

THÈSES D'ORSAY

ALEXIS MARIN

La transversalité topologique : une extension d'un théorème de Rohlin et application au 16e problème de Hilbert

Thèses d'Orsay, 1979

http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1979__0082__P0_0

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

ORSAY
n° d'ordre : 2205

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR d'ETAT
SPECIALITE : SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Monsieur M A R I N ALEXIS

X 32.527



SUJET : LA TRANSVERSALITE TOPOLOGIQUE. UNE EXTENSION D'UN THEOREME DE ROHLIN
ET APPLICATION AU 16e PROBLEME DE HILBERT.

soutenue le 25 octobre 1979 devant la Commission d'examen

MM. CERF Président

CHENCINER

POITOU

SIEBENMANN

POENARU

Cette thèse se compose de trois articles dont le premier, antérieur et indépendant des deux autres, a été publié aux *Annals of Mathematics* (n° 106 (1977), pages 269-293) ; le second "Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature", en collaboration avec Lucien Guillou, a été annoncé dans une note aux comptes-rendus (C.R.A.S., t. 285 (18 juillet 1977), pages 95-98) ; le dernier article, enfin, présente une application au 16e problème de Hilbert du précédent article.

I. - LA TRANSVERSALITE TOPOLOGIQUE

Hudson a noté une différence essentielle entre la catégorie des variétés différentiables d'une part et celles des variétés linéaires par morceaux ou topologiques d'autre part ; dans ces deux dernières catégories, on ne peut pas rendre localement transverses, de façon relative, deux sous-variétés d'une variété ambiante donnée.

Dans le domaine topologique, Kirby et Siebenmann établissent un théorème de transversalité relatif pour la notion de transversalité vis-à-vis d'un microfibré normal stable à l'une des deux sous-variétés (1) ; malheureusement les microfibrés normaux n'existent souvent que stablement.

Ici nous proposons, dans le cas de deux sous-variétés topologiques de codimension strictement supérieure à deux, la notion de transversalité vis-à-vis d'un microfibré normal stable à l'une des deux sous-variétés. Cette notion semble plus maniable que celle de "neighborhood transversality" suggérée par Rourke et Sanderson (bien qu'elle lui soit en fait équivalente) et permet de prouver un théorème de transversalité relatif. Un théorème de transversalité à la Thom, pour les applications continues, découle ensuite par un procédé connu.

Nous relierons notre notion de transversalité à celle de Kirby et Siebenmann : si deux variétés sont transverses en notre sens et si la variété intersection admet

(1) R.C. KIRBY and L.C. SIEBENMANN, *Essays on topological manifolds, smoothing and triangulations*, *Annals of Mathematics Studies*, n° 88, Princeton University Press.

un microfibré normal dans l'une des deux sous-variétés, alors cette dernière est transverse vis-à-vis d'un microfibré normal à l'autre (2). Ce théorème du microfibré normal ambiant permet d'établir (et ce de façon relative) la symétrie (pour les deux sous-variétés) de la notion de transversalité vis-à-vis d'un microfibré normal stable.

Dans un appendice, nous étudions les obstructions à ce qu'une situation de transversalité locale soit transverse vis-à-vis d'un microfibré normal stable. Nous obtenons des réponses analogues à celles données par Rourke et Sanderson dans le cas linéaire par morceaux où, bien entendu, G/PL est remplacé par G/TOP .

En codimension inférieure ou égale à deux (avec peut-être des exceptions en dimension quatre), il y a existence et unicité des microfibrés normaux d'après Kirby et Siebenmann, donc le théorème de Kirby et Siebenmann peut être utilisé. Un complément à ce théorème d'existence de microfibrés normaux fournira un théorème de symétrie dans le cas où l'une des sous-variétés est de codimension ≤ 2 , et l'autre sous-variété est de codimension ≥ 3 . (Transversalité à la sous-variété de codimension ≤ 2 doit être entendu au sens de Kirby et Siebenmann.)

On sait donc répondre aux problèmes de transversalité topologique sauf pour quelques cas où intervient la dimension quatre, à savoir les valeurs suivantes de

$$(w ; m, n ; m + n - w) :$$

$$(w ; m, n, ; 4), (4 ; m, n ; m + n - w), (w ; 4, w - 2 ; 2), (w ; 4, w - 1 ; 3)$$

et bien sûr les valeurs obtenues en permutant m et n (ici on envisage deux sous-variétés de dimension m et n respectivement dans une variété de dimension w).

II. - UNE EXTENSION D'UN THEOREME DE ROHLIN SUR LA SIGNATURE

On se place dans la catégorie des variétés différentiables compactes.

Si M^n est une variété close orientée de dimension n , une sous-variété V^{n-2} de dimension $n-2$ sera dite caractéristique si l'élément de $H_{n-2}(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qu'elle représente est dual (par la dualité de Poincaré) à la deuxième classe de Stiefel-Whitney $w_2(M)$. On note $i : V \hookrightarrow M$.

(2) Défini seulement près de l'intersection, ce fibré prolonge le fibré normal donné.

Soit M^4 une variété close orientée de dimension 4 et soit F^2 une surface close (non nécessairement orientable) caractéristique pour M vérifiant :

$$i_* (H_1(F^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \{0\} \subset H_1(M^4; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) .$$

Il existe alors, relativement à la forme d'intersection homologique sur F , une forme quadratique naturelle $q : H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ telle que la généralisation suivante de la formule de Rohlin (3) ait lieu :

THEOREME. On a la formule : $\sigma(M) - F \cdot F \equiv 2\alpha(M, F) \pmod{16}$, où $F \cdot F$ désigne l'auto-intersection de la surface F dans M , $\sigma(M)$ la signature de la variété orientée M_1 et $\alpha(M, F)$ l'invariant de Brown de la forme quadratique q .

Remarque. Si F est orientable, q est à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \equiv 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et $\alpha(M, F)$ qui vaut alors 0 ou 4 s'identifie au quadruple de l'invariant d'Arf de q : on retrouve la formule connue de Rohlin. Rappelons que le cas $F = \emptyset$ est très célèbres, il date de 1952 et est aussi dû à Rohlin.

III. - QUELQUES REMARQUES SUR LES COURBES ALGEBRIQUES PLANES REELLES

D'après le théorème d'Harnack, une courbe algébrique plane de degré m n'a pas plus de $M = \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ composantes, et des courbes ayant le nombre maximal de composantes existent en tout degré et sont nommés M -courbes. Dans le cas de degré pair, $m = 2k$, chaque composante sépare le plan ^(projectif réel). On note p le nombre de composantes paires (c'est-à-dire incluses dans un nombre pair de composantes) et n le nombre de composantes impaires (les autres). Rohlin (3) a publié une preuve de la congruence $p - n \equiv k^2 \pmod{8}$ pour une M -courbe. Dans un autre article, il publiera une autre preuve utilisant le théorème d'Atiyah-Singer et Gudkov et Kraknov prouveront aussi que pour une courbe ayant $M - 1$ composantes, on a la congruence $p - n \equiv k^2 \pm 1 \pmod{8}$. Dans cet article, nous donnons un contre-exemple à la première preuve de Rohlin. Nous donnons une nouvelle preuve unifiée des deux congruences ^{précédentes} ne s'appuyant que sur les outils de dimension quatre de notre précédent article *. Une méthode due à Arnold fournit une généralisation de l'inégalité de Petrowski au cas des courbes de degré pair à singularités qui contient les inégalités de Petrowski pour les courbes de degré pair comme de degré impair. On

(3) V.A. ROHLIN, Proof of Gudkov's conjecture, Funktional analysis and its applications, 6 (1972), pages 136-138.

* Cette preuve donne aussi une congruence nouvelle pour les courbes à $(M-2)$ -composantes.

retrouve ainsi très rapidement toutes les restrictions connues sur la disposition des courbes.

Une autre partie de l'article, plus botanique, est consacré à l'étude de l'orientation des courbes séparant leur complexifiée*. Nous donnons toutes les conjugaisons possibles en degré cinq et six. Dès le degré cinq, il y a des configurations séparantes qui ont des orientations distinctes ; on donnera aussi un exemple de deux M courbes de degré sept ayant même configuration orientée mais qui sont dans des composantes distinctes du complémentaire du discriminant.

* Cf. une question de Wilson, Hilbert's sixteenth problem, *Topology*, vol. 17 (1978), p. 53-73.

La transversalité topologique

Par A. MARIN

Hudson a noté en [Hu-1] une différence essentielle entre la catégorie des variétés différentiables d'une part et celles des variétés linéaires par morceaux ou topologiques d'autre part; dans ces deux dernières catégories, on ne peut pas rendre localement transverses, de façon relative, deux sous-variétés d'une variété ambiante donnée. Pour donner une théorie satisfaisante de la transversalité dans le domaine linéaire par morceaux, Rourke et Sanderson avaient déjà introduit leurs désormais célèbres fibrés en blocs ([RS-4]) qui leur ont permis plus tard ([RS-1]) de construire une machine semi-simpliciale éclairant l'exemple d'Hudson et prouvant que la théorie qu'ils avaient dévoilée est essentiellement "la seule possible."

Dans le domaine topologique, Kirby et Siebenmann établissent un théorème de transversalité relatif pour la notion de transversalité vis-à-vis d'un microfibré normal à l'une des deux sous-variétés ([KS-1, § 1]); malheureusement les microfibrés normaux n'existent souvent que stablement.

Ici nous proposons, dans le cas de deux sous-variétés topologiques de codimension strictement supérieure à deux, la notion de transversalité vis-à-vis d'un microfibré normal stable à l'une des deux sous-variétés. Cette notion semble plus maniable que celle de "neighborhood transversality" suggérée par Rourke et Sanderson en [RS-2] (bien qu'elle lui soit en fait équivalente) et permet de prouver un théorème de transversalité relatif. Un théorème de transversalité à la Thom, pour les applications continues, découle ensuite par un procédé connu.

Nous relient notre notion de transversalité à celle de Kirby et Siebenmann: si deux variétés sont transverses en notre sens et si la variété intersection admet un microfibré normal dans l'une des deux sous-variétés, alors cette dernière est transverse vis-à-vis d'un microfibré normal à l'autre.* Ce théorème du microfibré normal ambiant permet d'établir (et ce de façon relative) la symétrie (pour les deux sous-variétés) de la notion de transversalité vis-à-vis d'un microfibré normal stable.

Dans un appendice, nous étudions les obstructions à ce qu'une situation

* Défini seulement près de l'intersection, ce fibré prolonge le fibré normal donné.

de transversalité locale soit transverse vis-à-vis d'un microfibré normal stable. Nous obtenons des réponses analogues à celles données par Rourke et Sanderson en [RS-1] dans le cas linéaire par morceaux où, bien entendu, G/PL est remplacé par G/TOP .

En codimension inférieure ou égale à deux (avec peut-être des exceptions en dimension quatre), il y a existence et unicité des microfibrés normaux selon [KS-2], donc le théorème de Kirby et Siebenmann peut être utilisé. Un complément à [KS-2] (donné dans l'Appendice E) fournira un théorème de symétrie dans le cas où l'une des sous-variétés est de codimension ≤ 2 , et l'autre sous-variété est de codimension ≥ 3 . (Transversalité à la sous-variété de codimension ≤ 2 doit être entendu au sens de Kirby et Siebenmann.)

On sait donc répondre aux problèmes de transversalité topologique sauf pour quelques cas où intervient la dimension quatre, à savoir les valeurs suivantes de

$$(w; m, n; m + n - w): (w; m, n; 4), \\ (4; m, n; m + n - w) \quad (w; 4, w - 2; 2), \quad (w; 4, w - 1; 3)$$

et bien sûr les valeurs obtenues en permutant m et n (ici on envisage deux sous-variétés de dimensions m et n respectivement dans une variété de dimension w ; voir les conventions ci-après).

Les ingrédients essentiels de ce travail comprennent bien sûr le théorème de transversalité de Kirby et Siebenmann (et donc le théorème de structure en produit). En plus interviennent le théorème de triangulation de R.T. Miller pour les plongements de polyèdres en codimension ≥ 3 ([E-2] et [KS-1, III App. B]), le théorème de Casson-Sullivan sur les plongements des équivalences d'homotopie en codimension ≥ 3 ([W-1, § 11]), et le théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique dont nous donnons une nouvelle preuve s'appuyant sur la théorie des voisinages réguliers topologiques de R. Edwards.

Je remercie mon ami L. Guillou pour ses critiques pertinentes ainsi que L.C. Siebenmann de m'avoir suggéré le problème, d'avoir notablement simplifié la solution originale et surtout d'avoir accompagné l'élaboration de la forme définitive de ce travail d'un zèle et d'une obstination auxquels on doit la parution de cet article.

Tables des matières

Paragraphe	
0. Quelques conventions	271
1. La transversalité stable	272
2. Les théorèmes auxiliaires	274
3. Preuve du théorème de transversalité 1.2	277
4. Preuve du lemme d'unicité 2.1	279

5. Preuves du premier théorème du microfibré ambiant
 1.3 et du théorème de symétrie 1.4282

6. Preuve du théorème de transversalité des
 applications 1.7282

Appendice

A. Preuve du théorème de Lickorisch-Siebenmann
 topologique 2.4283

B. Preuve du théorème de stabilité 2.3.....285

C. L'espace des germes transverses.....287

D. La transversalité dans le cas $p=m+n-w \leq 1, w \neq 4$...289

E. Les microfibrés normaux respectant une sous-variété
 en codimension ≤ 2 . Complément au théorème de
 symétrie291

Références

0. Quelques conventions

M^m et N^n sont des sous-variétés localement plates d'une variété topologique sans bord W^w dotée d'une métrique. Les sous-variétés M et N sont *localement transverses* si le triple $(W; M, N)$ est, près de tout point de l'intersection $M \cap N$, homéomorphe au triple linéaire $(R^w; R^x \times R^y \times 0, 0 \times R^p \times R^q)$; en ce cas on note P l'intersection $M \cap N$.

