $\ddot{e}$ n  $\alpha\zeta$  du fibré tangent à  $E(\eta')$ . Si on peut montrer que  $\alpha\mathfrak{F}_0$  est une trivialisat $\ddot{e}$ n homotope à  $\mathfrak{F}_0$ , il s'en suivra que  $\alpha\zeta$  est homotope à  $\zeta'$ . Pour montrer cela, on regarde chaque composante de  $F_0$  comme une anse d'indice 0 avec quelques anses d'indice 1 attachées. Par une homotopie de fibré, on peut supposer que  $\alpha$  est l'identité sauf sur les anses d'indices 1 où  $\nu$  est trivialisé et où  $\alpha$  s'exprime comme une torsion lorsque l'on se déplace le long de l'âme d'une anse typique  $H$ . Comme  $H$  est contractile, on peut assurer que près de  $H$  dans  $M_0 - F_0$  ( $M_0 = M$  - les points ôtés à  $F$ ), la trivialisat $\ddot{e}$ n  $\mathfrak{F}_0$  est un produit de la trivialisat $\ddot{e}$ n de  $\mathbb{R}^2 - 0 = S^1 \times \mathbb{R}$  et de la trivialisat $\ddot{e}$ n standard de  $H = I \times I$ . Il est alors clair que  $\alpha$  envoie  $\mathfrak{F}_0$  sur elle-même (ce serait faux si  $\mathbb{R}^2 - 0$  avait la trivialisat $\ddot{e}$ n induite de celle de  $\mathbb{R}^2$ ).

. La classe d'homotopie régulière d'immersion  $g: F_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  obtenue ci-dessus détermine une unique classe d'homotopie régulière d'immersion  $g: F \rightarrow \mathbb{R}^3$  (cela suit de la classification des immersions de  $S^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  à homotopie régulière près) <sup>(†)</sup>.

D'après le point 1, à l'immersion  $g$  est associée une forme quadratique sur  $H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  et donc finalement un invariant de Brown  $\alpha(M, F) \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ .

. Nous laisserons maintenant le lecteur se convaincre de la cohérence de cette définition avec la nôtre. Bien entendu, il est aussi possible de continuer la preuve du théorème dans le langage de cet appendice. Nous allons seulement esquisser la preuve du lemme clé du § III dont nous rappelons l'énoncé.

Supposons que  $(M^4, F^2)$  soit bord de  $(V^5, G^3)$ , où  $V^5$  est une variété orientée compacte de dimension 5 et  $G^3$  une sous-variété caractéristique. Soit  $\Delta^2 \subset G^3$  une surface (non nécessairement orientable) telle que  $\Delta \cap F = \partial\Delta = C$  une courbe de  $F$ . Alors,  $q([C]) = 0$  dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  si  $[C] \in H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est représenté par  $C$ .

---

(†) Remarquons que l'on n'utilise pas vraiment  $g: F \rightarrow \mathbb{R}^3$ , mais seulement  $g_0: F_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dont l'existence est élémentaire.

En effet, puisque  $G$  est caractéristique, il existe une trivialisation du fibré tangent à  $V$  au-dessus du 3-squelette de  $V-G$ . Puisque  $\Delta^2$  a le type d'homotopie d'un 1-complexe, il existe un champ de vecteurs normal à  $G^3$  défini sur un voisinage de  $\Delta^2$ . Appelons ce voisinage  $G_\Delta^3$ . Soit  $\eta$  le complément de  $\xi$ ,  $\xi \oplus \eta = \nu(G_\Delta^3, V)$ . Le long d'une copie de  $G_\Delta^3$  translatée par  $\xi$ , on peut supposer que le premier vecteur de la trivialisation coïncide avec  $\xi$  et aussi que le dernier vecteur de la trivialisation est normal rentrant le long de  $\partial V^5$ . Alors, par projection parallèlement à  $\xi$ , on obtient une trivialisation du fibré tangent à  $E(\eta|G_\Delta)$ . Par restriction au bord, on obtient une trivialisation du fibré tangent à  $E(\eta|F_C)$  où  $F_C$  est un voisinage de  $C$  dans  $F^2$  qui est certainement celle utilisée dans la définition de  $q([C])$ .

De là, on déduit une immersion  $g: (G_\Delta^3, F_C^2) \rightarrow (\mathbb{R}_+^4, \mathbb{R}^3)$ . On remarque alors que le nombre d'enlacement de  $C$  et  $\partial F_C$  est égal au nombre d'intersection  $g(\partial G_\Delta^3) \cdot g(\Delta^2)$  qui est certainement nul puisque  $g(\partial G_\Delta)$  et  $g(\Delta)$  sont disjoints.

On remarquera que cette preuve, contrairement à celle donnée au § III n'utilise pas la formule de Wu, i.e. l'équivalence des définitions algébrique et homotopique du mot caractéristique.

#### REFERENCES

- [A'] N. A'CAMPO, Sur la première partie du 16e problème de Hilbert, Séminaire Bourbaki, n° 537 (1979).
- [A] V.I. ARNOLD, The arrangement of the ovals of real plane algebraic curves, involutions of four dimensional manifolds and the arithmetic of integral quadratic forms, Funkt. Analiz. i ego Pril. 5.3 (1971), 1-9 ; translation : Funct. Anal. Appl. 5 (1971), 169-176.
- [BLLV] J. BARGE, J. LANNES, F. LATOUR et P. VOGEL,  $\Lambda$ -sphères, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 7, fasc. 4 (1974), 463-506.
- [B] E.H. BROWN Jr., Generalizations of the Kervaire invariant, Ann. of Math. 95 (1972), 368-384.
- [D] S.K. DONALDSON, An application of gauge theory to four dimensional topology, J. Diff. Geom. 18 (1983), 279-315.
- [Fi] T. FIEDLER, Eine kongruenz für gitter und ihre anwendung auf 2k-mannigfaltigkeiten in 4k-mannigfaltigkeiten, Manuscripta Math. 46 (1984), 215-227.
- [Fr] M. FREEDMAN, The topology of four dimensional manifolds, J. Diff. Geom. 17 (1983), 357-454.

- [FK] M. FREEDMAN and R. KIRBY, Geometric proof of Rohlin's theorem, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 32, A.M.S. (1978), 85-97.
- [GM1] L. GUILLOU et A. MARIN, Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B 285 (1977), A95-A98.
- [GM2] L. GUILLOU et A. MARIN, Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature, Publ. Math. Univ. Paris VII, 9 (1980), 69-80.
- [GM3] L. GUILLOU et A. MARIN, Commentaires sur les articles de Rohlin, ce volume.
- [K] N. KUIPER, The quotient space of  $\mathbb{C}P(2)$  by complex conjugation is the 4-sphere, Math. Ann. 208 (1974), 175-177.
- [Mar1] A. MARIN, Quelques remarques sur les courbes algébriques planes réelles, Publ. Math. Univ. Paris VII, 9 (1980), 51-68.
- [Mar2] A. MARIN,  $\mathbb{C}P^2/\sigma$  ou Kuiper et Massey au pays des coniques, ce volume.
- [Mas1] W. MASSEY, Proof of a conjecture of Whitney, Pacific J. Math 31 (1969), 143-156.
- [Mas2] W. MASSEY, The quotient space of the complex projective plane under conjugation is a 4-sphere, Geom. Dedicata 2 (1973), 371-374.
- [Mat] Y. MATSUMOTO, An elementary proof of Rohlin's signature theorem and its extension by Guillou and Marin, ce volume.
- [MH] J. MILNOR and D. HUSEMOLLER, Symmetric bilinear forms, Springer-Verlag, New-York (1973).
- [R1] V.A. ROHLIN, New results in the theory of 4-dimensional manifolds, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 84 (1952), 221-224 ; traduction dans ce volume.
- [R2] V.A. ROHLIN, Proof of a conjecture of Gudkov, Funkt. Analiz. i ego Pril. 6.2 (1972), 62-64 ; translation : Funct. Anal. Appl. 6 (1972), 136-138.
- [S] N.E. STEENROD, Topology of fiber bundles, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1951).
- [T] V.G. TURAEV, Cohomology rings, linking forms and invariants of spin structures of three dimensional manifolds, Math. Sbornik Tom. 120 (162), 1983, n° 1, 68-83 ; translation : Math. USSR Sbornik, vol. 48 (1984), n° 1, 65-79.
- [W] H. WHITNEY, On the topology of differentiable manifolds, in Lectures on topology, Univ. of Michigan Press (1941), 101-141.





## **Deuxième partie**



# Le théorème de translation plane de Brouwer : une démonstration simplifiée menant à une nouvelle preuve du théorème de Poincaré-Birkhoff\*

LUCIEN GUILLOU

## 1. Enoncé du théorème et remarques historiques

Soit  $t$  un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sans point fixe et préservant l'orientation. Tout d'abord, Brouwer [Br2, theorem 3 : lire les trois lignes précédant l'énoncé du théorème] a cru qu'une telle transformation du plan était toujours conjuguée à la translation  $\tau(x, y) = (x + 1, y)$  (i.e. il existe  $\varphi$  homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\varphi t \varphi^{-1} = \tau$ ). Mais il se corrigeait rapidement [Br6, errata p.777], [Br7, note p.37] et donnait l'exemple suivant [Br7, Beispiel p.40], [Br9], [Br10, p.220] montrant qu'il n'en est pas ainsi.

Les courbes  $C_c$  d'équation  $x = \frac{1}{y(y-1)} + c$ ,  $c$  constante réelle, sont deux à deux disjointes et remplissent la bande  $0 < y < 1$  de  $\mathbb{R}^2$ . La transformation  $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$t(x, y) = \begin{cases} (x + 1, y) & \text{si } y \geq 1 \\ (x - 1, y) & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

et par  $t(x, y) = (x', y')$  si  $0 < y < 1$  et  $(x, y) \in C_c$  où  $y' < y$  et où la longueur de l'arc de  $C_c$  de  $(x, y)$  à  $(x', y')$  vaut 1, n'est pas conjuguée à  $\tau$  (figure 1).

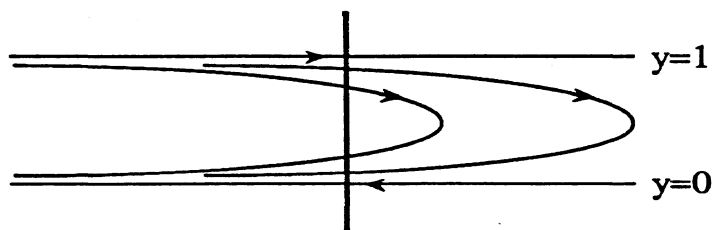


Figure 1

En effet, l'arc vertical figuré ci-dessus rencontre toutes ses images par les puissances de  $t$ , ce qui n'est le cas d'aucun compact sous les puissances d'une translation.

Puisque le théorème de translation a une preuve plus facile pour les homéomorphismes qui se plongent dans un flot  $C^1$  (cf. ci-dessous), signalons l'exemple suivant d'un homéomorphisme  $h$  (d'ailleurs  $C^\infty$ ) qui n'admet même pas de racine carrée (figure 1 bis).

---

\* Cette version tient compte des critiques du rapporteur.