Les stabilisées ${}_u W, W_v$ et ${}_u W_v$ sont respectivement $R^u \times W, W \times R^v$ et $R^u \times W \times R^v$; au moyen des inclusions des tranches zéro, la variété W est sous-variété de ses stabilisées. Les entiers u et v sont choisis suffisamment grands pour qu'il y ait existence et unicité de microfibrés normaux à M dans W_v et à N dans ${}_u W$.

Les lettres μ et ν désignent des germes près de P de microfibrés normaux à N dans W et à M dans W respectivement. Quant aux lettres ξ et η elles seront réservées à des germes près de P de microfibrés normaux stables à N dans ${}_u W$ et à M dans W_v respectivement. L'expression un microfibré défini près de C signifie un germe près de C de microfibré.

Rappelons qu'un microfibré μ normal à N dans W est une rétraction sur la variété N d'un voisinage de N dans la variété ambiante W qui soit une submersion (topologique) dont les fibres sont des sous-variétés. On le notera par abus de langage $\mu: W \rightarrow N$.

La figure et le tableau suivant aideront à fixer ces notations:

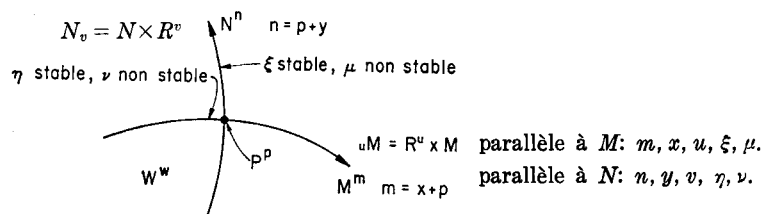


FIGURE 1

1. La transversalité stable

Définition 1.1. La variété N est stablement transverse à la variété M en P pour η , noté $N \pitchfork M$ pour η , si:

- (i) Les variétés M et N sont localement transverses et $P = M \cap N$.
- (ii) Près de P on a $N_\nu = \eta^{-1}(P)$.

La variété N est stablement transverse à la variété M s'il existe un microfibré normal stable η tel que $N \pitchfork M$ pour η ; auquel cas nous dirons que le microfibré η cale stablement la variété N .

La variété N est transverse à la variété M pour ν , noté $N \pitchfork M$ pour ν si près de P on a

$$N = \nu^{-1}(P).$$

Nous dirons en ce cas que le microfibré ν cale la variété N .

THÉORÈME DE TRANSVERSALITÉ POUR LES SOUS-VARIÉTÉS 1.2. Soit C un fermé de W tel que, près de C la variété N soit stablement transverse à M ; soit D un autre fermé de W , soit V un voisinage de D dans W et soit $\varepsilon: W \rightarrow [0, \infty]$ une fonction continue, positive sur D .

Alors dès que $p = m + n - w \neq 4$, $w - m \geq 3$ et $w - n \geq 3$ il existe une ε -isotopie h_t , $0 \leq t \leq 1$, rel $C \cup (W - V)^*$ de l'identité de W à un h_1 tel que $h_1(N)$ soit stablement transverse à M près de $C \cup D$.

Plus précisément si $N \pitchfork M$ pour η' près de C il existe un η égal à η' près de C tel que $h_1(N) \pitchfork M$ pour η près de $C \cup D$.

La preuve sera donnée au Paragraphe 3.

PREMIER THÉORÈME DU MICROFIBRÉ NORMAL AMBIANT 1.3. Supposons $N \pitchfork M$ pour η ; soit C un fermé de W et μ' un microfibré normal à N dans W défini près de C , tel que: près de C on ait $M \pitchfork N$ pour μ' et de plus les fibrés stables η et $\mu' \times (\text{id} | R^v)$ commutent en tant que rétractions. Soit μ_0 un microfibré normal à P dans M qui étende la restriction de μ' à P .

Alors dès que $w - m \geq 3$ et $w - n \geq 3$ il existe un microfibré normal μ à N dans W^{**} étendant μ' et μ_0 tel que l'on ait $M \pitchfork N$ pour μ et le fibré normal stable η est concordant relativement à C à un fibré η' qui commute avec $\mu \times (\text{id} | R^v)$.

La preuve occupera le Paragraphe 5, on en tirera aussi comme corollaire le

THÉORÈME DE SYMÉTRIE 1.4. Dès que $w - m \geq 3$ et $w - n \geq 3$ la variété

* "rel" signifie fixant un voisinage de.

** défini seulement près de $M \cap N$.

N est stablement transverse à M si et seulement si:

- (1) Les variétés M et N sont localement transverses, et
- (2) Il existe près de P deux microfibrés normaux stables ${}_u\eta: {}_uW_v \rightarrow {}_uM$ et $\xi_v: {}_vW_v \rightarrow N_v$ qui commutent en tant que rétractions et vérifient:

$${}_uM \pitchfork N_v \text{ pour } \xi_v \text{ et } N_v \pitchfork {}_uM \text{ pour } {}_u\eta.$$

Plus précisément:

a) Si $N \pitchfork M$ pour η posons ${}_u\eta = (\text{id}|R^u) \times \eta$. Supposons qu'un ξ'_v soit défini près d'un fermé C et y jouit avec ${}_u\eta$ des propriétés (2). Alors ξ'_v s'étend en un ξ_v défini près de tout N_v et jouissant avec ${}_u\eta$ des propriétés (2).

b) Soit C un fermé de W près duquel $\xi_v = \xi' \times (\text{id}|R^v)$ où ξ' est un microfibré normal stable à N dans ${}_uW$, défini près de C . Alors il existe une concordance stable relative à C de ξ_v à $\xi \times (\text{id}|R^v)$ où ξ étend ξ' et $M \pitchfork N$ pour ξ .

Le lecteur pourra en déduire le:

SECOND THÉORÈME DU MICROFIBRÉ NORMAL AMBIANT 1.5. Supposons $N \pitchfork M$ pour η ; soit C un fermé de W et ν' un microfibré normal à M dans W , défini près de C et tel que: près de C on ait $N \pitchfork M$ pour ν' et $\eta = p \circ \nu'$ où $p: W_v \rightarrow W$ est la projection; soit ν_v un microfibré normal à P dans N qui étende la restriction près de C de ν' à P .

Alors dès que $w - m \geq 3$ et $w - n \geq 3$ il existe un microfibré normal ν à M dans W défini près de P , étendant ν' et ν_v , tel que $M \pitchfork N$ pour ν et il existe de plus une concordance stable relative à C de η à $p \circ \nu$.

Définition 1.6. Soit M une sous-variété localement plate d'une variété topologique W . Une application f d'une variété topologique N dans W est dite *stablement transverse* à M si:

- (i) $f^{-1}(M)$ est une sous-variété localement plate de N .
- (ii) L'application stabilisée $f \times (\text{id}|R^v): N_v \rightarrow W_v$ est homotope, à travers des applications F_i telles que $F_i^{-1}(M) = f^{-1}(M)$, à un morphisme F_1 d'un microfibré normal stable à $f^{-1}(M)$ dans N_v vers un microfibré normal stable à M dans W_v . Remarquons que grâce à l'unicité à isotopie près des microfibrés normaux stables (voir [Hi] et [KS-1, IV App. A]) cette définition est indépendante des microfibrés choisis. On peut bien sûr donner une définition plus "précise" (analogue à 1.1) où les microfibrés sont explicitement mentionnés. Le lecteur établira alors (s'il en éprouve le besoin) la forme "précise" du

THÉORÈME DE TRANSVERSALITÉ DES APPLICATIONS 1.7. Soit C un fermé

de W au-dessus* duquel l'application $f: N \rightarrow W$ soit stablement transverse à M . Soit D un autre fermé de W , soit V un voisinage de D et soit $\varepsilon: W \rightarrow [0, \infty]$ une fonction continue, positive sur D .

Alors dès que $m + n - w \neq 4$ et $w - m \geq 3$ il existe une ε -homotopie f_t , $0 \leq t \leq 1$, fixe au dessus de $C \cup (W - V)$, de f à un f_1 qui soit stablement transverse à M au dessus de $C \cup D$.

La preuve est reportée au Paragraphe 6.

2. Les théorèmes auxiliaires

Dans ce paragraphe nous énonçons les résultats nécessaires à la preuve, donnée au paragraphe suivant, du théorème de transversalité. Un des points de cette preuve est une "astuce d'échange" qui va nous faire inverser les rôles de M et N .

Afin de réduire au minimum les risques de torticolis dans les situations "inverties" les figures associées aux théorèmes auxiliaires satisferont toujours aux conventions de la Figure 1.

Le lemme suivant suffirait à prouver un théorème de transversalité si " P admettait un microfibré normal unique dans N ." Nous l'appliquerons dans la variété stabilisée W_v . On peut le considérer comme un substitut de l'unicité des voisinages tubulaires DIFF.

LEMME D'UNICITÉ 2.1. Pour $i = 0$ et $i = 1$ soit M_i une sous-variété de W avec fibré normal ν_i tel que N soit transverse à M_i pour ν_i en P et $\nu_0|_P = \nu_1|_P = \nu$. Soit C un fermé de P près duquel (M_0, ν_0) et (M_1, ν_1) soient égaux, soit D un autre fermé de P et V un voisinage de D dans W .

Alors dès que $m \geq 5$ il existe une isotopie h_t rel $C \cup (W - V)$ et fixant N de l'identité de W à un h_1 tel que, près de $C \cup D$ le transporté** de ν_0 par h_1 soit égal à ν_1 (et donc $M_1 = h_1(M_0)$).

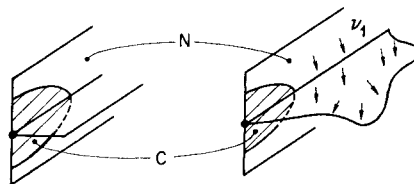


FIGURE 2

La preuve, qui consiste en une application répétée du théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique sera donnée au Paragraphe 4.

* "au dessus de C " signifie près de $f^{-1}(C)$.

** Par définition $h_1 \circ \nu_0 \circ h_1^{-1}$; on le note désormais $h_1(\nu_0)$.

Remarques 2.2. (1) Le lemme d'unicité ne sera utilisé, au Paragraphe 3, que sous sa forme absolue (on a énoncé la forme relative pour permettre une démonstration locale).

(2) L'intérêt du lemme d'unicité est de passer à côté du "théorème faux" suivant (voir Appendice C):

Si N_0 et N_1 sont stablement transverses à M en P et $N_0 = N_1$ près d'un fermé C il existe une isotopie h_t relative à C et fixant M telle que $h_1(N_0) = N_1$.

(3) Le fait que dans ce lemme la variété N soit laissée fixe facilitera la déstabilisation (voir § 3 et comparer avec l'Appendice C où un théorème de déstabilisation "de l'autre côté" devra être utilisé).

Quelques définitions. Un plongement $f: K \times I \rightarrow Q$ (K un espace topologique) vers une variété Q est *localement non-noué le long de I* , si pour tout point (x, t) de $K \times I$ il existe un voisinage $U_x \times V_t$ dans $K \times I$, une variété P_x contenant U_x et un plongement ouvert $F: P_x \times V_t \rightarrow Q$ qui prolonge $f|_{U_x \times V_t}$. Remarquons qu'en ce cas $f^{-1}(\partial Q)$ est de la forme $K \times \{0, 1\} \cup L \times I$ où L est un fermé de K . Nous dirons que f est une *concordance entre les plongements* $f|: K \times 0 \rightarrow \partial Q$ et $f|: K \times 1 \rightarrow \partial Q$.

Dans le cas où $Q = M \times I$ et $K \subset M \times 0$, la concordance f est relative à un fermé C de K si f restreinte à un voisinage de $C \times I$ est en produit avec I .

Soit P une sous-variété de N , un germe transverse à N en P dans W est un germe autour de P de sous-variété de W localement transverse à N en P .

Nous dirons que deux germes transverses M_0 et M_1 sont *concordants* s'il existe une concordance $f: (N \cup M_0) \times I \rightarrow W \times I$ telle que $f|_{M_0 \times 0} \cup N \times I$ soit l'inclusion et $f(M_0 \times 1) = M_1 \times 1$.

Le théorème qui suit nous permettra de tirer dans la variété ambiante des conclusions analogues à celles que nous donne le lemme d'unicité dans la stabilisée W_v .

THÉORÈME DE STABILITÉ 2.3. *Soit M un germe transverse en P à la sous-variété stabilisée N_v dans W_v . Soit C un fermé de W tel que, près de C , la variété M soit germe transverse à N en P dans W , soit D un autre fermé de W et V un voisinage de D dans W_v .*

Alors, dès que $w - m \geq 3$ et $w - n \geq 3$, il existe une concordance relative à $(C \cap M) \cup (M - V)$ de M à un M' qui, près de $C \cup D$, soit germe transverse à N en P dans W .

Il y a un deuxième théorème de stabilité que l'on utilisera pour calculer l'espace des germes transverses dans l'Appendice C (Théorème B.3).

Le Théorème 2.3 (ainsi que l'analogue B.3) est un corollaire du théorème

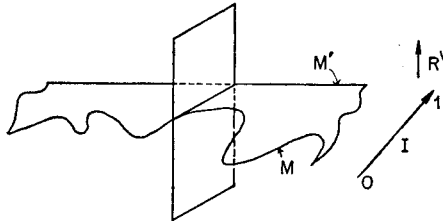


FIGURE 3

de Casson-Sullivan sur les plongements en codimension trois. Rourke et Sanderson prouvent dans le cas PL un théorème équivalent ([RS-1, § 3]). Nous donnerons une démonstration calquée sur celle de Rourke et Sanderson dans l'Appendice B.

Nous désignerons par K , soit une variété topologique, soit la réunion d'une variété et de l'un de ses germes transverses, soit plus généralement un polyèdre topologique non localement noué dans ∂Q , ce qui, selon Edwards [E-1], signifie que K est un fermé de ∂Q tel que pour tout x de K , il existe un voisinage (P_x, U_x) de x dans $(\partial Q, K)$ qui soit homéomorphe à (R^{q-1}, T) où T est un polyèdre de R^{q-1} tel que pour tout x de T le groupe fondamental $\pi_1(Lk(x, R^{q-1}) - Lk(x, T))$ soit libre.

THÉORÈME DE LICKORISCH-SIEBENMANN TOPOLOGIQUE 2.4 (cf. [LS]). *Soit $f: K \times I \rightarrow Q$ une concordance, soit C un fermé de K et soit U un voisinage de C dans ∂Q . Supposons donnée $F: U \times I \rightarrow Q$ une concordance qui prolonge f restreinte à $C \times I$.*

Alors dès que $\dim Q \geq 7$ (ou 6 si $\text{codim } K \geq 3$ ou si K est une variété), il existe U_1 un voisinage de K dans ∂Q et $F_1: U_1 \times I \rightarrow Q$ une concordance qui prolonge f et est égale à F près de $C \times I$.

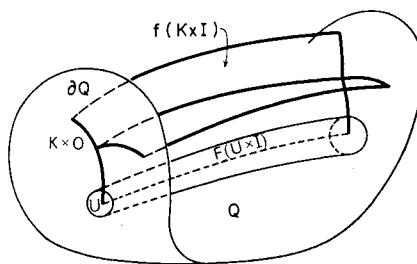


FIGURE 4

Rourke et Sanderson ont prouvé ce théorème si K est une variété [RS-2]; on peut, dans le cas $\text{codim } K \geq 3$, obtenir une preuve plus directe utilisant la triangulation locale et le théorème de Lickorisch-Siebenmann PL, une preuve topologique du cas général s'appuyant sur la théorie des voisinages

réguliers d'Edwards apparaît dans l'Appendice A; cette preuve cependant exige $\dim Q \geq 7$.

On notera que ce résultat permet de donner une forme relative (à un $K \times I$ de codimension strictement supérieure à deux) du théorème topologique du s -cobordisme, et donc un théorème global d'extension des concordances (dans le cas $Q = V \times I$).

Remarque 2.5. Tous les énoncés des Paragraphes 1 et 2 ont une forme fortement relative, il suffit donc de les prouver localement. Ce que l'on entendra par localement sera précisé au début de chaque démonstration après les mots "on peut supposer."

3. Preuve du théorème de transversalité 1.2

Le cas $m = 3$ en codimension ≥ 3 est immédiat car transversalité stable n'est que transversalité locale; le théorème est obtenu en triangulant localement et en mettant en position générale. Le même argument prouve un théorème de transversalité dans le cas $m = 4$, il est cependant moins trivial de reconnaître que transversalité locale et transversalité stable sont la même chose (voir Appendice D). Nous ne traiterons donc ici que le cas $m \geq 5$.

Nous allons bouger M et non N pour obtenir une isotopie h_t telle que $N \pitchfork h_t(M)$ pour η près de $C \cup D$. Cette conclusion est cependant équivalente à celle du théorème (il suffit d'utiliser la version avec ε et de considérer l'isotopie h_t^{-1}).

On peut supposer $W = R^x \times N$, M et N sont des cartes, D compact et $V = W$, l'isotopie devant être à support compact. Remarquons aussi que grâce à une excision préalable de C , on peut remplacer la condition $\eta = \eta'$ près de C par $\eta = \eta'$ hors d'un compact.

Le cas favorable 3.1 est celui où l'on a de plus:

$$\left. \begin{aligned} M &= R^x \times P \\ \eta' &= (\text{id} \mid R^x) \times (\eta' \mid P) \end{aligned} \right\} \text{près de } C \cap D \cap N.$$

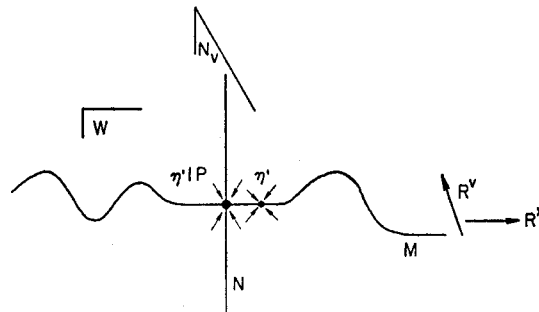


FIGURE 5 (près de $C \cap D \cap N$)

Il suffit alors d'appliquer le théorème de Kirby-Siebenmann au microfibré trivial normal à N pour obtenir l'isotopie h_t .

Reste à construire η : par l'existence des microfibrés normaux stables $\eta'|P \cap C$ s'étend en un microfibré normal η_+ à $P_+ = N \cap h_1(M)$ près de $C \cup D$ dans N_v (voir [Hi] et [KS-1, IV App. A]). Nous définirons donc η hors de C par $\eta = (\text{id}|R^x) \times \eta_+$.

Remarque 3.2. Le cas favorable illustre l'astuce d'échange qui consiste à se distancier du microfibré η' donné pour aller appliquer le théorème de Kirby et Siebenmann à un microfibré "artificiel" de l'autre côté.

Il s'agit maintenant de se ramener au cas favorable 3.1.

AFFIRMATION 3.3. *Il existe un homéomorphisme φ de W fixant N tel que, près de $C \cap D \cap N$:*

$$(1) \quad \varphi^{-1}(M) = R^x \times P;$$

(2) η' est concordant au transporté par $\varphi \times (\text{id}|R^v)$ de $(\text{id}|R^x) \times (\eta'|P)$ par une concordance qui respecte N_v .

Le théorème d'extension des concordances (théorème de Lickorisch-Siebenman topologique 2.4) permet de supposer la concordance à support compact (cette remarque sera systématiquement utilisée dans ce qui suit). L'affirmation produit donc un η'' égal à η' hors d'un compact et qui vérifie les hypothèses du cas favorable.

Preuve de l'Affirmation 3.3. Construisons d'abord φ . Le lemme d'unicité 2.1 nous offre $\Phi: I \times W_v \leftrightarrow$ fixant $I \times N_v$, une isotopie de l'identité de W_v telle que

$$\Phi_1((\text{id}|R^x) \times (\eta'|P)) = \eta \text{ près de } C \cap D \cap N, \text{ ainsi } \varphi_1(R^x \times P) = M \text{ près de } C \cap D \cap N.$$

Nous allons construire une concordance, de l'identité de W_v , $\Phi': I \times W_v \leftrightarrow$ telle que:

$$(a) \quad \Phi' = \Phi \text{ près de } 1 \times (C \cap D \cap N).$$

(b) $\Phi'(I \times M) \subset I \times W (\subset I \times W_v)$ près de $I \times (C \cap D \cap N)$ et $\Phi'(I \times M)$ y est germe transverse à $I \times N$ dans $I \times W$.

Le théorème de stabilité 2.3 nous donne un $\Phi'|I \times M$ avec les propriétés (a) et (b) et une concordance relative à $1 \times (C \cap D \cap N)$ de $\Phi|I \times M$ à ce $\Phi'|I \times M$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique 2.4 à cette concordance (dont on note l'intervalle J) relativement à $(1 \times (C \cap D \cap N) \times J) \cup (0 \times W_v \times J)$. Le temps 1 de l'extension obtenue sera l'épaississement Φ' cherché de $\Phi'|I \times M$.

Par le théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique, la flèche (définie seulement près de $I \times (C \cap D \cap N)$)

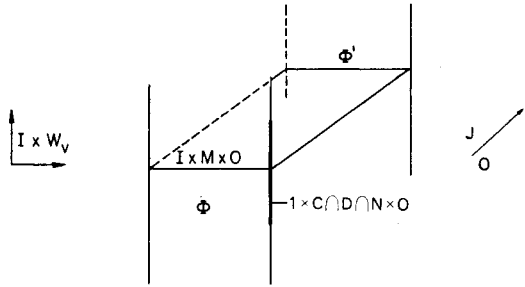


FIGURE 6

$$\Phi' : I \times (M \cup N) \longrightarrow I \times W$$

se prolonge en une concordance de l'identité de W à support compact et fixant $I \times N$:

$$\Phi'' : I \times W \longrightarrow I \times W .$$

Nous définissons $\varphi = \Phi'_1$ et la propriété $M = \varphi(R^x \times P)$ près de $C \cap D \cap N$ résulte de ce que, près de $C \cap D \cap N$, on a $\varphi|(R^x \times P) = \Phi''_1| = \Phi'_1| = \Phi_1|$.

La concordance de η' résultera d'une concordance de $\varphi \times (\text{id} | R^o)$ à $\Phi'_1 = \Phi_1$ près de $C \cap D \cap N$ et fixant M et N ; cette dernière découle du lemme suivant qui achèvera la démonstration du théorème de transversalité 1.2.

LEMME D'UNICITÉ DES PROLONGEMENTS 3.4. Soit $f : I \times K \rightarrow I \times Q$ une concordance de $f_0 : K \hookrightarrow Q$ et $F', F'' : I \times Q \rightarrow I \times Q$ deux concordances de $\text{id} | Q$ qui prolongent f . Alors F'_1 et F''_1 sont concordants par une concordance fixant $I \times K$ que l'on peut de plus supposer relative à un fermé C si F' et F'' sont égales près de $C \times I$.

Preuve de 3.4. La concordance est $(\text{id} | I \times F'_1) F'^{-1} F'' : I \times Q \hookrightarrow$. ■

Remarque sur "concordance implique isotopie" 3.5. Toutes les concordances de la preuve précédente peuvent se remplacer par des isotopies en vertu du théorème d'extension des isotopies et du théorème de "concordance entraîne isotopie" pour les germes transverses. Ce théorème résulte du théorème d'Hudson ([Hu-2]) dès que l'on a noté que le lemme de triangulation de l'Appendice B permet de trianguler la situation près de $I \times D$ où D est dans une carte de P . (Le théorème de concordance entraîne isotopie TOP est vrai pour polyèdres et variétés de codimension ≥ 3 (voir [Pe]) mais plus difficile à prouver car on ne peut pas supposer $f(I \times x) \subset I \times V$ où V admet une structure PL.)

4. Preuve du lemme d'unicité 2.1

On peut supposer que ν est trivial, trivialisé par $\varphi : P \times R^y \rightarrow N$.

AFFIRMATION 4.1. *Il existe des trivialisations $\varphi_i: M_i \times R^y \rightarrow W$ de ν_i pour $i = 0$ et $i = 1$ qui prolongent φ et soient égales près de C .*

AFFIRMATION 4.2. *Il suffit de montrer le lemme d'unicité dans le cas $y = 1$.*

Les preuves seront données en fin de paragraphe. Plaçons-nous donc dans le cas $y = 1$, φ_0 et φ_1 étant les trivialisations de l'affirmation 4.1.

Introduisons les glissements τ_i^t de $M_i \times R$ pour $i = 0$ et $i = 1$ définis par: $\tau_i^t(z, s) = (z, s + t)$.

Dans le cas absolu l'isotopie h_t fera commuter le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccccccc}
 M_0 \times R & \xrightarrow{\tau_0^0} & M_0 \times R & \xrightarrow{h} & M_1 \times R & \xrightarrow{\tau_1^1} & M_1 \times R \\
 \varphi_0 \downarrow & & & \boxed{h_t} & & & \downarrow \varphi_1 \\
 W & & & & & & W
 \end{array}$$

où h est un plongement ouvert qui reste à définir. Dans le cas relatif, il suffit d'atténuer ce h_t absolu par une fonction continue $\gamma: W \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:

$$\gamma(z, t) = 0 \text{ pour } z \text{ hors de } V.$$

$$\gamma(z, t) = t \text{ pour } z \text{ près de } D.$$

Construction de h . Soit Q le germe de variété autour de $P \times [1/4, 3/4]$ comprise entre $\varphi_0(M_0 \times 1/4)$ et $\varphi_1(M_1 \times 3/4)$ (ces germes sont disjoints car $\varphi_0 = \varphi_1$ sur $P \times R$).

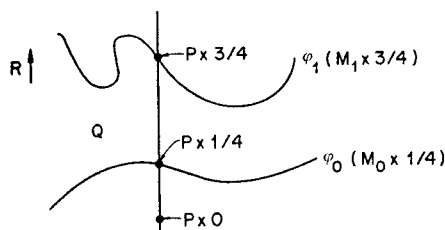


FIGURE 7

φ_0 étend la concordance $P \times [1/4, 3/4]$ près de $C \times [1/4, 3/4]$; soit F définie près de $P \times [1/4, 3/4]$ une extension de φ_0 , définissons h sur trois morceaux:

$$h = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_0 \text{ sur } M_0 \times \left] -\infty, \frac{1}{4} \right],$$

$$h = \varphi_1^{-1} \circ F \text{ sur } M_0 \times \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right],$$

$$h = \varphi_1^{-1} \circ F_{3/4} \times \text{id} \left[\left[\frac{3}{4}, \infty \right] \text{ sur } M_0 \times \left[\frac{3}{4}, \infty \right] \right]. \quad \blacksquare$$

* L'isotopie h_t est définie par ce diagramme sur $\varphi_0(M \times R)$, le théorème d'extension des isotopies produit une isotopie h_t définie sur tout W .