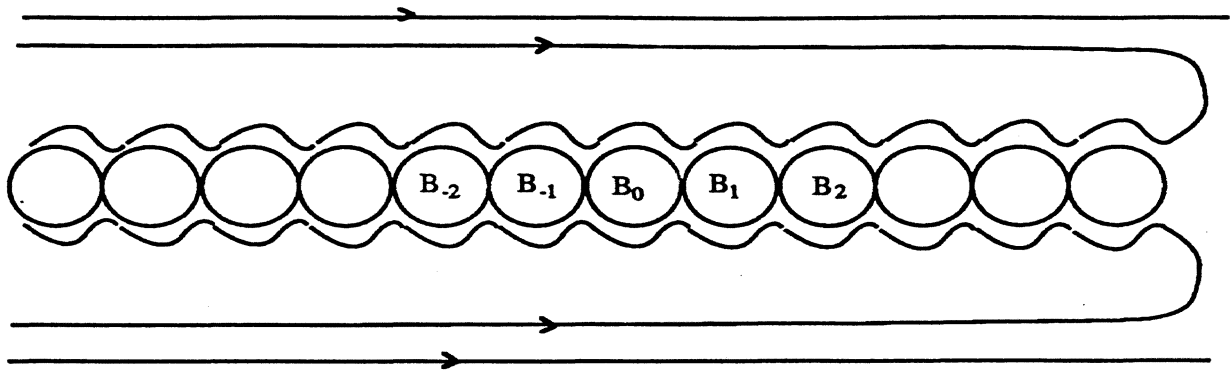


Figure 1bis

Sur la réunion des 2-disques fermés de rayon 1,  $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} B_i$ ,  $h$  est translation vers la gauche,  $h(B_i) = B_{i-1}$ , et hors de cette réunion  $h$  est obtenue en suivant sur une distance  $\pi$  les lignes indiquées. On pourrait aussi remplacer les disques  $B_i$  par n'importe quel compact cellulaire et ses translats.

L'énoncé du théorème finalement obtenu par Brouwer [Br7] nécessite une définition.

**DÉFINITION.** Un *domaine de translation* pour  $t$  est un ouvert connexe bordé par  $k$  et  $t(k)$  où  $k$  est une droite plongée proprement (donc fermée) telle que  $t^{-1}(k)$  et  $t(k)$  soient dans des composantes distinctes de  $\mathbb{R}^2 - k$  (le domaine ne rencontre pas son image) (figure 2).

**THÉORÈME DE TRANSLATION PLANE.** Soit  $t$  un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sans point fixe et préservant l'orientation. Alors tout point  $a \in \mathbb{R}^2$  appartient à un domaine de translation pour  $t$ .

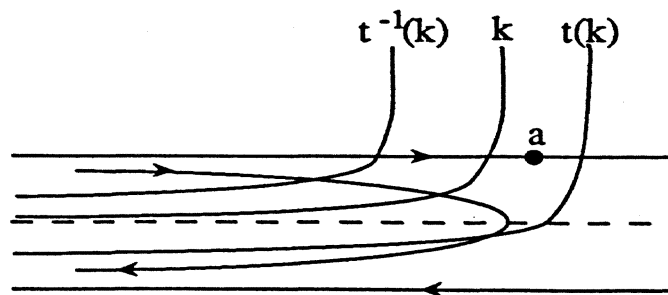


Figure 2

Signalons au passage que des caractérisations dans le même esprit des homéomorphismes conjugués à une translation (soit : admettant un domaine de translation  $D$  avec  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} t^n(\bar{D}) = \mathbb{R}^2$ ) ont été données un peu plus tard par Kérékjártó [K1], [K4] et Sperner [Sp]. Voir aussi Andréa [A2]. Leurs preuves s'avèrent bien plus faciles que celle du théorème de translation plane.

REMARQUE (C. BONATTI). Si  $t$  est plongé dans un flot  $C^1$ , le théorème de translation a une preuve rapide : on considère le champ de vecteurs orthogonal à celui définissant le flot qui contient  $t$ . Alors, comme pour tout champ de vecteurs sans zéro sur  $\mathbb{R}^2$ , toute orbite de ce flot orthogonal est propre (si une orbite n'était pas propre, en considérant un de ses points d'accumulation on construirait une transversale fermée au flot et le théorème de Poincaré-Bendixon conduirait alors à une contradiction). Une telle orbite est une ligne  $k$  comme demandé (les orbites du flot contenant  $t$  ne se recoupent pas et sont sans point double).

Le premier objet de cet article est de donner une preuve complète du théorème de translation plane. La preuve donnée par Brouwer [Br7] a toujours été considérée comme très difficile à suivre, sinon incomplète ou même fautive, cf. e.g. [Sp, p.9, note 1] ou [Sl1, p.277]. Aussi, dans les années 20, plusieurs auteurs, W. Scherrer [Sc], B.v. Kérékjártó [K2], I. Terasaka [T] et E. Sperner [Sp] ont publié des preuves, soit de lemmes nécessaires à la preuve [Sp], soit du théorème en admettant un certain nombre de résultats préliminaires [Sc], [T], soit complètes [K2]. Mais l'accord n'est pas encore réalisé : Kérékjártó [K4, p.226] critique sévèrement Sperner [Sp], et R. Barrar [Ba, p.336] en 1967 trouve encore "long and hard to follow" les preuves données par Sperner [Sp] et Kérékjártó [K2] d'un résultat crucial (ici théorème 2.3), qui dit que les trajectoires sont sans point double.

Quoi que l'on pense des arguments avancés par Brouwer (et aujourd'hui ils paraissent tous essentiellement corrects), tous les lemmes et concepts importants se trouvent clairement dégagés chez lui. Aussi la preuve que nous proposons, comme la sienne et toutes celles connues, se divise en deux parties.

Dans la première (paragraphe 2), en suivant grosso modo Sperner [Sp], nous montrons d'abord que les trajectoires sont sans point double. La nouveauté est un lemme de point fixe (généralisant [Sp, Satz 2]) qui permet d'une part de lisser l'exposé de Sperner et par ailleurs d'obtenir aisément un lemme-clé (2.5) qui donne immédiatement les propriétés topologiques essentielles des trajectoires.

De l'absence de point double sur les trajectoires, on déduit immédiatement que tous les points errent sous  $t$  (i.e. tout point du plan possède un voisinage  $V$  tel que  $V \cap t^n(V) = \emptyset$  pour tout  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ). Ce résultat, obtenu ici en moins de quatre pages, est très souvent la seule information donnée par le théorème de Brouwer que l'on utilise dans les travaux récents sur la dynamique des homéomorphismes de surfaces (cf. e.g. J. Franks [Fr1,2,3] et H. Winkelnkemper [W1]).

Ceci a incité récemment M. Brown [Bn1] et A. Fathi [Fa] à donner chacun leur preuve de ce résultat. Ces preuves introduisent des idées de "perturbation" dans le sujet, mais elles me semblent moins directes que celle présentée ici.

Dans la deuxième partie (paragraphe 3), on conclut en deux pages la démonstration du théorème de translation plane. Cette simplification suit de la considération nouvelle d'une cellulation localement finie de  $\mathbb{R}^2$ ,

dont les cellules sont libres, entièrement déterminée dès le début de la démonstration (une partie  $E$  de  $\mathbb{R}^2$  est *libre* si  $E \cap t(E) = \emptyset$  et *critique* si  $\mathring{E} \cap t(\mathring{E}) = \emptyset$  et  $\bar{E} \cap t(\bar{E}) \neq \emptyset$ ). Cette preuve s'inspire de celle de Terasaka [T], mais cet auteur construit une suite de carrés critiques (plus rares que les parties libres) dont chaque élément dépend du choix du précédent. La preuve de Kérékjártó [K2] contient les mêmes difficultés, plus d'autres.

Le théorème de translation plane n'est, malgré son importance, qu'un résidu des tentatives de Brouwer pour prouver un énoncé plus général auquel il a été conduit en étudiant le 5e problème de Hilbert sous la forme suivante : Soit un groupe localement compact qui agit effectivement sur une variété, est-ce un groupe de Lie? (ce problème n'est pas encore complètement résolu, voir C.T. Yang [Y]). Il a montré que la réponse est oui si la variété est un cercle ou une droite [Br1] et le cas où la variété est une surface l'a conduit (voir par exemple [Br5, p.199]) à un "théorème de translation généralisé" concernant les homéomorphismes des surfaces fermées orientées, ayant un nombre fini de points fixes, et affirmant (en première approximation) qu'il existe un ouvert connexe invariant sur lequel l'homéomorphisme est conjugué à une "translation" [Br2]. Malheureusement, la preuve esquissée par Brouwer [Br2] de ce résultat ne tient pas. En particulier, il suppose que tout compact connexe du plan est frontière commune d'au plus deux ouverts du complémentaire (il donnera lui-même le premier contre-exemple à cette assertion peu de temps après [Br3]).

L'énoncé même du "théorème généralisé" [Br2, p.179] et [Br4, p.295] n'est pas sans ambiguïté. Brouwer définit "*a transformation domain*" comme un ouvert connexe libre maximal (en un sens flou [Br4, p.286]) pour ces propriétés et énonce "*an arbitrary continuous one-one transformation of a two sided surface in itself with invariant indicatrix possesses a transformation domain, which either breaks the connection of the surface, or joins two points invariant for the transformation*". L'exemple simple d'un homéomorphisme de  $S^2$ , fixant les pôles obtenu en doublant l'homéomorphisme du disque de rayon 1 donné par  $h(r, \theta) = (r, \theta + \frac{3\pi}{2}r)$  semble déjà nécessiter de préciser l'énoncé. Kérékjártó [K3, p.237] propose la version suivante : "*Soient  $h$  un homéomorphisme préservant l'orientation d'une surface orientée, n'ayant qu'un nombre fini de points fixes et  $\tilde{h}$  un relèvement de  $h$  au revêtement universel (homéomorphe à  $\mathbb{R}^2$ ) de la surface privée de ses points fixes. Alors on peut construire un domaine de translation périodique (relativement aux transformations du revêtement) ayant pour frontière deux droites propres se projetant sur la surface en deux courbes fermées ou un domaine de translation bordé par deux droites propres, toutes deux convergeant dans les deux sens vers deux points fixes (qui peuvent éventuellement coïncider)*".

Le statut de cet énoncé est toujours en suspens. Kérékjártó [K3, p.238] en a annoncé une preuve qui n'est jamais parue, sauf dans le cas particulier qui correspond à la version topologique du théorème de Poincaré-Birkhoff [K2]. En effet, si l'on considère un homéomorphisme  $h$  de  $S^2$  muni de deux points fixes et préservant l'orientation, alors l'énoncé de Brouwer se réduit à celui de Poincaré-Birkhoff si de plus  $h$  préserve un

anneau séparant les deux points fixes et sur les disques complémentaires de l'anneau se réduit à des rotations "tournant dans des sens opposés" (figure 3) (voir le paragraphe 4).

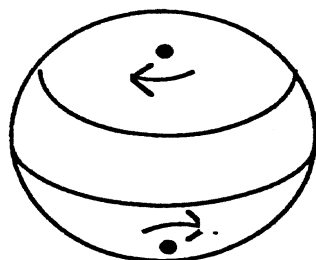


Figure 3

Il serait déjà intéressant de traiter les homéomorphismes de la sphère isotopes à l'identité (relativement aux points fixes). En tout cas, comme le remarque C. Bonatti, l'énoncé est vrai pour le temps 1 d'un flot  $C^1$  sur la sphère n'ayant qu'un nombre fini de singularités (brièvement : on considère le champ  $Y$  orthogonal au champ  $X$  du flot. Si  $Y$  admet une trajectoire fermée c'est gagné. Sinon, par Poincaré-Bendixon,  $Y$  admet une trajectoire qui joint deux singularités de  $Y$ . Si aucune orbite de  $X$  ne recoupe cet arc deux fois c'est gagné, sinon on fabrique une transversale fermée à  $X$ ).

Remarquons que, à la différence de ce qui se passe pour le théorème de translation plane, le "théorème généralisé" ne dit pas que tout point du revêtement universel de la surface privée de ses points fixes est dans un domaine de translation. Et ce n'est pas possible : dans le cas particulier précédent, les points des disques où  $h$  est une rotation ne sont pas revêtus par des points appartenant à un tel domaine.

Dernièrement Slaminka [S11] a montré une version forte de l'énoncé pour le cas particulier d'un homéomorphisme libre de la sphère  $S^2$  ayant un nombre fini de points fixes (libre au sens de M. Brown [Br2] : pour tout disque  $D \subset S^2$ , si  $h(D) \cap D = \emptyset$ , alors  $h^n(D) \cap D = \emptyset$  pour tout  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ). Notons encore que le cas général des homéomorphismes de  $S^2$  ayant deux points fixes est lié à la conjecture de Winkelkemper [W2] et semble aussi lié à une question de M. Herman [H] : existe-t-il un homéomorphisme de  $S^1 \times \mathbb{R}$  minimal (i.e. dont toutes les orbites sont denses) ?

Un autre cas particulier du "théorème généralisé" lié à des études récentes est celui d'un homéomorphisme  $h$  du tore  $T^2$  préservant l'orientation et sans point fixe. L'énoncé dit alors qu'il existe une courbe fermée simple  $k$  (non homotope à zéro) disjointe de son image par  $h$ . En particulier, un homéomorphisme de  $T^2$  homotope à l'identité, préservant la mesure de Lebesgue et le centre de gravité, devrait posséder au moins un point fixe. Ce dernier fait a été prouvé récemment par J. Franks [Fr1, Cor. 3.3] et Slaminka [S12] a annoncé qu'un tel homéomorphisme avait trois points fixes (si  $h$  est en plus un difféomorphisme ce résultat remonte à Conley et Zehnder [CZ]). D'ailleurs, l'énoncé de Brouwer implique déjà l'existence de deux points fixes pour de tels homéomorphismes.



Actuellement, nous ne savons prouver aucun de ces cas particuliers et comme motif d'optimisme nous pouvons seulement, comme Kérékjártó [K2], déduire le théorème de Poincaré-Birkhoff du théorème de translation. C'est l'objet du paragraphe 4.

Une première version de ce travail contenait une telle déduction mais plutôt compliquée, résidu de tentatives contre le "théorème généralisé".

En fait, comme me l'a fait remarquer C. Bonatti, le fait que les droites propres, frontières de domaine de translation, que nous construisons peuvent être choisies dans le 1-squelette d'une cellulation, permet de donner une preuve simple du théorème de Poincaré-Birkhoff au point que ce dernier apparaît comme un corollaire assez facile du théorème de translation plane. L'argument de Bonatti s'est d'ailleurs révélé être essentiellement le même que celui de R. Barrar [B], mais celui-ci, partant d'une droite propre quelconque, devait utiliser en plus la représentation conforme pour conclure. Pour d'autres preuves topologiques de ce théorème, voir par exemple [Bi1], [Bi2], [BnN], [C], [Fr].

Finalement, dans le paragraphe 5, nous collectons quelques propriétés supplémentaires des trajectoires, parfois utiles (cf. [W3]), et qui précisent la situation.

## 2. Théorie des trajectoires

On considère deux disques topologiques fermés  $C$  et  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  et leurs bords respectifs  $c$  et  $d$ . On suppose que  $\overset{\circ}{C} \cap \overset{\circ}{D} \neq \emptyset$  et que  $C \neq C \cup D \neq D$ , et on choisit une composante  $\overset{\circ}{J}$  (d'adhérence notée  $J$ ) de  $\overset{\circ}{C} \cap \overset{\circ}{D}$ .

Dans cette situation, nous dirons que  $D$  déborde de  $C$  le long d'un arc  $\gamma \subset c$  si  $\gamma \subset Fr J$ ,  $\overset{\circ}{\gamma} \subset \overset{\circ}{D}$  et si  $\gamma$  a ses extrémités dans  $d$  (figure 4).

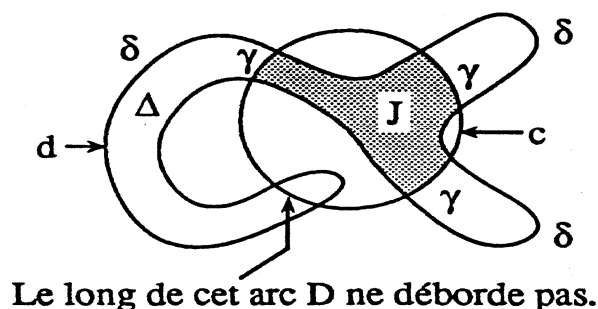


Figure 4

Les extrémités d'un arc  $\gamma$  de débordement déterminent sur  $d$  un arc  $\delta$  qui ne rencontre pas  $\overset{\circ}{J}$  et  $\gamma \cup \delta$  est une courbe fermée simple qui borde un disque  $\Delta$  tel que  $\overset{\circ}{\Delta} \cap \overset{\circ}{J} = \emptyset$ .

On note que tous les points de  $D$  hors de  $J$  sont dans un tel disque  $\Delta$ , qu'il y a au plus une famille dénombrable d'arcs de débordement, notés  $\gamma_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , et que lorsque  $i \rightarrow \infty$ ,  $\text{diamètre}(\gamma_i) \rightarrow 0$ ,  $\text{diamètre}(\delta_i) \rightarrow 0$  et  $\text{diamètre}(\Delta_i) \rightarrow 0$ , où  $\delta_i$  et  $\Delta_i$  sont les arcs de  $d$  et les disques associés aux  $\gamma_i$ .

On note enfin que  $FrJ$ , étant obtenue de  $d$  en substituant aux arcs  $\delta_i$  les arcs  $\gamma_i$  correspondants, est une courbe fermée simple et donc que  $J$  est homéomorphe à un disque.

**2.1. LEMME DE POINT FIXE.** *Si dans la situation précédente, une application continue  $f : C \rightarrow D$  vérifie  $f(\overset{\circ}{\gamma}_i) \cap (\Delta_i - \gamma_i) = \emptyset$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , alors  $f$  a un point fixe. (Cette condition équivaut à  $f(\overset{\circ}{\gamma}_i) \cap \delta_i = \emptyset$  dans le cas où  $f$  est un homéomorphisme de  $C$  sur  $D$ .)*

PREUVE : Soit, pour tout  $i$ ,  $\rho_i$  une rétraction de  $\Delta_i$  sur  $\gamma_i$  telle que  $\rho_i(\Delta_i - \gamma_i) \subset \overset{\circ}{\gamma}_i$ . Soit  $F : J \rightarrow J$  définie par  $F(p) = f(p)$  si  $f(p) \in J$  et  $F(p) = \rho_i(f(p))$  si  $f(p) \in \Delta_i$ . Alors,  $F$  est continue car  $\text{diamètre}(\Delta_i) \rightarrow 0$ ; donc  $F$  a un point fixe  $p_0$  car  $J$  est un disque (par un autre théorème célèbre de Brouwer!).

Si  $f(p_0) \notin J$ , alors  $f(p_0) \in \Delta_i - \gamma_i$  pour un certain  $i$ , donc  $F(p_0) \in \overset{\circ}{\gamma}_i$  et  $p_0 = F(p_0)$  aussi. Mais alors  $f(p_0) \in f(\overset{\circ}{\gamma}_i) \cap (\Delta_i - \gamma_i) = \emptyset$  ce qui est absurde. Donc,  $f(p_0) \in J$  et  $f(p_0) = F(p_0) = p_0$ .

DÉFINITIONS.

1) Un *arc de translation* est un arc simple  $\alpha$  d'extrémités  $p$  et  $t(p)$  (pour un  $p \in \mathbb{R}^2$ ) tel que  $\alpha \cap t(\alpha) = \emptyset$ .

2) Une *trajectoire*  $\ell$  est la courbe engendrée par un arc de translation  $\alpha$  sous l'action de  $t : \ell = \ell(\alpha) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} t^n(\alpha)$ .

On conviendra d'orienter les trajectoires de sorte que si  $\ell = \ell(\alpha)$ ,  $\alpha$  soit orienté positivement de  $p$  vers  $t(p)$ .

**2.2. LEMME.** *Par tout point  $a$  du plan passe un arc de translation (et donc une trajectoire).*

PREUVE : Soit  $D(r)$  le disque centré en  $a$  de rayon  $r$  et soit  $\rho = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid D(r) \cap t(D(r)) = \emptyset\}$ . Alors,  $\rho > 0$  car  $a \neq t(a)$ ,  $D(\rho) \cap t(D(\rho)) = Fr(D(\rho)) \cap t(Fr(D(\rho)))$  et  $\overset{\circ}{D}(\rho) \cap t(\overset{\circ}{D}(\rho)) = \emptyset$ . Soit  $q \in Fr(D(\rho)) \cap t(Fr(D(\rho)))$  et posons  $q = t(p)$  où  $p \in Fr(D(\rho))$ . La réunion des rayons  $pa$  et  $aq$  est alors un arc de translation.

**2.3. THÉORÈME.** *Les trajectoires sont sans point double.*

**2.4. COROLLAIRE.** *Pour tout  $n \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $t^n$  est sans point fixe. En d'autres termes, un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation et sans point périodique est sans point fixe.*

REMARQUE. G. Johnson [Jo] a construit un homéomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}^2$  sans point fixe (ne préservant pas l'orientation!) tel que  $h^n$  a un point fixe pour tout  $n \geq 2$ .

PREUVE : Si la trajectoire  $\ell = \ell(\alpha)$  où  $\alpha$  est d'extrémités  $p$  et  $t(p)$  a un point double, alors  $\alpha - \{t(p)\} \cap t^n(\alpha - \{t(p)\}) \neq \emptyset$  pour au moins un  $n \geq 1$ . Soit  $k$  le plus petit de tels  $n$  et soit  $q$  le premier point de  $\alpha$  sur  $t^k(\alpha)$  à partir de  $t^k(p)$ .

On a  $q \neq t(p)$  et la courbe  $c = qt(p) \cup t(\alpha) \cup \dots \cup t^{k-1}(\alpha) \cup t^k(p)q$ , où  $qt(p)$  est l'arc de  $q$  à  $t(p)$  sur  $\alpha$  et  $t^k(p)q$  l'arc de  $t^k(p)$  à  $q$  sur  $t^k(\alpha)$ , est une courbe fermée simple qui borde un disque  $C$ . Si  $d = t(c)$  et  $D = t(C)$ , les courbes  $c$  et  $d$  ont l'arc  $t(q)q \subset t(\alpha) \cup \dots \cup t^k(\alpha)$  en commun et donc, puisque  $t$  préserve l'orientation,  $\overset{\circ}{C} \cap \overset{\circ}{D} \neq \emptyset$ . On dénote par  $\overset{\circ}{J}$  la composante de  $\overset{\circ}{C} \cap \overset{\circ}{D}$  ayant l'arc  $t(q)q$  dans son bord. On est alors dans la situation du lemme de point fixe. Supposons d'abord  $k \geq 2$  (figure 5).