Preuve de l’Affirmation 4.2. Appliquons une première fois le lemme d’unicité (cas $y = 1$) à $(\varphi_i(M_i \times R^{y-1}), \varphi_i(p_i))$, où p_i est la projection: $M_i \times R^y \rightarrow M_i \times R^{y-1}$, et soit g_i l’isotopie obtenue. Dans la variété $g_1(\varphi_0(M_0 \times R^{y-1})) = \varphi_1(M_1 \times R^{y-1})$ appliquons le lemme d’unicité (supposé vrai par induction sur y) et soit k_i l’isotopie produite. Il suffit de poser: $h_i = (k_i \times \text{id}|R) \circ g_i$ (où l’expression $k_i \times (\text{id}|R)$ correspond à la décomposition en produit déterminée par φ_1). ■

Preuve de l’Affirmation 4.1. Une trivialisaton pouvant s’interpréter comme un morphisme dans un fibré trivial, l’affirmation découlera du lemme suivant:

LEMME 4.3. *Supposons N transverse à M en P pour ν et soit $r: M \rightarrow P$ une rétraction (définie seulement près de P). Alors il existe près de P un morphisme de microfibré $\rho: \nu \rightarrow \nu|P$ au dessus de la rétraction r . De plus, si un tel ρ_0 est donné près d’un fermé C on peut imposer $\rho = \rho_0$ près de C .*

Preuve de 4.3. Remarquons qu’il existe un voisinage V de P dans M et une homotopie $r_t: V \rightarrow M$ telle que $r_0 = \text{id}|M$ et $r_1 = r$ (cette construction peut se relativiser). Il suffit alors d’appliquer le théorème d’homotopie des microfibrés (qui est relatif). ■

Nous aurons besoin au paragraphe suivant du:

Complément 4.4. Si la rétraction r est la projection d’un microfibré μ_0 , le morphisme ρ de 4.3 est la projection d’un microfibré μ normal à N qui étend μ_0 et commute avec ν . ■

Remarque 4.5. Soit W' une sous-variété de W localement transverse à N en l’espace total de $\nu|P'$, où P' est une sous-variété de P . La preuve donnée offre un lemme d’unicité respectant W' dès que ν_0 et ν_1 respectent W' et $m + p' - p \geq 5$.

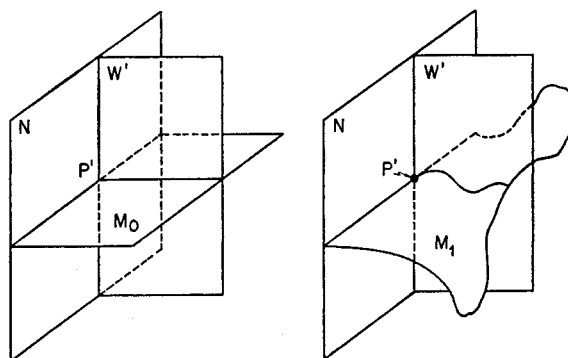


FIGURE 8

5. Preuves du premier théorème du microfibré ambiant 1.3 et du théorème de symétrie 1.4

A. *Le premier théorème du microfibré ambiant 1.3.* Le complément 4.4 nous offre un microfibré μ_v normal à N_v dans W_v , qui étend $\mu' \times (\text{id} | R^v)$ et μ_0 et pour lequel M est transverse à N_v . Toujours par ce même complément $\mu_v^{-1}(N)$ admet un microfibré normal trivial étendant $p: C \times R^v \cup N \times R^v \rightarrow C \cup N$. Le lemme d'unicité fournit alors une isotopie h_t relative à C et fixant N_v qui pousse $\mu_v^{-1}(N)$ sur W . Nous n'avons pas nécessairement $h_1 | \mu_v^{-1}(P) = \text{id} | M$, mais ceci peut être corrigé au moyen d'une concordance G (relative à C et fixant N_v): il suffit de remarquer que $h_1 | \mu_v^{-1}(P)$ et $\text{id} | M$ sont isotopes, et donc concordants, dans W_v , le théorème de stabilité 2.3 produit alors une concordance g dans W entre ces deux plongements, on l'étend par le théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique 2.3 en une concordance g_1 définie près de P . Il suffit de poser $G = g_1 \times \text{id} | R^v$. Le microfibré μ est $g_1(\mu_v | N)$. ■

B. *Le théorème de symétrie 1.4.* La partie (a) découle du complément 4.4 une fois remarqué qu'il existe un microfibré ξ_0 normal à P dans ${}_uM$ étendant $\xi'_v | P \cap C$.

Quant à la partie (b), ce n'est que le premier théorème du microfibré normal ambiant où l'on a fait les substitutions:

$$(M, N, \eta, \mu', \mu_0, C) \rightsquigarrow ({}_uM, N, \eta, \xi', \xi_0, C)$$

où ξ_0 est obtenu (comme pour la partie (a)) par unicité des microfibrés normaux stables. ■

6. Preuve du théorème de transversalité des applications 1.7

Il s'agit de se ramener au théorème de transversalité des sous-variétés 1.2.

Pour cela, soit p un plongement localement plat de N dans R^v ; l'application $p \times f: N \rightarrow {}_uW$ est un plongement. Vérifions qu'il y a équivalence entre:

- (1) f stablement transverse à M ,
- (2) $p \times f(N)$ stablement transverse à ${}_uM$.

Soit pour ceci ξ un microfibré normal à $f^{-1}(M)$ dans N_v et soit F_1 le morphisme du ii) de la définition. Le plongement $(p \circ \xi) \times F_1: N_v \rightarrow {}_uW_v$ est, près de $f^{-1}(M)$, homotope au plongement $p \times f \times (\text{id} | R^v)$, l'homotopie H_t fixant $f^{-1}(M)$ et vérifiant $H_t^{-1}({}_uM) = f^{-1}(M)$; comme u est grand, nous pouvons transformer cette homotopie en une isotopie K_t jouissant des mêmes propriétés. La variété $p \times f(N)$ est alors transverse à ${}_uM$ pour le microfibré $K_t((\text{id} | R^v) \times \eta)$ (où η désigne le microfibré normal à M dans W_v).

Réciproquement l'unicité des microfibrés normaux stables (on se permet

d'augmenter v) fournit une isotopie de tout fibré normal à ${}_uM$ dans ${}_uW$, à un fibré de la forme $(\text{id}|R^u) \times \eta$; l'homotopie F_t cherchée est la projetée sur W de cette isotopie.

On laissera au lecteur le soin de relativiser la discussion précédente. Le théorème de transversalité des applications 1.7 découle alors du théorème de transversalité des sous-variétés 1.2 appliqué dans ${}_uW$. ■

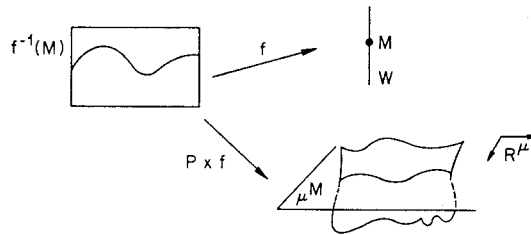


FIGURE 9

Appendices

A. Preuve du théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique 2.4

Première preuve par triangulation locale (K variété ou $\text{codim } K \geq 3$). Si K est une variété de codimension inférieure ou égale à deux, il existe par [KS-2] un microfibré normal; le théorème d'homotopie des microfibrés permet alors de conclure.

Le théorème étant local, on peut supposer que K est un vrai polyèdre contractile. Le germe de voisinage de $K \times I$ dans Q se trouve ainsi muni d'une structure PL unique; le théorème de structure en produit permet de supposer que la concordance F est PL. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de triangulation des plongements en codimension 3 pour se ramener au classique théorème de Lickorisch-Siebenmann PL.

Preuve topologique alternative avec la restriction $Q \geq 7$. Soit R une variété topologique à bord, dont le bord ∂R est décomposé en sous-variétés de codimension zéro S_0, S_1 et T telles que $\partial T = \partial S_0 \cup \partial S_1$. Soit X un polyèdre topologique non localement noué dans S_0 et soit $g: X \times I \rightarrow R$ une concordance. On suppose de plus que $Y = \partial S_0 \cap X$ est un polyèdre topologique colleté dans X que $g(Y \times I)$ est dans T et que $g(X \times 1)$ est dans S_1 .

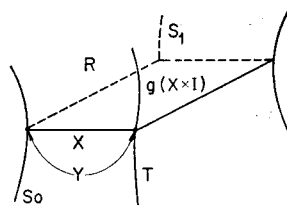


FIGURE 10

AFFIRMATION A.1. *Dès que $\dim R \geq 8$ il y a un homéomorphisme du germe de S_0 autour de $X \times 0$ sur le germe de S_1 autour de $g(X \times 1)$ qui prolonge $g_1 \circ g_0^{-1}$.*

Preuve de A.1. Rappelons d'abord qu'Edwards construit en [E-1] des voisinages réguliers d'un polyèdre topologique X non localement noué dans une variété topologique V de dimension strictement supérieure à cinq (six dans le cas à bord où il faut supposer de plus que $Y = X \cap \partial V$ est un polyèdre topologique colleté dans X). Ce sont des sous-variétés \mathcal{O} de V de codimension zéro munies d'une rétraction propre r "cone-like" sur X , on dit alors que X est l'âme du tube (\mathcal{O}, r) ; un tube \mathcal{O} a un bord formel noté $\delta\mathcal{O}$ analogue au fibré en sphères bord d'un voisinage tubulaire. (Dans le cas $\text{codim } X \geq 3$ "cone like" signifie seulement que pour tout x de X la préimage $r^{-1}(x)$ est UV^∞ et $r^{-1}(x) \cap \delta\mathcal{O}$ est UV^1 .)

Soit donc (\mathcal{R}, r) un tel tube autour de $g(X \times I)$ qui se restreigne en (\mathcal{S}_i, r) et (\mathcal{T}, r) des tubes autour de $g(X \times \{i\})$ dans S_i pour $i = 0$ et $i = 1$ et autour de $g(Y \times I)$ dans T . (On utilise ici $\dim \partial S_i = \dim R - 2 \geq 6$.)

Le polyèdre topologique X se trouve muni de deux tubes: $(\mathcal{S}_0 \cup \delta\mathcal{R}, p \circ r)$ où p est la projection $p: X \times I \rightarrow X$ et (\mathcal{S}_1, r) ; ces deux tubes ont même bord formel $\delta\mathcal{S}_1$ et même rétraction restreinte au bord, ils sont donc homéomorphes par le théorème du cylindre d'Edwards ([E-1]) qui affirme qu'un tube est homéomorphe (par un homéomorphisme fixant le bord formel et l'âme) au cylindre d'application de la restriction de sa rétraction au bord formel (la preuve se trouve essentiellement dans [EG]). ■

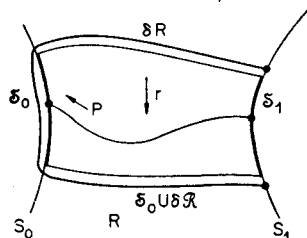


FIGURE 11

Le cas absolu du théorème de Lickorisch-Siebenmann TOP. Désignons par V_i pour $i = 1$ et $i = 2$ des voisinages disjoints de $f(K \times i)$ dans le bord de Q et soit $c: (V_0, f(K \times 0)) \times [0, 2\epsilon[\rightarrow (Q, f(K \times I))$ un collier étendant f .

Soit $h: I \times I \rightarrow I \times I$ un homéomorphisme du carré, fixant $I \times 0 \cup 0 \times I$ qui envoie $I \times 1$ sur $[0, \epsilon] \times 1$.

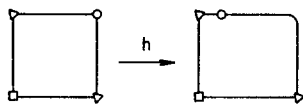


FIGURE 12

Appliquons l'affirmation à la situation $R = Q \times I$, $S_0 = Q \times 0$, $S_1 = c(V_0 \times [0, \varepsilon]) \times 1$, $X = K \times I$, $Y = K \times \{0, 1\}$ et $g = (f \times (\text{id} | I)) \circ (\text{id} | K) \times h$. Nous obtenons un homéomorphisme entre le germe de Q en $f(K \times I)$ et celui de $V_0 \times [0, \varepsilon]$ en $K \times [0, \varepsilon]$.

Le cas relatif s'obtient de même en faisant toutes les constructions en produit le long de I près de $C \times I$, ce qui est possible car les théorèmes d'Edwards sont relatifs. ■

B. Preuve du théorème de stabilité 2.3

On peut supposer que P est une carte, que M et N sont des cartes de platitude locale de $P \hookrightarrow M$ et de $P \hookrightarrow N$, que W est une carte de platitude locale de $N \hookrightarrow W$, et que $V = W$, le théorème d'extension des concordances (théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique 2.4) nous permet de supposer la concordance à support compact.

Il suffira de prouver le théorème de stabilité dans le cas PL* en vertu du:

LEMME DE TRIANGULATION B.1. *Il existe une structure ω sur W dont N soit une sous-variété PL et une isotopie h_t relative à $C \cup (W - V)$ et fixant N_* de l'identité de W_* à un h_1 qui rende, près de $C \cup D$ le germe $h_1(M)$ sous-variété PL de W_* munie de la structure $\omega \times R^n$ et PL localement transverse à N_* .*

Preuve de B.1. Munissons tout d'abord P de la structure PL donnée par la carte et M, N, W des structures en produit fournies par les cartes de platitude locale.

Près du fermé C l'inclusion $M \cup N \hookrightarrow W$ est un plongement non localement noué de polyèdres qui est PL sur le sous-polyèdre N . Le théorème de triangulation des plongements en codimension ≥ 3 de Miller (voir [E-2] et [KS-1, III App. B]) donne une structure ω sur W dont N soit sous-variété PL et telle que, près du fermé C , la variété M soit sous-variété PL, PL localement transverse à N .

Munissons N_* et W_* des structures $N \times R^n$ et $\omega \times R^n$. L'inclusion $M \cup N_* \hookrightarrow W_*$ est un plongement non localement noué, PL sur N_* et près de C . Le théorème de triangulation des plongements produit l'isotopie h_t cherchée. ■

Preuve du théorème de stabilité PL (cf. [RS-1, § 3]). Triangulons W_* avec W, N_*, M et P triangulés comme sous-complexes. Les cellules duales dans la seconde subdivision barycentrique de W_* , W, N_*, N et M des simplexes de la première subdivision barycentrique de P forment cinq fibrés en

* Toutes les données et conclusions de 2.3 sont dans la catégorie PL.

blocs sur P : EW_v, EW, EN_v, EN et EM tels que, si la variété S est sous-variété de R , le fibré en bloc ES est sous-fibré en bloc de ER et, si les variétés S et T sont localement transverses dans R , les fibrés en blocs ES et ET forment une décomposition de ER (voir [RS-3] et [RS-4]).

Construisons par récurrence sur les blocs de EW_v une homotopie respectant les blocs $f: EW_v \times I \rightarrow EW_v \times I$ qui vérifie:

- (0) $f|_{EW_v \times 0} = \text{id}$ et $f^{-1}(EW_v \times i) = EW_v \times i$ pour $i = 0$ et $i = 1$.
- (1) $f^{-1}(EN_v \times I) = EN_v \times I$.
- (2) f est l'identité sur $EW \times I$.
- (3) f_1 est une rétraction de EW_v sur EW .

Nous allons maintenant construire un plongement $\varphi: EM \times I \rightarrow EW_v \times I$ ayant les propriétés (0), (1), (2) et (3) (restreintes à $EM \times I$) ci-dessus.

Supposons construite une application g_k homotope par blocs à f à travers des applications vérifiant (0), (1), (2) et (3) et telle que g_k restreinte à $EM^k \times I$ soit un plongement φ_k (ici EM^k désigne la restriction du fibré en bloc EM au k -squelette de P).

Construisons $\varphi_{k+1}: EM^{k+1} \times I \rightarrow EW_v \times I$ un plongement prolongeant φ_k et homotope par blocs à $g_k|_{EM^{k+1} \times I}$; g_{k+1} s'obtient alors par extension des homotopies par blocs.

Il suffit bien sûr de traiter le cas où P est un simplexe Δ^{k+1} de barycentre b . Notons \dot{E} le bloc fibré en sphères, bord du bloc fibré E .

Remarquons que $g_k|_{\dot{E}M \times I} \rightarrow (\dot{E}W_v - \dot{E}N_v) \times I$ est une équivalence d'homotopie qui est l'identité au temps zéro et le plongement φ_k au-dessus de $\dot{\Delta}^{k+1} \times I$. Le théorème de Casson-Sullivan (voir [W-1, Ch. 11]) produit un plongement homotope à $g_k|_{\dot{E}M}$, qui prolonge φ_k et l'inclusion de la tranche zéro. On étendra successivement ce plongement à $EM \times 1$ et $EM \times I$ en prenant les cônes sur $b \times 1$ et sur $b \times 1/2$. ■

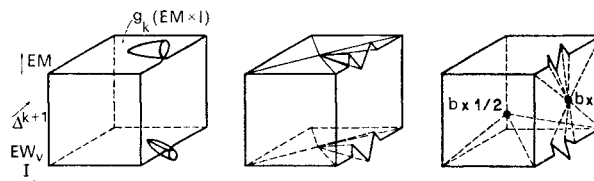


FIGURE 13

Définition B.2. Soit Q^{p+y} un germe de voisinage de P . Un morphisme (homotopique) de (Q, P) dans (N, P) est un germe autour de P d'application $f: Q \rightarrow N$, tel que:

- (1) $f^{-1}(P) = P$ et $f|_P = \text{id}$.
- (2) $f|_{Q-P} \rightarrow N-P$ est, au voisinage de tout point de P de degré un.

En utilisant la forme de Wall du théorème de Casson-Sullivan pour les plongements de Poincaré (Th. 11.3 de [W-1]) le lecteur adaptera la preuve du théorème de stabilité pour établir la forme géométrique suivante de la stabilité de G/TOP (voir Appendice C et [RS-2]):

THÉORÈME B.3. *Soit P une sous-variété de N et $f: (Q, P) \rightarrow (N_v, P)$ un morphisme (homotopique). Dès que $n - p \geq 3$, f est homotope en tant que morphisme à un morphisme f_1 tel que $f_1^{-1}(P_v)$ soit une sous-variété localement plate de Q homéomorphe à P_v par un homéomorphisme φ tel que:*

$$f_1 \circ \varphi = (\text{id} | P) \times (\text{id} | R^n).$$

Indication: Énoncer une forme relative et remarquer qu'une fois la situation locale triangulée et organisée en fibrés en blocs, alors $f^{-1}|(\dot{E}N_v, \dot{E}P_v)$ est un plongement de Poincaré. ■

C. L'espace des germes transverses (cf. [RS-1] et [RS-2])

Considérons M une sous-variété localement plate de W et P une sous-variété localement plate de M . Nous allons introduire quelques espaces semi-simpliciaux) dont nous ne présenterons que les zéro-simplexes pour ne pas alourdir l'exposé.*

$\mathcal{U}(P, M; W)$ sera l'espace des germes transverses à M en P dans W .

Il sera commode de se permettre à tout moment d'augmenter les entiers dest abilisation u et v ; posons donc: $W_\infty = \varinjlim W_v$, ${}_\infty W = \varinjlim {}_u W$, ${}_\infty W_\infty = \varinjlim {}_u W_v$, etc.

L'espace des microfibrés normaux stables à M dans W_∞ est noté $\mathcal{F}(M, W_\infty)$. Le théorème d'unicité des microfibrés normaux stables exprime que cet espace est contractile. Il y a une projection

$$p: \mathcal{F}(M, W_\infty) \longrightarrow \mathcal{U}(P, M; W_\infty)$$

qui, à tout fibré ξ , associe l'espace total de $\xi|P$. Le théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique permet de vérifier que c'est une fibration; on note $\mathcal{F}_0(M; W_\infty)$ la fibre: c'est l'espace des microfibrés stables calant une situation de transversalité donnée.

Considérons l'inclusion

$$i: \mathcal{U}(P, M; W) \longrightarrow \mathcal{U}(P, M; W_\infty)$$

qui, à tout N , associe N_∞ .

$\Lambda(G/TOP)$ désigne l'espace des chemins de G/TOP et $\{P, G/TOP\}$, $\{P, \Lambda(G/TOP)\}$, $\{P, \Omega(G/TOP)\}$ désignent les espaces d'applications de P dans G/TOP , $\Lambda(G/TOP)$ et $\Omega(G/TOP)$ respectivement. Nous pouvons alors énoncer

* Les 1-simplexes seront des concordances.

le

THÉORÈME C.1. (a) *Dès que $w - m \geq 3$ et $m - p \geq 3$, un inverse ν_0 du fibré normal stable η_0 de M dans W_∞ détermine à homotopie fibrée près, une équivalence d'homotopie fibrée*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_0(M; W_\infty) & \hookrightarrow & \mathcal{F}(M, W_\infty) & \longrightarrow & \mathcal{U}(P, M; W_\infty) \\ \rho_0 \downarrow & & \rho_1 \downarrow & & \rho \downarrow \\ \{P, \Omega(G/TOP)\} & \hookrightarrow & \{P, \Lambda(G/TOP)\} & \longrightarrow & \{P, G/TOP\} . \end{array}$$

(b) *Si de plus $n = p + w - m \neq 4$, l'inclusion $i: \mathcal{U}(P, M; W) \rightarrow \mathcal{U}(P, M; W_\infty)$ est une équivalence d'homotopie.*

Commentaire C.2. Ceci signifie pour la pratique qu'étant donné une situation de transversalité locale $(P; M, N; W)$ il y a une obstruction dans $[P, G/TOP]$ à ce que N soit stablement transverse à M et que s'il en est ainsi les classes d'isotopie de microfibrés normaux stables calant la situation sont en bijection avec $[P, \Omega(G/TOP)]$ (ici $[A, B]$ désigne les classes d'homotopie de A dans B). La partie (b) signifie que si $n \geq 5$ toutes les obstructions sont réalisées et que $[P, G/TOP]$ est en bijection avec les classes d'isotopies de germes normaux à M en P dans W (cf. Remarque 3.5). Nous verrons dans l'appendice suivant que le cas $n = 4$ est équivalent à la conjecture de l'annulus.

Nous établirons dans l'Appendice E que, si $w - m \leq 2$, $m - p \geq 3$, et si $w - m = 2$, $p \neq 2$ et $m \neq 2$, l'espace $\mathcal{U}(P, M; W)$ est contractile.

Preuve de C.1. (a) Comme $\mathcal{F}(M, W_\infty)$ est contractile, il suffit de construire l'équivalence d'homotopie ρ . Elle rendra commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(P, \infty M; \infty W_\infty) & \xleftarrow{e} \mathcal{F}(P, \infty M; \infty W_\infty) & \xrightarrow{j} \mathcal{F}(P, \eta_0) \\ \uparrow i' & & \downarrow \oplus \nu_0 \\ \mathcal{U}(P, M; W_\infty) & \xrightarrow{\boxed{\rho}} & \{P, G/TOP\} . \end{array}$$

L'inclusion i' provenant de $W_\infty \hookrightarrow \infty W_\infty$ est une équivalence d'homotopie par le théorème de stabilité 2.3.

$\mathcal{F}(P, \infty M; \infty W_\infty)$ est l'espace des fibrés stables sur P dont l'espace total est un germe transverse à ∞M dans ∞W_∞ en P , l'application d'oubli e est une équivalence d'homotopie par l'unicité des microfibrés normaux stables.

$\mathcal{F}(P, \eta_0)$ est l'espace des microfibrés munis d'une équivalence d'homotopie fibrée vers η_0 , l'application j est définie par $j(\gamma) = (\gamma, \gamma \hookrightarrow (\text{id} | R^\infty) \times \eta_0)$. Le théorème de plongements stables qui permet d'homotoper toute équivalence

d'homotopie fibrée $\eta \rightarrow \eta_0 \hookrightarrow W_\infty \hookrightarrow {}_\infty W_\infty$ à un plongement localement transverse à ${}_\infty M$ nous assure que j est une équivalence d'homotopie.

Quant à $\oplus \nu_0$ elle associe à l'élément $\eta \rightarrow \eta_0$ l'application classifiante du fibré homotopiquement trivialisé $\eta \oplus \nu_0 \rightarrow \eta_0 \oplus \nu_0 = \varepsilon$.

(b) Remarquons que le lemme d'unicité 2.1 nous permet de construire un élément N^0 de $\mathcal{U}(P, {}_\infty M; {}_\infty W)$. Soit $r: {}_\infty W \rightarrow N^0$ une rétraction telle que $r^{-1}(P) = {}_\infty M$ (M est stablement transverse à N^0 pour ξ et l'on peut prendre pour rétraction la projection de ξ).

Par le théorème de stabilité 2.3 il nous suffit de montrer que $\infty i: \mathcal{U}(P, {}_\infty M; {}_\infty W) \rightarrow \mathcal{U}(P, {}_\infty M; {}_\infty W_\infty)$ est une équivalence d'homotopie. Considérons alors le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U}(P_\infty, {}_\infty M_\infty; {}_\infty W_\infty) & \xrightarrow{m_1} & \mathcal{U}(N_\infty^0, P_\infty) & \xrightarrow{e} & \mathcal{U}(N_\infty^0, P) \\ & \swarrow \times \infty & & & \uparrow m_2 \\ & & \mathcal{U}(P, {}_\infty M; {}_\infty W) & \xrightarrow{\infty i} & \mathcal{U}(P, {}_\infty M; {}_\infty W_\infty) \end{array}$$

où $\mathcal{U}(N_\infty^0, P)$ et $\mathcal{U}(N_\infty^0, P_\infty)$ désignent les espaces de germes de voisinages de P et P_∞ munis de morphismes homotopiques dans (N_∞^0, P) et (N_∞^0, P_∞) .

L'application m_1 associe à un germe transverse ce même germe muni du morphisme $r_\infty = r \times (\text{id} | R^\infty)$, quant à m_2 elle associe le germe transverse muni de $r \circ p$ où $p: {}_\infty W_\infty \rightarrow {}_\infty W$ est la projection. Ce sont toutes deux des équivalences d'homotopie par le théorème des plongements stables.

L'application d'oubli e est une équivalence d'homotopie par la forme relative du Théorème B.3.

Quant à $\times \infty$ qui à N associe N_∞ elle est une équivalence d'homotopie pour $n \geq 5$ par la forme respectant une sous-variété (ici $N_1 \in \mathcal{U}(P_\infty, {}_\infty M_\infty; {}_\infty W_\infty)$) du lemme d'unicité (Remarque 4.5). C'est ici que l'on utilise vraiment l'hypothèse $n \geq 5$ car on peut, dans tous les cas, construire le N^0 et une rétraction r (qui ne sera pas nécessairement projection d'un microfibré). ■

Remarque C.3. Si $\mathcal{U}_r(M)$ désigne l'espace des germes de codimension r de voisinages de M le lemme d'unicité 2.1 assure que $\times \infty: \mathcal{U}_r(M) \rightarrow \mathcal{U}_r(M_\infty)$ donnée par $(W, M) \rightarrow (W_\infty, M_\infty)$ est une équivalence d'homotopie dès que $w \geq 5$ et $r \geq 3$: c'est le théorème de stabilité de [RS-2] (voir aussi [E-1]); on retrouve ainsi la classification homotopique des germes de voisinages en se fondant sur le théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique (qui apparaît comme ultime corollaire dans [RS-2]!).