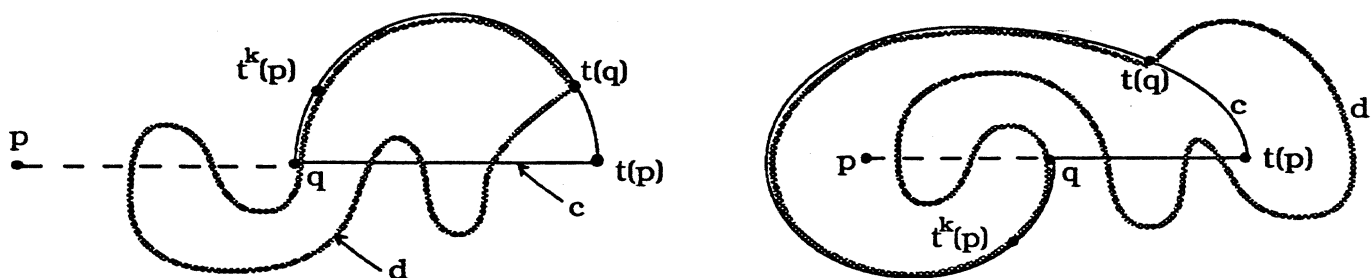


Figure 5

Deux possibilités : ou bien l'arc  $pq$  (éventuellement dégénéré) de  $\alpha$  ne rencontre pas  $\overset{\circ}{C}$  et alors l'arc  $t(p)t(q) \subset t(\alpha) \subset c$  ne rencontre pas  $\overset{\circ}{D}$ . Dans ce cas,  $D$  ne peut déborder de  $C$  qu'à travers l'arc  $\gamma = qt(p) \subset \alpha$  de  $c$ . Mais  $t(\gamma)$  est l'arc  $t(q)t^2(p) \subset t(q)q \subset c \cap d$  ( $k \geq 2$ ). Donc, le lemme de point fixe s'applique à  $t : C \rightarrow D$  pour donner une contradiction.

Ou bien, l'arc  $pq$  est inclus dans  $C$  et alors l'arc  $t(p)t(q) \subset c$  est inclus dans  $D$ .

On considère alors  $t^{-1} : D \rightarrow C$ . Dans ce cas,  $C$  ne peut déborder de  $D$  qu'à travers l'arc  $\delta = qt(q) \subset d$ . Mais  $t^{-1}(\delta) = t^{-1}(q)q \subset (c \cap d) \cup t(p)t(q)$  (si  $k = 2$ ,  $t^{-1}(q)$  peut précéder  $t(q)$  sur  $t(\alpha) \subset c$ ); donc  $t^{-1}(\delta)$  ne rencontre pas l'arc  $qt(p)$  de  $c$ . Donc le lemme de point fixe s'applique encore.

Terminons par le cas  $k = 1$ . Puisque  $\alpha \cap t(\alpha) = \emptyset$ , nécessairement  $q = p$  et  $\alpha - \{t(p)\} \cap t(\alpha - \{t(p)\}) = \{p\}$ .

Alors  $c = \alpha \cup t(p)p$  où l'arc  $t(p)p$  est inclus dans  $t(\alpha)$ ,  $d = t(c)$ , et  $C$  et  $D$  sont les disques bordés par  $c$  et  $d$  (figure 6).

On distingue deux cas selon que l'arc  $pt^2(p) \subset t(\alpha)$  est inclus dans  $C$  ou bien ne rencontre pas  $\overset{\circ}{C}$ . Dans le premier cas, le lemme de point fixe s'applique à  $t : C \rightarrow D$ , et dans le second à  $t^{-1} : D \rightarrow C$ .

**2.5. PROPOSITION.** Si  $D$  est un disque fermé tel que  $D \cap t(D) = \emptyset$ , alors  $D \cap t^n(D) = \emptyset$  pour tout  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ .

Autrement dit, les points errent sous  $t$  et par conséquent  $\{t^n(p) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  est sans point d'accumulation pour tout  $p \in \mathbb{R}^2$ .

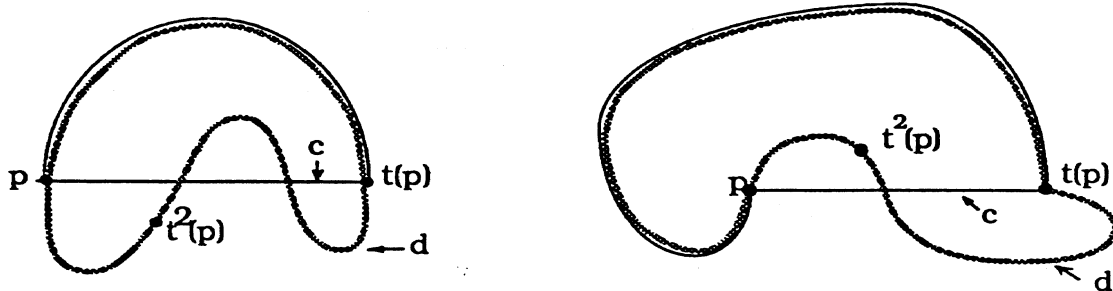


Figure 6

REMARQUE. S. Boyles [Bo] a donné un exemple d'un homéomorphisme de  $\mathbf{R}^2$  (renversant l'orientation!) sans point fixe dont toutes les orbites sont bornées.

PREUVE : On peut supposer que  $D$  est la boule fermée  $D(1)$  de rayon 1. Si  $q \in D \cap t^n(D)$  ( $n \neq -1, 0, 1$ ), alors  $q$  et  $t^{-n}(q)$  appartiennent à  $D(1)$ . Soit  $s \in \text{Fr}(D(\rho)) \cap t(\text{Fr}(D(\rho)))$  et posons  $s = t(u)$  où  $u \in \text{Fr}(D(\rho))$ . En joignant, dans  $\mathring{D}(\rho)$ ,  $u$  à  $s$  en passant par  $q$  et  $t^{-n}(q)$ , on construit comme dans le lemme 2.2 un arc de translation  $\alpha$  et une trajectoire  $\ell(\alpha)$  se recoupant puisque  $q \in \alpha \cap t^n(\alpha)$  (figure 7).

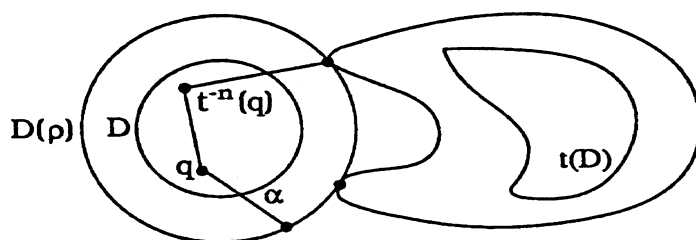


Figure 7

Supposons par ailleurs que  $q$  soit un point d'accumulation de  $\{t^n(p) \mid n \in \mathbf{Z}\}$ . Soit  $D$  un disque tel que  $q \in \mathring{D}$  et  $D \cap t(D) = \emptyset$ . Par hypothèse, il existe  $k, \ell \in \mathbf{Z}$ ,  $k > \ell$ , tels que  $t^k(p), t^\ell(p) \in D$  et donc  $t^k(p) = t^{k-\ell}(t^\ell(p)) \in t^{k-\ell}(D) \cap D$ . Contradiction.  $\square$

**2.6. LEMME CLÉ.** Soit  $\lambda$  un arc simple d'extrémités  $p$  et  $q$  et  $\mu$  un arc de trajectoire de mêmes extrémités vérifiant  $t(p) \in \overset{\circ}{\mu}$ . Si  $\lambda \cup \mu$  forme une courbe fermée simple, alors  $\lambda \cap t(\lambda) \neq \emptyset$ .

PREUVE : Supposons  $\lambda \cap t(\lambda) = \emptyset$  et posons  $c = \lambda \cup \mu$ ,  $d = t(c)$ . Désignons par  $C$  le disque bordé par  $c$  et par  $D = t(C)$  celui bordé par  $d$ . Les courbes  $c$  et  $d$  ont l'arc  $t(p)q = t(\mu) \cap \mu$  en commun et puisque  $t$  préserve l'orientation,  $C$  et  $D$  sont du même côté de cet arc. On dénote par  $\mathring{J}$  la composante de  $\overset{\circ}{C} \cap \overset{\circ}{D}$  ayant l'arc  $t(p)q$  dans son bord.

Le but est d'obtenir une contradiction avec l'hypothèse  $t(\lambda) \cap \lambda = \emptyset$  grâce au lemme de point fixe.

Montrons d'abord que  $t(q)$  est extérieur à  $C$  si et seulement si  $p$  est intérieur à  $D$  (notons que  $t(q) \in \lambda$  et  $p \notin t(\lambda)$ ).

On peut supposer que  $c$  est un carré dont  $\mu$  est un côté. Soit alors  $\lambda'$  un arc joignant  $t(p)$  à un point  $q'$  de  $t(\mu)$ , constitué de segments parallèles aux côtés de  $c$ , orthogonal à  $\mu$  en  $t(p)$ , transverse à  $\mu$ , si proche de  $t(\lambda)$  que  $\lambda \cap \lambda' = \emptyset$  et que  $q' \in \overset{\circ}{C}$  ou  $q' \notin C$  selon que  $t(q) \in \overset{\circ}{C}$  ou  $t(q) \notin C$ , et tel que  $\lambda' \cap t(\mu) = \{t(p), q'\}$ . Notons  $D'$  le disque bordé par  $\lambda' \cap t(\mu)$ ; si  $\lambda'$  est assez proche de  $t(\lambda)$ ,  $p \in \overset{\circ}{D}'$  si et seulement si  $p \in \overset{\circ}{D}$ .

Au départ de  $\lambda'$ , orienté de  $t(p)$  vers  $q'$ , on se dirige vers l'intérieur (ou l'extérieur) de  $C$ . Donc, puisque  $C$  et  $D'$  sont du même côté de  $t(\mu) \cap \mu$ , en allant de  $t(p)$  vers  $p$  sur  $\mu$ , on commence par se diriger vers l'extérieur (ou l'intérieur) de  $D'$  (figure 8).

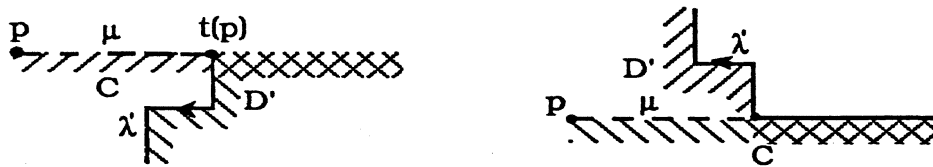


Figure 8

Dans la première éventualité, si  $t(q)$  est extérieur (resp. intérieur) à  $C$ ,  $\lambda' \cap c - \{t(p)\} = \lambda' \cap pt(p) - \{t(p)\}$  est un nombre impair (resp. pair) de points et  $p$  est intérieur (resp. extérieur) à  $D'$ . Dans la seconde on raisonne de même.