D. La transversalité dans le cas $p = m + n - w \leq 1, w \neq 4$

Supposons N localement transverse à M en P de dimension strictement

inférieure à deux; comme $\pi_0(G/TOP) = \pi_1(G/TOP) = 0$, on peut construire un microfibré stable η qui cale la situation et ce de façon relative (Théorème C.1) (cependant comme $\pi_1(\Omega(G/TOP)) = \pi_2(G/TOP) = Z_2$ il n'y a pas unicité de cet η).

Il suffit donc de prouver un théorème de transversalité relatif pour la notion locale de transversalité.

On peut supposer M , N et W des cartes et la situation triangulée de façon à ce que près de C , les variétés M et N soient PL et PL localement transverses (les plongements localement plats des variétés de dimension strictement inférieure à deux se triangulent, on a donc des structures sur M et N dont P soit sous-variété près de C , le reste de la preuve du lemme de triangulation B.1 restant inchangé).

Après une isotopie (en restant transverse près de C) on peut supposer que les triangulations de M et N sont en position générale près de D , auquel cas on est localement transverse près de $C \cup D$.

Remarque D.1 sur les microfibrés ambiants. Dès que la dimension de N est différente de quatre toute situation localement transverse en une variété P de dimension un est transverse pour un microfibré normal ambiant car P admet un microfibré normal dans N et le second théorème du microfibré normal ambiant 1.5 s'applique.

AFFIRMATION D.2. *Si la dimension de N est quatre la construction d'un microfibré ambiant est équivalente à la conjecture de l'annulus.*

Une forme de cette conjecture étant Lickorisch-Siebenmann TOP, avec K un point, et Q de dimension quatre, elle permet de construire des fibrés normaux aux variétés de dimension un dans les variétés de dimension quatre. Réciproquement un contre-exemple est un arc dans Q qui n'admet pas de fibré normal; notons qu'en recollant deux voisinages V_0 et V_1 des extrémités de cet arc, on obtient un cercle dans une variété orientable N qui n'admet pas de fibré normal:

S'il y avait un fibré normal, il serait trivial et donc le germe de N autour de S^1 serait le bouclage de son revêtement ∞ -cyclique N (voir [S])^{*} mais le revêtement ∞ -cyclique ayant une trivialisatoin où $V_0 = V_1$ est une fibre, le théorème d'unicité des bouclages fournit un fibré normal à S^1 dans N dont $V_0 = V_1$ est une fibre et l'arc avait donc un fibré normal dans Q

^{*} *Attention:* il est essentiel de supposer ici que le voisinage Q^4 de S^1 est trivial. Q^4 n'est pas nécessairement un bouclage au sens de [S] (s'il l'était on viendrait de prouver la conjecture de l'annulus!).

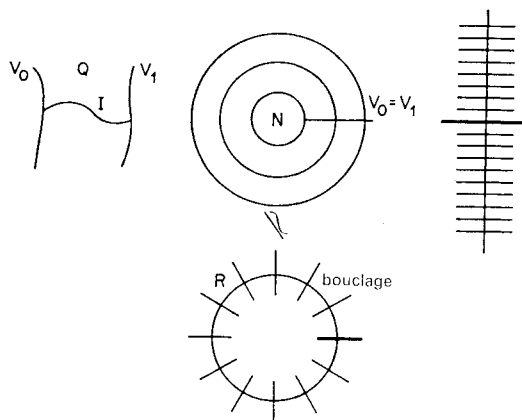


FIGURE 14

contrairement à l'hypothèse. ■

L'homéomorphisme de bouclage est l'identité près de $V_0 = V_1$ et sur S^1 .

E. Les microfibrés normaux respectant une sous variété en codimension inférieure ou égale à deux

COMPLÉMENT AU THÉORÈME A DE [KS-2] E.1. Soit N^{p+y} et M^{p+z} deux sous-variétés localement transverses en P^p dans W^w , la codimension y de M étant inférieure ou égale à deux, et la codimension x de N supérieure strictement à deux. Soit ν_0 et ν_1 deux microfibrés normaux à M dans W dont les restrictions à P sont des microfibrés normaux à P dans N . Soit C un fermé de M près duquel ν_0 et ν_1 coïncident. Soit D un autre fermé de M et V un voisinage de D dans W .

Alors dès que $(n, p) \neq (4, 2)$ et $(w, m) \neq (4, 2)$ il existe une isotopie h_t de l'identité de W relative à $C \cup (W - V)$ et fixant M telle que $h_1(\nu_0) = \nu_1$.

Preuve. Le cas $y = 1$ est le théorème du collier relatif qui est bien connu.

Pour le cas $y = 2$, il suffit de relire l'article de Kirby et Siebenmann en utilisant cependant la catégorie PL^* et l'unicité des fibrés normaux PL en codimension 2 (voir [RS-3], [W-2], le cas respectant une sous-variété découlant de $B PL_{y+2, y, 2}$ contractile pour $x \geq 3$ [RS-1]). Le lemme de l'anse devient

LEMME DE L'ANSE E.2. Soit $h: (B^k \times R^{q+z+2}, B^l \times R^{q+2}, B^k \times R^{q+z}) \hookrightarrow$ (où $l = k$ ou $l < k$ et $q = 0$) un homéomorphisme identité sur $B^k \times R^{q+z}$ et PL près de $\partial B^k \times R^{q+z+2}$.

Alors si $p = q + l \neq 2$ et $m = k + q + z \neq 2$, il existe une isotopie h_t à support compact, relative à $\partial B^k \times R^{q+z+2}$, fixant $B^k \times R^{q+z}$ et respectant

* Car nous utiliserons les théorèmes de triangulation en codimension ≥ 3 de Miller.

$B^l \times R^{q+2}$ de h à un h_1 qui soit un plongement PL près de $B^k \times R^{q+z}$.

Preuve de E.2. Comme Kirby et Siebenmann nous ne traiterons que le cas $z \neq 0$, le cas $z = 0$ se traitant par une construction analogue et plus simple.

On construit le tour en partant de

$$i: B^k \times T^{q+(z-1)+2 \times R \rightarrow B^k \times R^{q+z+2}}$$

un plongement de Novikov tel que $h \circ i | B^l \times T^{q+2} \times 0$ soit un plongement PL. Ceci s'obtient par triangulation des plongements en codimension strictement supérieure à deux.

Cet ajustement fait, la machine tourne en respectant $B^l \times T^{q+2} \times 0$ et fait sortir à l'autre bout l'isotopie h_1 désirée.

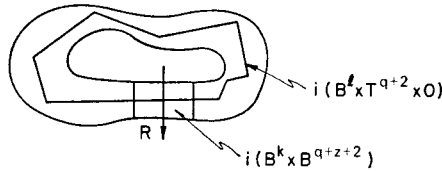


FIGURE 15

Ce complément nous permet de corriger les hypothèses de dimension dans tous les théorèmes du Paragraphe 1 en autorisant pour N une codimension ≤ 2 , mais en excluant les cas $m = 4$ et $p = 2$ ainsi que $w = 4$ et $n = 2$.

Le seul endroit où l'hypothèse $w - n \geq 3$ a été utilisée est dans le lemme de triangulation B.1 pour rendre les plongements $M \cup N \rightarrow W$ (près de C) et $M \cup N_v \rightarrow W_v$ plongements PL en fixant N et N_v . Pour ceci il suffit d'utiliser des microfibrés normaux triviaux à N dans W et à N_v dans W_v respectant M et de les isotoper de façon relative par unicité des microfibrés normaux (ne respectant rien du tout) à des microfibrés PL. ■

On obtient ainsi en particulier:

COMPLEMENT AU THÉORÈME DE SYMÉTRIE E.3. Si $w - n \leq 2$, $w - m \geq 3$ et $(m, p) \neq (4, 2)$ la variété N est stablement transverse à M si et seulement si:

- (1) Les variétés M et N sont localement transverses.
- (2) Il existe près de P deux microfibrés normaux $\eta: W_v \rightarrow M$ et $\mu_v: W_v \rightarrow N_v$ qui commutent en tant que rétractions et vérifient:

$$M \pitchfork N_v \text{ pour } \mu_v \text{ et } N_v \pitchfork M \text{ pour } \eta.$$

De plus, dans ce cas, il existe un microfibré μ normal à N dans W tel

que $M \pitchfork N$ pour μ .

Le lecteur pourra énoncer la forme relative plus précise.

UNIVERSITÉ PARIS XI, CENTRE d'ORSAY, FRANCE

RÉFÉRENCES

- [E-1] R. D. EDWARDS, Topological regular neighborhoods, à paraître.
- [E-2] ———, The equivalence of close PL embeddings, *Gen. Top. and Appl.* **5** (1975), 147-186.
- [EG] R. D. EDWARDS and L. C. GLASER, A method for shrinking decompositions of certain manifolds, *Trans. A.M.S.* **165** (1972), 45-46.
- [Hi] M. HIRSCH, On normal microbundles, *Topology* **5** (1966), 373-385.
- [Hu-1] J. F. P. HUDSON, On transversality, *Proc. Camb. Phil.* **66** (1969), 17-21.
- [Hu-2] ———, Concordance and isotopy of PL embeddings, *Bull. A.M.S.* **72** (1966), 534-536.
- [KS-1] R. C. KIRBY and L. C. SIEBENMANN, *Essays on topological manifolds, smoothing and triangulations*, *Annals of Mathematics Studies*, No. 88.
- [KS-2] ———, Normal bundles in codimension 2, *Geometric Topology*, Park City Utah conference Feb. 1974, Springer Notes No. 438, 1975.
- [LS] W. B. R. LICKORISGH and L. C. SIEBENMANN, Regular neighborhoods, *Trans. A.M.S.* **139** (1969), 207-230.
- [Pe] E. K. PEDERSEN, Topological concordances I and II, March 1974, Aarhus preprint Series 1973-74, No. 17 and 18.
- [RS-1] C. P. ROURKE and B. J. SANDERSON, Decompositions and the relative, tubular neighborhood conjecture, *Topology* **9** (1970), 225-230.
- [RS-2] ———, On topological neighbourhoods, *Compositio Math.* **22** (1970), 387-424.
- [RS-3] ———, Block bundles I, *Ann. of Math.* **87** (1968), 1-28.
- [RS-4] ———, Block bundles II, *Ann. of Math.* **87** (1968), 256-278.
- [S] L. C. SIEBENMANN, A total Whitehead torsion obstruction to fibering over the circle, *Comment. Math. Helv.* **45** (1970), 1-48.
- [W-1] C. T. C. WALL, *Surgery on Compact Manifolds*, Academic Press, 1970.
- [W-2] ———, On PL submanifolds of codimension 2, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **63** (1967), 5-8.

(Received July, 19, 1976)

UNE EXTENSION D'UN THEOREME DE ROHLIN SUR LA SIGNATURE

Lucien GUILLOU et Alexis MARIN

I. - ENONCE DU RESULTAT

On se place dans la catégorie des variétés différentiables compactes.

Si M^n est une variété close orientée de dimension n , une sous-variété V^{n-2} de dimension $n - 2$ sera dite caractéristique si l'élément de $H_{n-2}(M; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ qu'elle représente est duale (par la dualité de Poincaré) à la deuxième classe de Stiefel-Whitney $w_2(M)$. On note $i: V \hookrightarrow M$ l'inclusion de V dans M .

Soit M^4 une variété close orientée de dimension quatre et soit F^2 une surface close (non nécessairement orientable), caractéristique pour M , vérifiant :

$$i_* (H_1(F^2; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})) = \{0\} \subset H_1(M; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

Il existe alors, relativement à la forme d'intersection homologique sur F , une forme quadratique naturelle $q: H_1(F; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ telle que la généralisation suivante de la formule de Rohlin $[R_2]$ ait lieu.

THEOREME. On a la formule : $\sigma(M) - F \cdot F \equiv 2\alpha(M, F) \pmod{16}$,

où $F \cdot F$ désigne l'autointersection de la surface F dans M (cf. [W]), $\sigma(M)$ la signature de la variété orientée M et $\alpha(M, F)$ l'invariant de Brown relatif à la forme quadratique q associée au couple (M, F) (voir [B] et le paragraphe suivant).

Remarque. Si la surface F est orientable, la forme quadratique q est à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et $\alpha(M,F)$ qui vaut alors 0 ou 4 s'identifie au quadruple de l'invariant de Arf de q : On retrouve la formule connue de Rohlin ($[R_2]$). Rappelons que le cas $F = \emptyset$ est très célèbre, il date de 1952 et est du aussi à Rohlin ($[R_1]$).

II. - LES FORMES QUADRATIQUES SUR LES $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ESPACES VECTORIELS ET L'INVARIANT DE BROWN

(cf. [B], [BLLV] appendices)

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de dimension finie n , muni d'une forme bilinéaire $(x,y) \mapsto x \cdot y$ symétrique, non dégénérée à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

DEFINITION 1. Une forme quadratique sur V à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est une application $q : V \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ vérifiant :

$$q(x + y) = q(x) + q(y) + 2 x \cdot y$$

où $2 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ représente l'unique homomorphisme non nul.