Supposons maintenant que  $t(q)$  est intérieur à  $C$  (et  $p$  extérieur à  $D$ ), on peut alors appliquer le lemme de point fixe à  $t : C \rightarrow D$ . En effet, si  $r$  est le premier point de  $\lambda \cap t(\mu)$  sur  $\lambda$  à partir de  $p$ ,  $D$  ne peut déborder de  $C$  que le long des arcs  $rq \subset \lambda$  ou  $pt(p) \subset \mu$ . Dans la première éventualité, l'arc  $\delta$  associé à un arc  $\gamma$  de débordement se situe dans  $t(\mu)$  et donc  $t(\gamma) \cap \delta \subset t(\lambda) \cap t(\mu) = \emptyset$ . Dans la seconde,  $\delta$  se situe dans  $t(\lambda)$  et donc  $t(\gamma) \cap \delta \subset t(\mu) \cap t(\lambda) = \emptyset$ .

Si  $t(q)$  est extérieur à  $C$  (et  $p$  intérieur à  $D$ ), on peut appliquer le lemme de point fixe à  $t^{-1} : D \rightarrow C$ . On raisonne exactement comme dans le cas précédent en échangeant  $p$  et  $t(q)$ ,  $\mu$  et  $t(\mu)$ ,  $\lambda$  et  $t(\lambda)$  (figure 9).

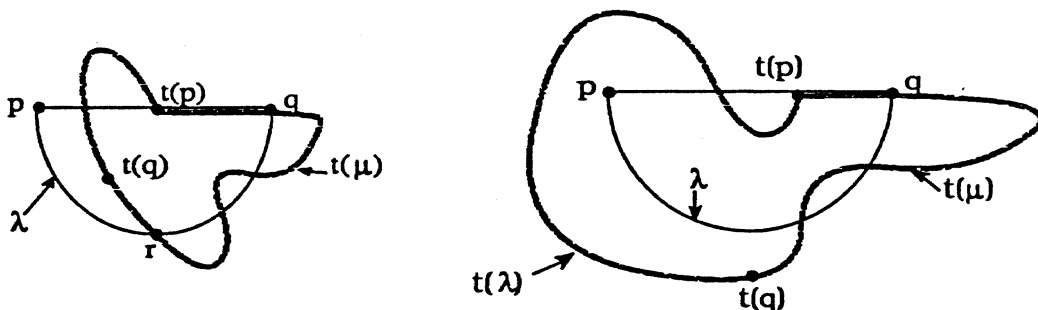


Figure 9

**2.7. PROPOSITION.** (a) Toute trajectoire  $\ell$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ . Autrement dit, étant donné un point  $p$  de  $\ell$  et un arc  $\lambda \subset \ell$  tel que

$p \in \lambda$ , il existe un voisinage  $V$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $V \cap \ell = V \cap \lambda$ . En particulier,  $\bar{\ell} - \ell$  est fermé.

(b) Soit  $\Lambda$  la composante connexe du complémentaire de  $\bar{\ell} - \ell$  qui contient  $\ell$ . Alors,  $\ell$  divise  $\Lambda$  en deux ouverts connexes par arcs de frontière commune (dans  $\Lambda$ )  $\ell$ .

REMARQUE. Une trajectoire  $\ell$  n'est pas nécessairement une sous-variété fermée de  $\mathbb{R}^2$ . Soit :  $\bar{\ell} - \ell$  peut être non vide.

En effet dans l'exemple de la page 1, la trajectoire  $\ell = \ell(\alpha)$  engendrée par l'arc de translation figuré ci-dessous (figure 10) vérifie  $\bar{\ell} - \ell = \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ .

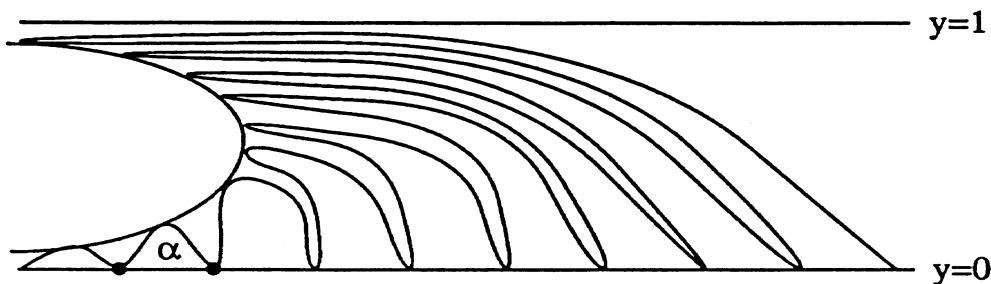


Figure 10

PREUVE : (a) Soit  $\alpha \subset \ell$  un arc de translation tel que  $p \in \alpha$  et choisissons  $V$  assez petit pour que  $V \cap t(V) = \emptyset$ ,  $V \cap (t^{-1}(\alpha) \cup t(\alpha)) = \emptyset$  et  $V \cap \alpha = V \cap \lambda$ . S'il existait  $n > 1$  (ou  $n < -1$ ) tel que  $V \cap t^n(\alpha) \neq \emptyset$ , un arc  $\mu \subset V$  irréductible de  $p$  à  $\bigcup_{i=2}^n t^i(\alpha)$  (ou  $\bigcup_{i=n}^{-2} t^i(\alpha)$ ) vérifierait les hypothèses du lemme clé et donc  $\mu \cap t(\mu) \neq \emptyset$ , ce qui contredit  $\mu \subset V$ .

(b) Tout d'abord,  $\Lambda - \ell$  n'est pas connexe par arcs. En effet, considérons un arc simple  $\mu \subset \Lambda$  d'extrémités  $p$  et  $q$  coupant  $\ell$  en un seul point  $r$  (un tel arc existe par (a)). Si  $\Lambda - \ell$  était connexe, on pourrait joindre  $p$  à  $q$  dans  $\Lambda - \ell$  par un arc  $\lambda$ . En extrayant alors de  $\mu$  et  $\lambda$  des arcs convenables, on obtiendrait une courbe fermée simple  $c$  coupant  $\ell$  en un seul point  $r$ . Mais alors une des composantes de  $\ell - \{r\}$  serait toute entière dans le compact bordé par  $c$ , ce qui contredit la proposition 2.5 (les points errent).

D'autre part, tout point  $s$  de  $\Lambda - \ell$  peut être joint à  $p$  ou à  $q$  dans  $\Lambda - \ell$ . Il suffit pour cela de joindre  $s$  à un point de  $\ell$  dans  $\Lambda$  par un arc  $\nu$ . Puisque  $\nu \subset \Lambda$ ,  $\nu$  ne rencontre pas les points d'accumulation de  $\ell$  et on peut en extraire un arc  $\nu'$  de  $s$  à  $\ell$  ayant seulement une extrémité  $s'$  sur  $\ell$ . Maintenant on peut supposer que  $\nu'$  et l'arc  $s'r$  de  $\ell$  sont des segments linéaires orthogonaux et l'on peut joindre un point  $s''$  de  $\nu'$  proche de  $s'$  à  $p$  (ou  $q$ ) dans  $\Lambda - \ell$  en suivant parallèlement  $s'r$  (puisque  $\ell$  ne s'accumule pas sur  $s'r$ ).

### 3. Preuve du théorème de translation

On appellera *cellulation* d'un espace  $X$  un recouvrement localement fini de  $X$  par des cellules homéomorphes à des disques fermés tel que

(i) les intérieurs des cellules (i.e. les images des intérieurs des disques homéomorphes aux cellules) constituent une partition de  $X$  en ensembles disjoints,

(ii) l'intersection de deux  $i$ -cellules est soit vide soit exactement une  $(i - 1)$ -cellule,  $i \in \mathbb{N}$ .

Rappelons qu'une partie  $E$  de  $\mathbb{R}^2$  est *libre* si  $E \cap t(E) = \emptyset$ .

Soit  $a$  un point de  $\mathbb{R}^2$  et  $\alpha$  un arc de translation passant par  $a$ .

La preuve réclame les deux lemmes suivants :

**3.1. LEMME.** *Il existe une cellulation  $K$  de  $\mathbb{R}^2$  dont  $\alpha$  est un sous-complexe et dont toute étoile est libre (l'étoile d'un sommet de  $K$  est l'union des 2-cellules fermées de  $K$  possédant ce sommet).*

PREUVE : On peut supposer que  $\alpha$  est un segment linéaire. On écrit ensuite  $\mathbb{R}^2$  comme une union croissante de carrés  $C_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , avec  $\alpha \subset \overset{\circ}{C}_0$  et  $C_i \subset \overset{\circ}{C}_{i+1}$ . Il est alors facile de trouver des cellulations de  $C_0$  puis de chaque couronne  $C_{i+1} - \overset{\circ}{C}_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , qui s'unissent en une cellulation de  $\mathbb{R}^2$  comme cherchée.

**3.2. LEMME.** *Soit  $\ell = \ell(\alpha)$  une trajectoire et  $K$  une cellulation de  $\mathbb{R}^2$ , dont  $\alpha$  est un sous-complexe et dont toute étoile est libre. Alors, de chaque côté de  $\alpha$ , il y a au moins une 2-cellule de  $K$  adjacente à  $\alpha$  sans point commun aussi bien avec  $t^{-1}(\alpha)$  qu'avec  $t(\alpha)$ . Et donc, d'après le lemme-clé, sans point commun avec  $\ell - \alpha$ .*

PREUVE : Orientons l'arc de translation  $\alpha = pt(p)$  de  $p$  vers  $t(p)$  et regardons les 2-cellules de  $K$  adjacentes à  $\alpha$  d'un côté de  $\alpha$ . La première rencontre  $t^{-1}(\alpha)$  (en  $p$  au moins) et la dernière  $t(\alpha)$ . Donc, si toutes les 2-cellules considérées rencontrent  $t^{-1}(\alpha)$  ou  $t(\alpha)$ , il y en a deux consécutives, de sommet commun  $q$ , dont l'union rencontre à la fois  $t^{-1}(\alpha)$  et  $t(\alpha)$ . Cela n'est pas possible. En effet, dans ce cas, un arc irréductible  $\lambda$  dans l'étoile de  $q$  de  $t^{-1}(\alpha)$  à  $t(\alpha)$  ne rencontrant pas  $\alpha$  vérifierait les hypothèses du lemme clé et donc  $\lambda \cap t(\lambda) \neq \emptyset$  mais l'étoile de  $q$  est libre.

PREUVE DU THÉORÈME DE TRANSLATION : Soit  $\alpha_0 = p_0 t(p_0)$  un arc de translation passant par  $a$  et soit  $\ell_0 = \ell(\alpha_0)$  la trajectoire engendrée par  $\alpha_0$ . D'après la proposition 2.7,  $\ell_0$  découpe la composante connexe  $\Lambda_0$  de  $\mathbb{R}^2 - (\bar{\ell}_0 - \ell_0)$  qui la contient en deux régions  $\Lambda_0^g$  et  $\Lambda_0^d$  invariantes par  $t$  et de frontière commune (dans  $\Lambda_0$ )  $\ell_0$ .

Nous allons construire une demi-droite, homéomorphe à  $[0, +\infty[$ , d'origine un point de  $\alpha_0$ , libre et proprement plongée dans  $\Lambda_0^d$  (à l'exception de son origine).