Remarques et exemples.

1) On a $q(0) = q(0 + 0) = q(0) + q(0) + 2 \cdot 0 \cdot 0 = q(0) + q(0)$, d'où $q(0) = 0$.

2) Soit $\bar{q} : V \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ une forme quadratique au sens usuel, alors $q = 2\bar{q}$ est une forme quadratique à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

3) Sur $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ il n'y a qu'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée : le produit du corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a

$$0 = q(1 + 1) = q(1) + q(1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 q(1) + 2, \text{ donc } q(1) = \pm 1.$$

Il y a deux formes quadratiques q_+ et q_- sur un espace de dimension un.

DEFINITION 2. Une forme quadratique $q : V \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est neutre s'il existe un sous-espace $H \subset V$ de dimension moitié sur lequel q est nulle (on remarquera que H est égal à son orthogonal pour la forme bilinéaire).

On définit de la manière usuelle la somme orthogonale de deux formes quadratiques ; remarquons que si $V = V_1 \oplus V_2$ est une décomposition orthogonale pour la forme bilinéaire, alors $q = q|_{V_1} \oplus q|_{V_2}$.

En quotientant le semi-groupe des formes quadratiques ainsi obtenu par le semi-groupe des formes neutres, on obtient le groupe de Witt $WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} ; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ des formes quadratiques sur les $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espaces vectoriels à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (cf. [BLLV] Appendices).

Soit $q : V \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ une forme quadratique ; pour tout x dans V , on pose $\psi(x) = \exp\left(\frac{i\pi}{2} q(x)\right) = i^{q(x)}$.

DEFINITION 3. L'invariant multiplicatif de Brown de la forme quadratique q est le nombre complexe :

$$\gamma(q) = 2^{n/2} \sum_{x \in V} \psi(x) \quad (n = \dim V) .$$

PROPOSITION 1. L'application γ établit un isomorphisme entre le groupe de Witt $WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} ; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et le groupe des racines huitièmes de l'unité.

En notations additives, on écrira :

$$\alpha : WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} ; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \text{ où } \gamma = \epsilon \circ \alpha$$

avec $\epsilon : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \{\text{racines huitièmes de l'unité}\}$ et $\epsilon(1) = \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Remarque. Si la forme bilinéaire est isotrope, i.e. vérifie $x \cdot x = 0$ pour tout x de V , la forme quadratique q ne prend que des valeurs paires : $q = 2\bar{q}$ (car $0 = q(2x) = q(x) + q(x)$), \bar{q} est une forme quadratique classique, ψ ne prend que les valeurs $+1$ et -1 et l'invariant de Brown γ de q est le classique invariant

de Arf de \bar{q} qui vaut $+1$ si la forme représente plus souvent 0 que 1 et -1 dans le cas contraire.

Démonstration de la proposition.

AFFIRMATION 1. $\gamma(q_1 \oplus q_2) = \gamma(q_1) \oplus \gamma(q_2)$.

$$\begin{aligned} \text{Démonstration. } \gamma(q_1 \oplus q_2) &= 2^{-\frac{n_1+n_2}{2}} \sum_{x+y \in V_1 \oplus V_2} \psi(x+y) = 2^{-\frac{n_1}{2}} 2^{-\frac{n_2}{2}} \sum_{x \in V_1} \psi(x) \psi(y) \\ &= \left[2^{-\frac{n_1}{2}} \sum_{x \in V_1} \psi(x) \right] \times \left[2^{-\frac{n_2}{2}} \sum_{y \in V_2} \psi(y) \right] = \gamma(q_1) \gamma(q_2) \end{aligned}$$

□

AFFIRMATION 2. Si la forme quadratique q est neutre, $\gamma(q) = 0$.

Démonstration. Soit $H \subset V$ de dimension moitié tel que $q(H) = 0$; soit $V = H \oplus L$ une décomposition en somme directe.

$$\begin{aligned} \gamma(q) &= 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{h+\ell \in V} \psi(h+\ell) = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{h+\ell \in V} \psi(h) \psi(\ell) (-1)^{\ell \cdot h} = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{\ell \in L} \sum_{h \in H} (-1)^{\ell \cdot h} \psi(\ell) \\ &= 2^{-\frac{n}{2}} \left[\sum_{\ell \in L-0} \sum_{h \in H} (-1)^{\ell \cdot h} \psi(\ell) + \# H \right] = 2^{-\frac{n}{2}} \times \# H = 1 \end{aligned}$$

car, pour $\ell \neq 0$, $\ell \cdot h$ prend autant de fois les valeurs 0 et 1 . □

AFFIRMATION 3. Si la forme bilinéaire n n'est pas isotrope, V est somme orthogonale d'espaces de dimension un.

Démonstration. Soit $c \in V$ le vecteur caractéristique (tel que, pour tout x dans V , $c \cdot x = x \cdot x$) ; si $\dim V \geq 2$, il existe y distinct de c tel que $y \cdot y = 1$; V se décompose en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} y \oplus y^\perp$ et puisque y est distinct de c , la forme bilinéaire restreinte à l'orthogonal y^\perp de y est non isotrope ; on termine par induction sur $\dim V$. □

AFFIRMATION 4. Soit q une forme quadratique à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Alors $4q$ est isométrique à $-4q$ (et donc $8q$ est neutre).

Démonstration. Soit $W = V \oplus V \oplus V \oplus V$. Soit $\varphi_i : V \rightarrow W$, $i = 1, 2, 3, 4$.
 $\varphi_1(x) = (0, x, x, x)$; $\varphi_2(x) = (x, 0, x, x)$; $\varphi_3(x) = (x, x, 0, x)$; $\varphi_4(x) = (x, x, x, 0)$.
 On a $q(\varphi_1(x)) = 3q(x) = -q(x)$ et $\varphi_1(V)$ est orthogonal à $\varphi_j(V)$ pour $i \neq j$ l'isomorphisme cherché est $\bigoplus_{i=1}^4 \varphi_i$. \square

Considérant $q \oplus q_+ \oplus q_-$, l'affirmation 3 et l'exemple 3 nous assurent que $WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ est cyclique, d'ordre un diviseur de huit par l'affirmation 4. Les affirmations 1 et 2 assurent que γ est un homomorphisme, dans les racines huitièmes de l'unité; on conclut en vérifiant que $\gamma(q_+) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \exp(i\pi/4)$ est primitive. \square

Remarque. Le lecteur pourra établir que l'invariant de Brown, d'une forme quadratique q , le rang et l'isotropie ou l'anisotropie de la forme bilinéaire déterminent la classe d'isométrie de la forme quadratique q .

III. - DEFINITION GEOMETRIQUE DE LA FORME QUADRATIQUE :

$$q : H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

On est dans la situation du paragraphe I.

DEFINITION 4. Une membrane m^2 pour la surface caractéristique F est une surface (non nécessairement orientable), immergée dans M , plongée et normale à F près de son bord $\partial m^2 \subset F$ et dont l'intérieur soit transverse à F .

Le bord d'une membrane m consiste en des courbes simples fermées de F ; notons Θ le nombre d'obstruction à étendre le fibré normal à ces courbes dans F

en un sous-fibré de rang un du fibré normal à m dans M ; c'est l'entier obtenu en évaluant sur la classe fondamentale de m ladite obstruction qui habite $H^2(m, \partial m ; \pi_1(\mathbb{R}P^1)^t)$ les coefficients étant tordus par l'orientation normale de m .

On pose alors :

$$q'(m) = \Theta + 2 m \cdot F \pmod{4}$$

où $m \cdot F$ désigne le nombre de points d'intersection transverse de l'intérieur de m avec F .

Remarque. Si les composantes du bord de m ont pour voisinage dans F des anneaux, alors $\Theta = 2 \Theta_v$ où Θ_v est le nombre d'obstruction à étendre un champ de vecteurs normaux au bord de la membrane m dans F en un champ normal à toute la membrane dans M (le facteur 2 vient de ce que $S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ est une application de degré 2) .

En particulier, si la surface caractéristique F est orientable, on a toujours : $q'(m) = 2 \Theta_v + 2 m \cdot F = 2(\Theta_v + m \cdot F) \pmod{4}$ qui habite $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$; on retrouve la définition de Rohlin ($[R_2]$) .

Des deux lemmes qui suivent, nous apprenons, par le premier appliqué à $(M \times I, F \times I)$, que $q'(m)$ ne dépend que de la classe d'homologie modulo 2 du bord de m dans F , ce qui permet de définir une fonction $q : H_1(F ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (puisque $i_{*}(H_1(F ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = 0$) ; et par le second, que cette fonction est une forme quadratique associée à la forme bilinéaire d'intersection de la surface.

LEMME 1. Supposons que (M^4, F^2) soit bord de (V^5, G^3) , avec V^5 variété compacte orientée de dimension cinq et G^3 sous-variété caractéristique (non nécessairement orientable). Soit $\Delta^2 \subset G^3$ une surface (non nécessairement orientable) telle que $\Delta \cap F = \partial \Delta$ et soit m une membrane pour F (dans M) de bord $\partial m = \partial \Delta$.

Alors $q'(\mathfrak{m}) = 0$.

LEMME 2. L'application $q : H_1(F ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est quadratique pour la forme bilinéaire d'intersection de la surface F :

$$q(\alpha + \beta) = q(\alpha) + q(\beta) + 2\alpha \cdot \beta .$$

Démonstration du lemme 1.

Par diverses opérations de sommes connexes plongées, on se ramène au cas où M , F et $\partial\Delta$ sont connexes.

Le voisinage du bord de Δ dans F est alors un anneau $(*)$ et si Θ_{ν} désigne le nombre d'obstruction à étendre un champ de vecteur normal à \mathfrak{m} dans M , il suffira d'établir $\Theta_{\nu} + \mathfrak{m} \cdot F \equiv 0 \pmod{2}$.

Désignons par ν et μ les fibrés normaux à G^3 dans V^5 et à Δ^2 dans G^3 . Un voisinage tubulaire de Δ^2 dans (V^5, G^3) est $(W, U) = (E(\nu|_{\Delta^2} \oplus \mu), E(\mu))$. Soit N^4 le bord de la variété $V - \overset{\circ}{W}$, alors $H = F - \overset{\circ}{W} \cup \partial U = N \cap G$ est une surface caractéristique pour N .

Soient s, s' et t des sections de $\nu|_{\Delta^2}$ et μ en position générale, où $s|_{\partial\Delta^2}$ est un collier de $\partial\mathfrak{m}$ dans \mathfrak{m} ; elles nous permettent de pousser Δ^2 dans ∂W et de former le 2 cycle :

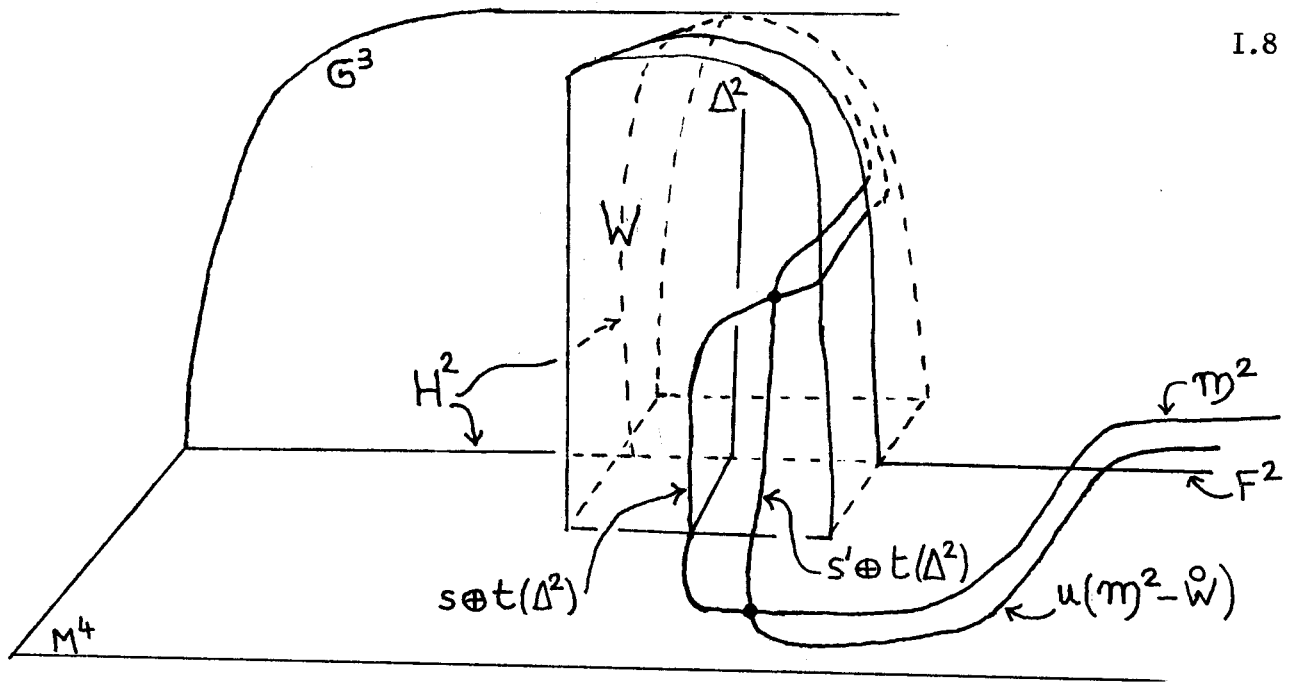
$$\Sigma^2 = (\mathfrak{m} - \overset{\circ}{W}) \cup s \oplus t(\Delta^2) \subset N^4 .$$

Appliquons-lui la formule de Wu : $\Sigma^2 \cdot \Sigma^2 + \Sigma^2 \cdot H = 0$.