Pour cela, considérons une cellulation  $K$  de  $\mathbb{R}^2$ , donnée par le lemme 3.1, dont toutes les étoiles sont libres et dont  $\alpha_0$  est un sous-complexe. Et soit  $\Delta_0$  une 2-cellule (donnée par le lemme 3.2) de  $\Lambda_0^d \cup \ell_0$  adjacente à  $\alpha_0$  qui ne rencontre ni  $t^{-1}(\alpha_0)$  ni  $t(\alpha_0)$ . On construit alors un arc  $\alpha_1$  constitué de l'arc dans  $\alpha_0$  de  $p_0$  au premier point de  $\Delta_0$  (disons  $r_0$ ), de l'arc dans  $\alpha_0$  du dernier point de  $\Delta_0$  (disons  $t_0$ ) à  $t(p_0)$  et de l'arc de  $r_0$  à  $t_0$  dans  $\overline{Fr} \Delta_0 - \alpha_0$ . Puisque  $\Delta_0$  ne rencontre ni  $t^{-1}(\alpha_0)$  ni  $t(\alpha_0)$ , l'arc  $\alpha_1$  est de nouveau un arc de translation de  $p_0$  à  $t(p_0)$ . Il engendre une trajectoire  $\ell_1 = \ell(\alpha_1) \subset \Lambda_0^d \cup \ell_0$  qui borde deux régions  $\Lambda_1^g$  et  $\Lambda_1^d$  (composantes connexes de  $\mathbb{R}^2 - \ell_1$ ) avec  $\Lambda_1^g \supset \Lambda_0^g$  et  $\Lambda_0^d \supset \Lambda_1^d$ . Puisque  $\alpha_1$  est un sous-complexe de  $K$ , on peut de nouveau appliquer le lemme 3.2 et construire un nouvel arc de translation  $\alpha_2$  de  $p_0$  à  $t(p_0)$ . On continue ainsi pour obtenir une suite de 2-cellules libres  $\Delta_n$ , d'arcs de translation  $\alpha_n$  de  $p_0$  à  $t(p_0)$ , de trajectoire  $\ell_n = \ell(\alpha_n)$  et de régions  $\Lambda_n^d$  invariantes par  $t$  avec  $\Lambda_n^d \supset \Lambda_{n+1}^d$  et  $\Delta_n \subset \Lambda_n^d \cup \ell_n - \Lambda_{n+1}^d$ .

Donc tous les  $\Delta_n$  sont distincts et si  $L \subset K$  est le sous-complexe union des  $\Delta_n$ ,  $L$  est libre. Pour tout  $n \geq 1$ , un côté de  $\Delta_n$  est sur  $\alpha_{n-2}$  ou sur  $\Delta_{n-1}$  et par suite chacune des composantes connexes de  $L$  a un côté en commun avec  $\alpha_0$ . Donc ces composantes sont en nombre fini. Soit  $H$  l'une d'entre elles contenant une infinité de 2-cellules. Alors, le 1-squelette de  $H$  contient une ligne plongée  $k^d$  issue de  $q^d \in \alpha_0$  qui fournit la demi-droite cherchée.

De même, on construit dans  $\Lambda_0^g$  une ligne  $k^g$  issue d'un point  $q^g \in \alpha_0$  proprement plongée et libre.

On considère enfin  $k = k^d \cup q^g q^d \cup k^g$  où  $q^g q^d$  est l'arc de  $q^g$  à  $q^d$  dans  $\alpha_0$ . C'est une droite proprement plongée dans  $\mathbb{R}^2$  avec  $t^{-1}(k)$  et  $t(k)$  dans des composantes distinctes de  $\mathbb{R}^2 - k$  (déjà  $\alpha_0$  a ses extrémités de part et d'autre de  $k$ ). Si  $a \notin k$ , on a terminé. Si  $a \in k$ , il suffit de modifier  $k$  près de  $a$ .

#### 4. Le théorème de Poincaré-Birkhoff

Soit  $\pi$  la projection de la bande  $B = \mathbb{R} \times [0, 1]$  sur l'anneau  $A = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$ . On note  $\tau : B \rightarrow B$  la translation  $\tau(x, y) = (x+1, y)$ . Les composantes du bord de  $B$  (resp.  $A$ ) sont  $\partial_0 B = \mathbb{R} \times \{0\}$  et  $\partial_1 B = \mathbb{R} \times \{1\}$  (resp.  $\partial_0 A$  et  $\partial_1 A$ ). On note  $b_0 = (0, 0) \in \partial_0 B$  et  $a_0 = \pi(b_0) \in \partial_0 A$ .

Un homéomorphisme  $H : (A; \partial_0 A, \partial_1 A) \leftarrow a$  a un unique relèvement dit *canonique*  $h : (B; \partial_0 B, \partial_1 B) \leftarrow$  tel que  $h(b_0)$  soit dans l'intervalle  $[b_0, \tau(b_0)[$  de  $\partial_0 B$ . Notons que  $h$  et  $\tau$  commutent.

**4.1. THÉORÈME.** *Soit  $H : (A; \partial_0 A, \partial_1 A) \leftarrow$  un homéomorphisme sans point fixe. Alors*

*ou il y a dans  $A$  une courbe simple fermée non homotope à zéro disjointe de son image par  $H$ ,*

*ou il y a dans  $B$  un arc essentiel (i.e. joignant  $\partial_0 B$  et  $\partial_1 B$ ) disjoint de son image par le relevé canonique  $h$  de  $H$ .*



## 4.2. REMARQUES.

1) Les deux cas du théorème ne sont pas exclusifs.

2) Un homéomorphisme  $H : (A; \partial_0 A, \partial_1 A) \leftarrow$  (resp.  $k : (B; \partial_0 B, \partial_1 B) \leftarrow$ ) sans point fixe est isotope à l'identité.

3) Dans le second cas,  $h$  est conjugué à  $\tau$  en vertu du lemme suivant dû à Winkelkemper [W2].

**4.3. LEMME.** *Un homéomorphisme sans point fixe  $k : (B; \partial_0 B, \partial_1 B) \leftarrow$  commutant à  $\tau$  est conjugué à une translation si et seulement si il y a un arc essentiel disjoint de son image par  $k$  dans  $B$ .*

PREUVE : Soit  $\alpha$  un tel arc et supposons, sans perte de généralité, que  $\varphi_i(x) > x$  pour  $i = 0, 1$  si  $k(x, i) = (\varphi_i(x), i)$  pour  $i = 0, 1$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \geq 0$ , soit  $B_n$  la composante de  $B - k^n(\alpha)$  contenant  $N \times 0$  pour  $N$  grand. On a  $\bigcap_{n \geq 0} B_n = \emptyset$ . En effet, supposons que  $p \in \bigcap_{n \geq 0} B_n$  et soit  $m \geq 0$  tel que  $p$  appartienne à la composante de  $B - \tau^m(\alpha)$  contenant  $-N \times 0$  pour  $N$  grand. Puisque  $k\tau = \tau k$ ,  $k^{-n}(\tau^m(\alpha))$  est aussi dans cette composante, donc  $\{k^{-n}(p), n \geq 0\}$  se trouve dans le compact de  $B$  bordé par  $\alpha$  et  $\tau^m(\alpha)$ , ce qui contredit que les points errent sous  $k$  (proposition 2.1). De même, si  $B'_n$  est la composante de  $B - k^n(\alpha)$  contenant  $-N \times 0$  pour  $N$  grand,  $\bigcap_{n \leq 0} B'_n = \emptyset$ . Par conséquent si  $F$  est la partie bornée fermée de  $B$  bordée par  $\alpha$  et  $k(\alpha)$ , on a  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} k^n(F) = B$  et  $F$  est homéomorphe à  $[0, 1] \times [0, 1]$ . On conclut facilement.  $\square$

4) Pour obtenir une version du "théorème de translation généralisée" (cf. le paragraphe 1) pour l'anneau, il faudrait pouvoir remplacer la seconde alternative par : il y a dans  $A$  un arc essentiel disjoint de son image par  $H$ . Nous ne savons pas le faire. Le théorème 4.1 dit seulement qu'un relevé de  $H$  à un revêtement fini assez grand vérifie l'énoncé généralisé de Brouwer.

5) Appelons distorsion ("twist homeomorphism") un homéomorphisme  $H : (A; \partial_0 A, \partial_1 A) \leftarrow$  tel que  $H$  ou  $H^{-1}$  admet un relevé  $h : (B; \partial_0 B, \partial_1 B) \leftarrow$  qui vérifie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_1(x) < x < \varphi_0(x)$  où  $h(x, i) = (\varphi_i(x), i)$ ,  $i = 0, 1$ .

Remarquons qu'alors le relevé canonique de  $H$  (ou  $H^{-1}$ ) a la même propriété et le deuxième cas du théorème ne peut se produire. On retrouve ainsi le

**4.4. THÉORÈME DE POINCARÉ-BIRKHOFF.** *Une distorsion de l'anneau  $A$  sans point fixe admet dans  $A$  une courbe simple fermée libre et non homotope à zéro.*

6) La version originelle du théorème de Poincaré-Birkhoff concerne les distorsions de l'anneau préservant l'aire (usuelle) et conclut à l'existence de deux points fixes. La version topologique énoncée ici conduit à un seul point fixe, mais il n'est pas possible de faire mieux car, pour  $t$  petit, le temps  $t$  du flot figuré ci-dessous (cf. figure 11) est une distorsion de l'anneau (ne préservant pas l'aire!) avec un seul point fixe bien que toute courbe fermée simple non homotope à zéro rencontre son image.

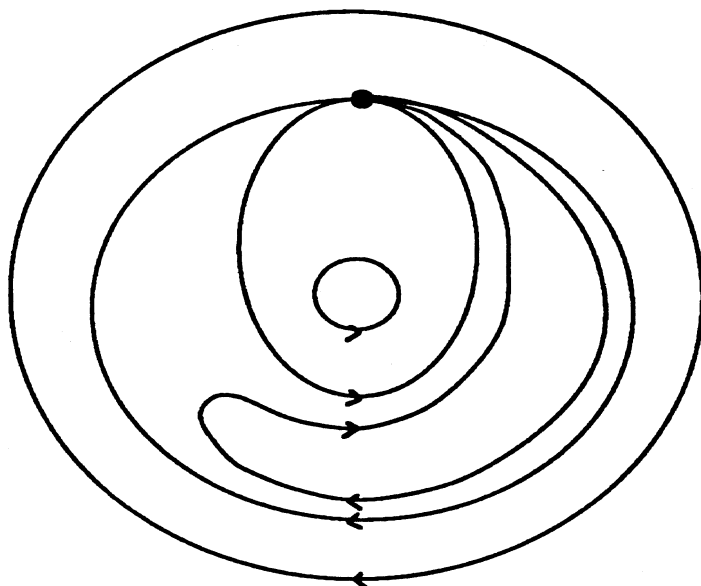


Figure 11

PREUVE DU THÉORÈME 4.1 d'après C. Bonatti : On pose  $h(x, i) = (\varphi_i(x), i)$  pour  $i = 0, 1$  et on continue de désigner par  $h$  l'extension de  $h$  à  $\mathbb{R}^2$  définie par  $h(x, y) = (\varphi_1(x), y)$  si  $y \geq 1$  et  $h(x, y) = (\varphi_0(x), y)$  si  $y \leq 0$ .

Soit  $K$  une cellulation de  $A$  dont toute étoile est libre sous  $H$ . On en déduit une cellulation  $L$  de  $\mathbb{R}^2$  invariante par  $\tau$  et induisant une cellulation de  $B$  dont toute étoile est libre sous  $h$ .

Notons que  $\partial_0 B$  est une trajectoire pour  $h$ . Donc d'après le théorème de translation plane, il existe une demi-droite  $k$  proprement plongée dans le demi-plan  $y \geq 0$ , libre sous  $h$ , issue d'un sommet de  $\partial_0 B$ , contenue dans le 1-squelette de la cellulation  $L$  de  $\mathbb{R}^2$  et dans l'ouvert  $y > 0$  à l'exception de son origine.

Si elle rencontre le bord  $\partial_1 B$ , on en extrait un arc essentiel dans  $B$  libre sous  $h$  et la deuxième alternative du théorème est satisfaite. Sinon, on a  $k \subset B - \partial_1 B$  et  $k$  sépare  $B$  en deux ouverts connexes  $R_1$  et  $R_2$  dont l'un,  $R_1$ , contient  $\partial_1 B$ . On suppose que  $h(k) \subset R_2$  (sinon on considère  $h^{-1}$ ). Soit alors  $R \subset R_1$  la composante connexe de  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \tau^n(R_1)$  qui contient  $\partial_1 B$ . Tout sous-complexe compact  $K$  de  $L$  ne contient qu'un nombre fini d'arcs simples dans son 1-squelette, donc il existe  $m = m(K)$  tel que  $K \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tau^n(k)) = K \cap (\bigcup_{|n| \leq m} \tau^n(k))$  et par suite la frontière de  $R$  est incluse dans le 1-squelette de  $L \cap (B - \partial_1 B)$ . Elle est d'autre part clairement invariante sous  $\tau$ . Enfin, elle est libre sous  $h$  car si  $\sigma$  est une 1-cellule de  $\text{Fr}(R)$ , il existe d'après l'argument précédent un  $m$  tel que  $\sigma \subset \tau^m(k)$ , donc  $h(\sigma) \subset h\tau^m(k) = \tau^m(h(k)) \subset \tau^m(R_2) \subset B - \bar{R}$ . Par conséquent, cette frontière descend dans l'anneau  $A$  sur une courbe fermée simple qui satisfait la première alternative du théorème.  $\square$

## 5. Encore sur les trajectoires

Les propriétés suivantes n'ont pas été nécessaires pour la preuve du théorème de Brouwer, mais elles sont parfois utiles (cf. [W3]) et précisent la situation.

Si  $\ell = \ell(\alpha)$  est une trajectoire, on écrit  $\ell = \ell^+ \cup \alpha \cup \ell^-$  où  $\ell^+ = \bigcup_{n \geq 1} t^n(\alpha)$ ,  $\ell^- = \bigcup_{n \leq -1} t^n(\alpha)$  et  $\bar{\ell} - \ell$  comme union de  $\omega_+ = \omega_+(\ell) = \bar{\ell}^+ - \ell^+ = \bigcap_{n \geq 0} (\bigcup_{i \geq n} t^i(\alpha))$  et de  $\omega_- = \omega_-(\ell) = \bar{\ell}^- - \ell^- = \bigcap_{n \leq 0} (\bigcup_{i \leq n} t^i(\alpha))$ .

Clairement  $\omega_+$  et  $\omega_-$  ne dépendent pas du choix de l'arc de translation  $\alpha$  engendrant  $\ell$ , sont fermés, d'intérieur vide, invariants par  $t$  et donc non bornés puisque les points errent. D'autre part,

1)  $\omega_+ \cup \{\infty\}$  et  $\omega_- \cup \{\infty\}$  sont des compacts connexes de  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} = S^2$  comme intersections décroissantes de compacts connexes. Donc, aucune composante connexe de  $\omega_+$  (ou  $\omega_-$ ) ne peut être bornée et  $\omega_+$  et  $\omega_-$  sont sans point isolé, donc parfaits. A noter que  $\omega_+$  (comme  $\omega_-$ ) peut ne pas être connexe (figure 12).

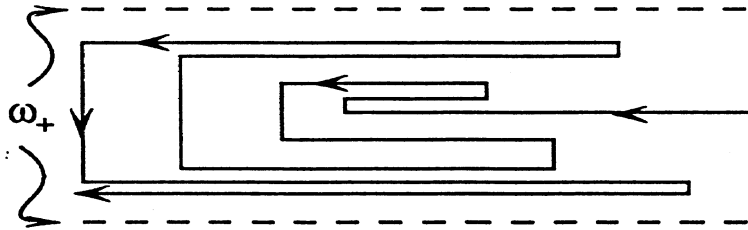


Figure 12

3)  $\omega_+ \cap \omega_- = \phi$ .

En effet, si  $p \in \omega_+ \cap \omega_-$ , soit  $D$  un disque centré en  $p$  si petit que  $D \cap t(D) = \phi$  et  $D \cap \alpha = \phi$ . Par hypothèse, il existe  $n > 0$  tel que  $t^n(\alpha) \cap D \neq \phi$  et  $m < 0$  tel que  $t^m(\alpha) \cap D \neq \phi$ . Alors, un arc dans  $D$  irréductible de  $\bigcup_{i=1}^n t^i(\alpha)$  à  $\bigcup_{i=m}^{-1} t^i(\alpha)$  contredirait le lemme-clé.

4) On a vu dans la proposition 2.7 que les composantes connexes par arcs de  $\mathbb{R}^2 - \bar{\ell}$  adhérentes à  $\ell$  sont au nombre de deux,  $\Lambda_d$  et  $\Lambda_g$ .

**5.1. PROPOSITION.** *Les composantes connexes par arcs de  $\mathbb{R}^2 - \ell$  adhérentes à  $\ell$  sont ouvertes. En fait, elles coïncident avec  $\Lambda_d$  et  $\Lambda_g$ .*

*Autrement dit, les seuls points de  $\text{Fr } \Lambda_d$  (resp.  $\text{Fr } \Lambda_g$ ) accessibles par  $\Lambda_d$  (resp.  $\Lambda_g$ ) sont les points de  $\ell$ .*

*Ceci équivaut à montrer qu'un arc simple  $\lambda$  d'extrémités  $p$  et  $q$  avec  $p \in \ell$  et  $q \in \bar{\ell} - \ell$  vérifie  $\lambda \cap \ell \neq \phi$ .*

**PREUVE :** Supposons  $\lambda \cap \ell = \phi$ . On peut aussi supposer  $(\lambda - \{q\}) \cap (\bar{\ell} - \ell) = \phi$  et  $q \in \omega_+(\ell)$ . L'idée est la suivante : la figure ci-dessous où  $\omega_+$  est une demi-droite est impossible car l'extrémité de la demi-droite serait un point fixe. Mais elle est aussi impossible car seuls un nombre fini de  $t^n(q)$  peuvent se trouver entre  $q$  et l'extrémité de  $\omega_+$  (les points errent). Donc, il existe  $i < 0$  et  $j > 0$  avec  $t^i(q)$  et  $t^j(q)$  à droite de  $q$ , ce qui

n'est pas possible pour l'homéomorphisme sans point fixe  $t$  de la ligne  $\omega_+ - \{\text{extrémité}\}$ .

C'est cet argument que l'on va mettre en œuvre en général sur une trajectoire à construire "parallèle" à  $\omega_+$  (figure 13).

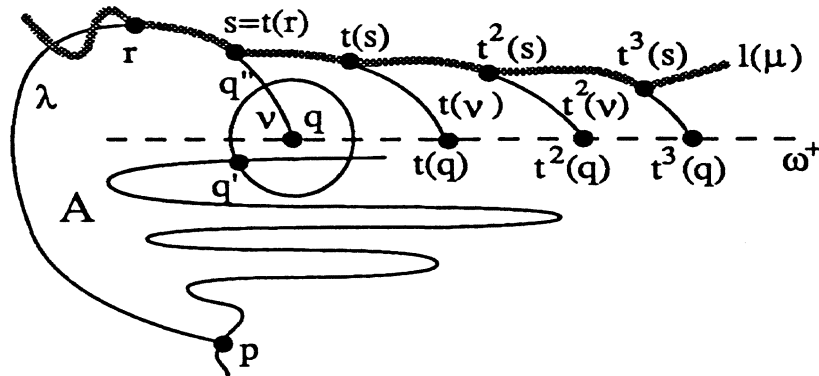


Figure 13

Tout d'abord notons que  $\lambda \cap t(\lambda) \neq \emptyset$  : sinon, soit  $B$  un disque centré en  $q$  si petit que  $B \cap t(B) = B \cap t(\lambda) = B \cap t^{-1}(\lambda) = \emptyset$  et  $B \cap pt(p) = \emptyset$  où l'arc  $pt(p)$  est inclus dans  $\ell$ . Alors  $(\lambda \cup B) \cap t(\lambda \cup B) = \emptyset$  et  $\lambda \cup B$  contient un arc simple de  $p$  à  $q' \in \ell \cap B$  qui contredit le lemme-clé.

On a aussi  $t(q) \notin \lambda$  et  $t^{-1}(q) \notin \lambda$  : sinon  $t^{\pm 1}(q) \in \omega_+ \cap \lambda = \{q\}$  et  $t$  aurait un point fixe.

Suivons alors  $\lambda$  à partir de  $q$  jusqu'au premier point  $r$  de  $\lambda$  tel que  $qr \cap t(qr) \neq \emptyset$  où  $qr \subset \lambda$ . On a  $r \neq q$  puisque  $q \notin t(\lambda)$  (figure 14).

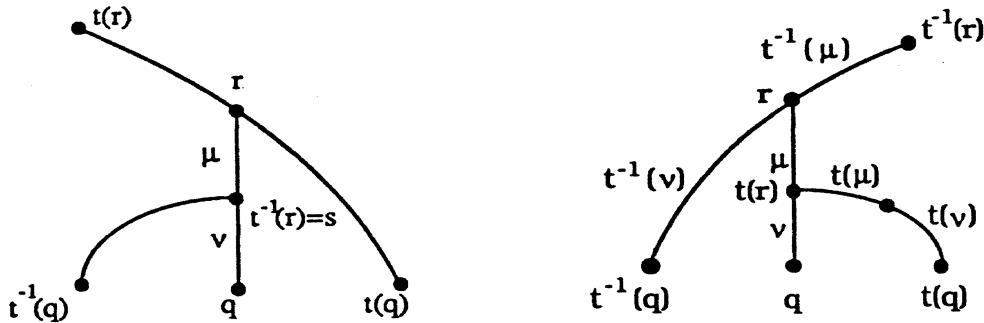


Figure 14

L'arc  $qr \subset \lambda$  contient  $t(r)$  ou  $t^{-1}(r)$ , mais pas les deux car dans ce cas l'arc  $\gamma$  de  $t^{-1}(r)$  à  $t(r)$  intérieur à  $qr$  est libre, mais  $t(r) \in t^2(\gamma) \cap \gamma$ , ce qui contredit la proposition 2.5. Notons aussi que  $r \neq p$  car sinon  $t^{\pm 1}(p) \in \lambda \cap \ell = \emptyset$ . Si on pose  $s = t^{\pm 1}(r)$ , selon le cas, on a  $s \neq p, q$ , l'arc  $\mu = sr \subset qr \subset \lambda$  est un arc de translation et l'arc  $\nu = qs$  vérifie  $\nu \cap t(\nu) = \emptyset$ . Par conséquent

- (i)  $t^m(\nu) \cap t^n(\nu) = \emptyset$  pour  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $m \neq n$  d'après la proposition 2.5 ;
- (ii)  $\nu \cap \ell = \emptyset$  et  $t^n(\nu) \cap \ell = \emptyset$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  puisque  $\nu \subset \lambda - \{p\}$ .

Considérons alors la trajectoire  $\ell(\mu)$ . On a

- (iii)  $\ell(\mu) \cap \ell = \phi$  puisque  $\mu \cap \ell \subset \overset{\circ}{\lambda} \cap \ell = \phi$ ;
- (iv)  $\nu \cap \ell(\mu) = \{s\}$  et  $t^n(\nu) \cap \ell(\mu) = \{t^n(s)\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  (sinon, puisque  $(\nu - \{s\}) \cap \mu = \phi$ , le lemme-clé mène à une contradiction avec (i));
- (v)  $q \notin \bar{\ell}(\mu)$  (sinon, puisque  $(\nu - \{s\}) \cap \mu = \phi$ , on pourrait appliquer le lemme-clé comme dans la preuve de  $\lambda \cap t(\lambda) \neq \phi$  ci-dessus pour déduire  $\nu \cap t(\nu) \neq \phi$  ce qui contredit (i)).

Soit maintenant un disque  $D$  centré en  $q$  si petit que  $D \cap t^n(\nu) = \phi$  pour  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ,  $D \cap (\lambda - \nu) = \phi$ ,  $D \cap \ell(\mu) = \phi$  (c'est possible grâce à (v)) et  $D \cap \omega_-(\ell) = \phi$ .

Soient  $q'$  le premier point de  $\ell$  sur  $\partial D$  à partir de  $p$ , et  $q''$  le premier point de  $\lambda$  sur  $\partial D$  à partir de  $p$ . Il existe un arc  $q'q''$  sur  $\partial D$  tel que la courbe fermée simple  $pq' \cup q'q'' \cup q''p \subset \ell \cup \partial D \cup \lambda$  ne contienne pas  $q$  dans son intérieur  $\overset{\circ}{A}$  (de fermeture  $A$ ).

Puisque les points errent, il existe  $n > 0$  et  $m < 0$  tels que  $t^n(q), t^m(q) \notin A$ . Soient  $D_n$  et  $D_m$  des disques centrés en  $t^n(q)$  et  $t^m(q)$  si petits que  $D_n \cap D_m = \phi$ ,  $(D_m \cup D_n) \cap \ell^- = \phi$  où  $\ell^-$  est la demi-droite de  $\ell$  de  $p$  à  $\omega_-$  et  $(D_m \cup D_n) \cap (\ell(\mu) \cup D \cup A) = \phi$  (on utilise 2) et (v)).

Si on se déplace sur  $\ell$  de  $p$  vers  $\omega_+$ , on rencontre d'abord  $D$ , puis  $D_n$  ou  $D_m$ , disons que l'on rencontre  $D_n$  puis  $D_m$ .

Si  $\ell^* \subset \ell$  est l'arc de  $p$  au premier point de  $\ell \cap \partial D_m$ , soit  $K$  un grand carré contenant  $\ell^*$ ,  $\lambda$ ,  $\nu$ ,  $t^n(\nu)$ ,  $t^m(\nu)$ ,  $D$ ,  $D_m$ ,  $D_n$ . Dans ce carré, on a par construction une situation topologiquement équivalente à celle dessinée ci-dessous (figure 15).

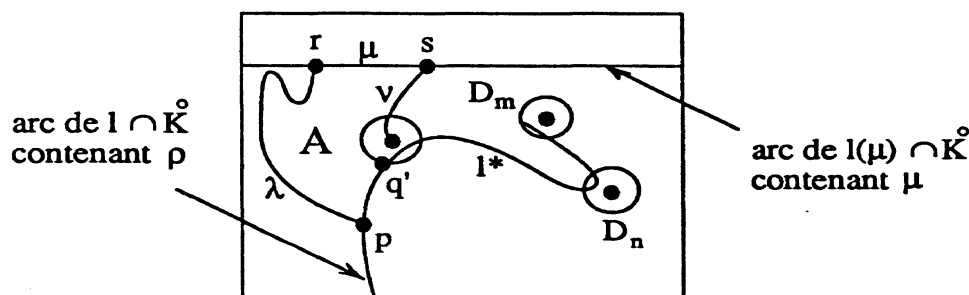


Figure 15

et compte tenu de (i), (ii) et (iv), on obtient que sur  $\ell(\mu)$  (avec  $\mu$  orienté de  $r$  vers  $s$ ) les points  $s, t^m(s), t^n(s)$  arrivent dans cet ordre ou bien dans l'ordre  $s, t^n(s), t^m(s)$ , ce qui est absurde.

5) Il n'y a pas d'arc simple  $\lambda$  joignant  $\omega_+$  à  $\omega_-$  (supposés non vides) sans rencontrer  $\ell$ .

En effet, raisonnons par l'absurde et considérons une droite  $k$  (donnée par le théorème de translation plane) proprement plongée dans  $\mathbb{R}^2$ , incluse dans  $\mathbb{R}^2 - (\bar{\ell} - \ell)$  et rencontrant  $\ell$  en un seul point. Alors  $\omega_+$  et  $\omega_-$  sont dans des composantes distinctes de  $\mathbb{R}^2 - k$ . Donc  $\lambda$  rencontre  $k$  et on obtient une contradiction avec la proposition 5.1.

## Références

- [A1] S.A. ANDREA, *On homeomorphisms of the plane, and their embedding in flows*, Bull. AMS, 71 (1965), 381-383.
- [A2] S.A. ANDREA, *On homeomorphisms of the plane which have no fixed points*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 30 (1967), 61-74.
- [A3] S.A. ANDREA, *The plane is not compactly generated by a free mapping*, Trans. AMS, 151 (1970), 481-498.
- [Ba] R.B. BARRAR, *Proof of the fixed point theorems of Poincaré and Birkhoff*, Cand. J. of Math. 19 (1967), 333-343.
- [Bi1] G.D. BIRKHOFF, *Proof of Poincaré geometric theorem*, Trans. AMS, 14 (1913), 14-22.
- [Bi2] G.D. BIRKHOFF, *An extension of Poincaré's last geometric theorem*, Acta Math., 47 (1925), 297-311.
- [Bo] S. BOYLES, *A counterexample to the bounded orbit conjecture*, Trans. AMS, 266 (1981), 415-422.
- [Br1] L.E.J. BROUWER, *Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie, I*, Math. Ann., 67 (1909), 246-267.
- [Br2] L.E.J. BROUWER, *Continuous one-one transformation of surfaces in themselves, II*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., 12 (1909), 286-297.
- [Br3] L.E.J. BROUWER, *Zur Analysis Situs*, Math. Ann., 68 (1910), 422-434.
- [Br4] L.E.J. BROUWER, *Über einendellige Stetige Transformationen von Flächen in sich*, Math. Ann., 69 (1910), 176-180.
- [Br5] L.E.J. BROUWER, *Die Theorie den endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie, II*, Math. Ann., 69 (1910), 181-203.
- [Br6] L.E.J. BROUWER, *Continuous one-one transformation of surfaces in themselves, II*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., 13 (1911), 767-777.
- [Br7] L.E.J. BROUWER, *Beweis des ebenen Translationssatzes*, Math. Ann., 72 (1912), 37-54.
- [Br8] L.E.J. BROUWER, *Continuous one-one transformation of surfaces in themselves, V*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., 15 (1912), 352-360.
- [Br9] L.E.J. BROUWER, *Remark on the plane translation theorem*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., 15 (1912), 935-936.
- [Br10] L.E.J. BROUWER, *Collected Works*, vol. 2 (H. Freudenthal ed.), North-Holland, 1976.
- [Bn1] M. BROWN, *A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, Houston J. of Math., 10 (1984), 35-41.
- [Bn2] M. BROWN, *Homeomorphisms of two-dimensional manifolds*, Houston J. of Math., 11 (1985), 455-469.
- [BnN] M. BROWN and W.D. NEUMANN, *Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem*, Mich. Math. J., 24 (1977), 21-31.
- [C] P.H. CARTER, *An improvement of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem*, Trans. AMS, 269 (1982), 285-299.
- [CZ] C. CONLEY and E. ZEHNDER, *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of Arnold*, Invent. Math. 73 (1983), 33-49.
- [Fa] A. FATHI, *An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, L'enseignement Math., 33 (1987), 315-322.

- [Fr1] J. FRANKS, *Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms*, Ergod. Th. and Dynam. Sys., 8\* (1988), 99-107.
- [Fr2] J. FRANKS, *Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem*, Annals of Math., 128 (1988), 139-151.
- [Fr3] J. FRANKS, *A variation on the Poincaré-Birkhoff theorem*, Contemporary Math., 81 (1988), 111-117.
- [H] M. HERMAN, *Proceedings, Rio de Janeiro 1976*, Springer Lecture Notes in Math., 652, p.251.
- [J] G. JOHNSON, *An example in fixed point theory*, Proc. AMS, 44 (1974), 511-514.
- [K1] B. de KEREKJARTO, *On a geometrical theory of continuous groups I*, Annals of Math., 27 (1925), 105-117.
- [K2] B. de KEREKJARTO, *The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré*, Acta Sci. Math. Szeged, 4 (1928-29), 86-102.
- [K3] B. de KEREKJARTO, *Note on the general translation theorem of Brouwer*, Atti d. Congresso Internaz. d. Mat., Bologna 1928, 4 (1931), 235-238.
- [K4] B. de KEREKJARTO, *Ueber die fixpunktfreie Abbildungen der Ebene*, Acta Sci. Math. Szeged, 6 (1934), 226-234.
- [Sc] W. SCHERRER, *Translationen über einfach zusammenhängende Gebiet*, Viertelsschr. Naturf. Ges. Zurich, 70(1925), 77-84.
- [S11] E.E. SLAMINKA, *A Brouwer translation theorem for free homeomorphisms*, Trans. AMS, 306 (1988), 277-291.
- [S12] E.E. SLAMINKA, *Area preserving homeomorphisms of two manifolds*, Contemporary Math., 81 (1988), 153-167.
- [Sp] E. SPERNER, *Über die fixpunktfreie Abbildungen der Ebene*, Hamburger Math. Einzelschr., 14 (1933), 1-47.
- [T] H. TERASAKA, *Ein Beweis des Brouwerschen ebenen Translationssatzes*, Japan J. of Math., 7 (1930), 61-69.
- [W1] H.E. WINKELNKEMPER, *Twist maps, coverings and Brouwer's translation theorem*, Trans. AMS, 267 (1981), 585-593.
- [W2] H.E. WINKELNKEMPER, *A generalization of the Poincaré-Birkhoff theorem*, Proc. AMS, 102 (1988), 1028-1030.
- [W3] H.E. WINKELNKEMPER, *Fixed points with rotation as obstructions to topological transitivity, I*, Topology, 27 (1988), 393-400.
- [Y] C.T. YANG, *Hilbert fifth problem and related problems on transformation groups*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol.28, part 1 (1976), 142-146.