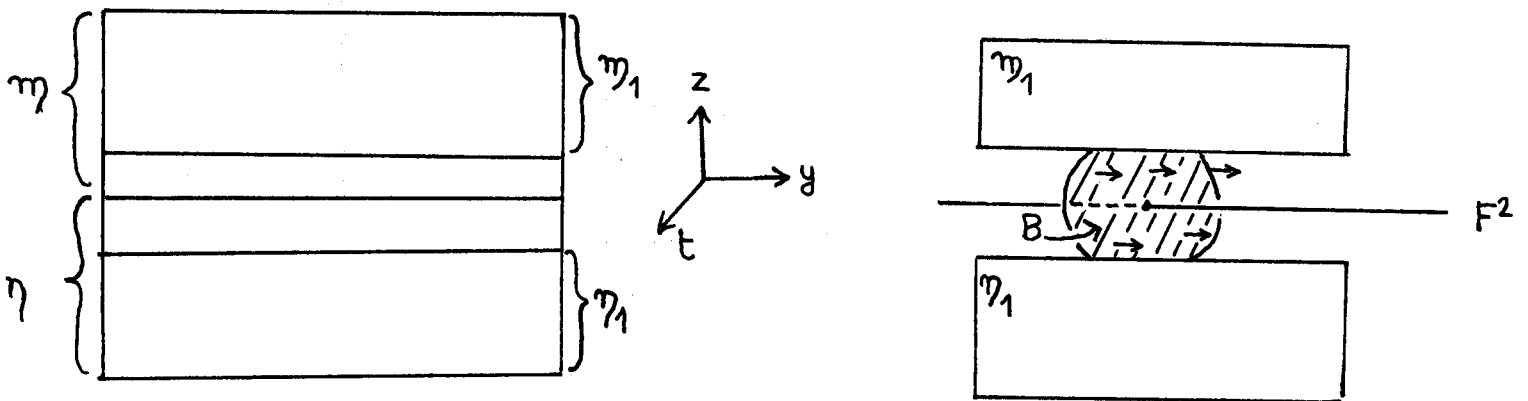
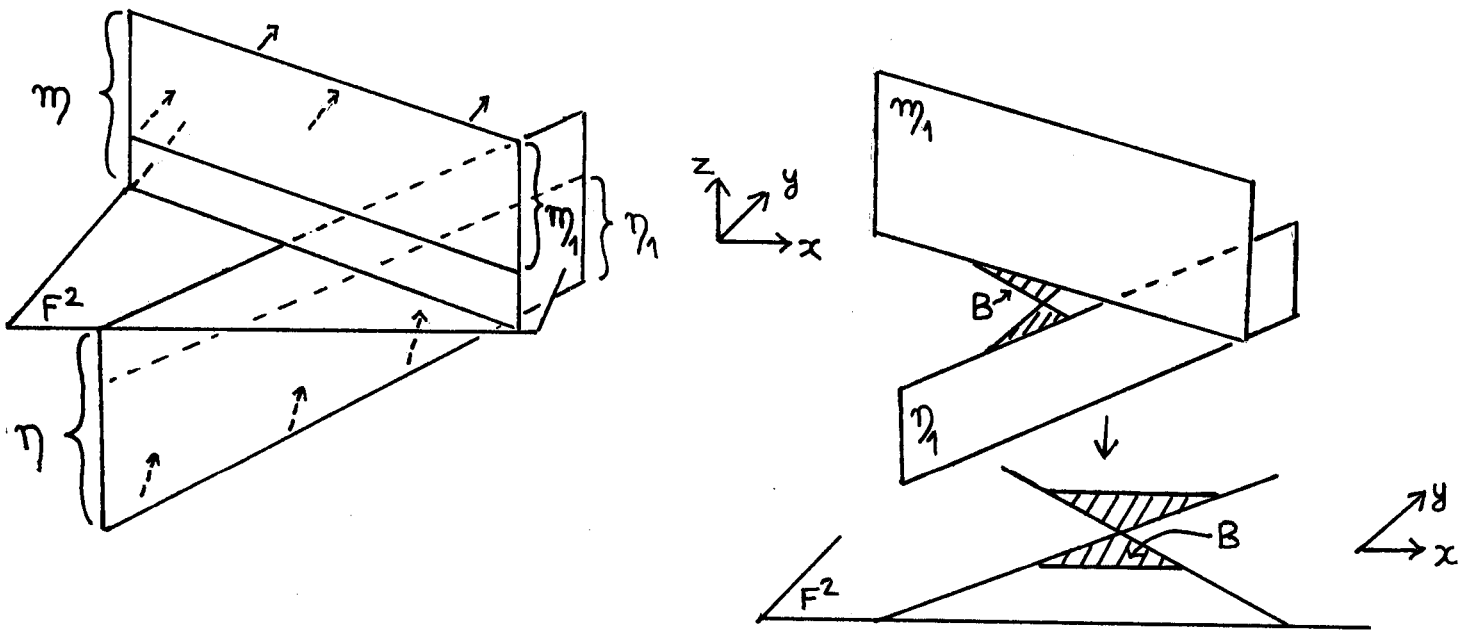
Soit u une section du fibré normal à \mathfrak{m} coïncidant avec s' sur $\partial\mathfrak{m}$.

$$\begin{aligned} \Sigma \cdot \Sigma &= (\mathfrak{m} - \overset{\circ}{W} \cup s \oplus t(\Delta^2)) \cdot (u(\mathfrak{m} - \overset{\circ}{W}) \cup s' \oplus t(\Delta^2)) = \mathfrak{m} \cdot u(\mathfrak{m}) + s(\Delta^2) \cdot s'(\Delta^2) \\ &= \Theta + s(\Delta^2) \cdot s'(\Delta^2) \quad \text{car modulo 2 l'autointersection d'un cycle immergé} \\ &\quad \text{est égale à la classe d'Euler de son fibré normal.} \end{aligned}$$

(*) car l'auto intersection $\partial\Delta$ dans F est bord de l'autointersection de Δ dans G , donc nulle.



LEMME 1



LEMME 2

$$\Sigma \cdot H = (\mathfrak{m} - \overset{\circ}{W}) \cup s \oplus t(\Delta^2) \cdot (F - \overset{\circ}{W} \cup \partial U) = \mathfrak{m} \cdot F + s(\Delta^2) \cdot \Delta^2$$

mais $s(\Delta^2) \cdot \Delta^2 = s(\Delta^2) \cdot s'(\Delta^2)$, d'où en additionnant :

$$0 = \Sigma \cdot \Sigma + \Sigma \cdot H = \mathcal{O}_v + \mathfrak{m} \cdot F \quad \square$$

Démonstration du lemme 2.

Soient \mathfrak{m} et \mathfrak{n} des membranes pour α et β . Il s'agit de construire une membrane pour $\alpha + \beta$. Si les bords de \mathfrak{m} et de \mathfrak{n} sont disjoints, on a $\alpha \cdot \beta = 0$ et $\mathfrak{P} = \mathfrak{m} \cup \mathfrak{n}$ est une membrane pour $\alpha + \beta$ pour laquelle $q'(\mathfrak{P}) = q'(\mathfrak{m}) + q'(\mathfrak{n})$.

Si les bords de \mathfrak{m} et de \mathfrak{n} ne sont pas disjoints, nous pouvons supposer qu'ils sont en position générale. Près de chaque point x_0 de $\partial \mathfrak{m} \cap \partial \mathfrak{n}$, soient (x, y, z, t) des coordonnées telles que :

- 1) x et y sont des coordonnées de F près de x_0 ;
- 2) \mathfrak{m} est d'équation $x + y = t = 0 \quad z \geq 0$;
 \mathfrak{n} est d'équation $x - y = t = 0 \quad z \leq 0$.

Soient \mathfrak{m}_1 et \mathfrak{n}_1 les membranes \mathfrak{m} et \mathfrak{n} privées du voisinage tubulaire de F de rayon 1. Soit B la bande paramétrée par :

$$(u, v) \mapsto (vu, -u, v, u(1-v^2)) \quad , \quad (u, v) \in [-1, 1]^2 \quad .$$

Posons $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{m}_1 \cup \mathfrak{n}_1 \cup B$; la membrane \mathfrak{P} est obtenue en prolongeant, jusqu'à F , la surface \mathfrak{P}_1 le long de rayons du fibré normal à F . Notons que le champ de vecteur $(0, 1, 0, 0)$ est normal à \mathfrak{m} , \mathfrak{n} et \mathfrak{P} et que :

$$\mathfrak{P} \cdot F = \mathfrak{m} \cdot F + \mathfrak{n} \cdot F + \#(\partial \mathfrak{m} \cap \partial \mathfrak{n})$$

et donc $q'(\mathfrak{P}) = q'(\mathfrak{m}) + q'(\mathfrak{n}) + 2 \alpha \cdot \beta \quad \square$

IV. - PREUVE DU THEOREME

On considère ici des couples (M^4, F^2) où M est une variété close orientée de dimension quatre et F est une surface caractéristique.

DEFINITION 5. Deux couples (M, F) et (M', F') sont cobordants s'il existe un couple (V^5, G^3) tel que $\partial V^5 = M \cup -M'$; $\partial G^3 = F \cup F'$ où V^5 est une variété compacte orientée de dimension cinq et G^3 une sous-variété caractéristique. Le groupe de cobordisme ainsi obtenu est le groupe de cobordisme caractéristique noté Ω_C^4 .

Par des chirurgies d'indice un sur des cercles disjoints de la surface caractéristique F , tout couple (M, F) est cobordant à un couple (M', F) avec $i_* (H_1(F; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})) = \{0\} \subset H_1(M'; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Si $(M, F) = \partial(V, G)$, la moitié de l'homologie de F est représentée par des bords de surfaces dans G . Du lemme 1, on tire donc le corollaire suivant.

COROLLAIRE. Pour tout (M, F) , on peut définir $\alpha(M, F)$ qui ne dépend que de la classe de cobordisme caractéristique de (M, F) et fournit un homomorphisme $\alpha : \Omega_C^4 \rightarrow \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$.

Remarque. La signature σ et l'autointersection de la surface caractéristique $F \cdot F$ définissent deux homomorphismes de Ω_C^4 dans \mathbf{Z} . Pour établir que les deux homomorphismes $\sigma - F \cdot F$ et 2α de Ω_C^4 dans $\mathbf{Z}/16\mathbf{Z}$ sont égaux, il suffit de l'établir sur des générateurs de Ω_C^4 .

LES EXEMPLES FONDAMENTAUX

EXEMPLE A. La droite \mathbf{CP}^1 est caractéristique dans le plan projectif complexe \mathbf{CP}^2 ; les invariants sont $\sigma(\mathbf{CP}^2) = 1$, $\mathbf{CP}^1 \cdot \mathbf{CP}^1 = 1$, $\alpha(\mathbf{CP}^2, \mathbf{CP}^1) = 0$.

EXEMPLE B. Soit $c : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ la conjugaison complexe, $\mathbb{C}P^2/c$ est une sphère d'homotopie Σ^4 (elle est simplement connexe car une droite complexe coupe $\mathbb{R}P^2$ transversalement en un point et sa caractéristique d'Euler est

$$\frac{1}{2}(\chi(\mathbb{C}P^2) + \chi(\mathbb{R}P^2)) = \frac{1}{2}(3 + 1) = 2). (*)$$

Le plan projectif réel $\mathbb{R}P^2 \subset \frac{\mathbb{C}P^2}{c}$ est caractéristique (puisque $H_2(\Sigma^4) = 0$).

On a $\sigma(\frac{\mathbb{C}P^2}{c}) = 0$, $\frac{\mathbb{R}P^2}{\mathbb{C}P^2/c} \cdot \mathbb{R}P^2 = 2(\frac{\mathbb{R}P^2}{\mathbb{C}P^2} \cdot \mathbb{R}P^2) = 2(-\chi(\mathbb{R}P^2)) = -2$ et

$\alpha(\mathbb{C}P^2/c, \mathbb{R}P^2) = 1$ car $q(\mathbb{R}P^1) = 1$ ce qui se voit en prenant pour membrane une moitié de $\mathbb{C}P^1$, elle ne recoupe pas $\mathbb{R}P^2$. L'obstruction vaut $+1$: considérez

une conique réelle proche d'une conique dégénérant en deux droites réelles proches de $\mathbb{R}P^1$; une moitié de cette conique borde le bord du tube normal à $\mathbb{R}P^1$ dans $\mathbb{R}P^2$

et, tout en restant dans un voisinage de la membrane, la coupe en un point avec signe $+1$ (**)

□

AFFIRMATION 5. Les exemples A et B forment une base de Ω_c^4 .

Démonstration. Qu'ils soient indépendants se voit en considérant les homomorphismes signature et autointersection. L'exemple A permet de se ramener au cas de signature nulle ; l'exemple B permet de se ramener au cas de signature et autointersection nulle (l'autointersection de la surface caractéristique est congrue modulo deux au rang et donc à la signature de M , car $W(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ le groupe de Witt des formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). L'affirmation découle alors de la proposition suivante.

PROPOSITION 2. Soit (M^4, F^2) un couple comme au paragraphe 1 tel que

$\sigma(M) = F \cdot F = 0$. Alors, (M, F) est nul dans Ω_c^4 .

(*) En fait, Σ^4 est difféomorphe à la sphère S^4 : cela peut se voir en considérant une décomposition en anses de $\mathbb{C}P^2$, invariante par la conjugaison complexe, et ayant une seule anse d'indice deux dont l'âme est la moitié de la complexifiée d'une droite réelle.

(**) puisque ce sont des courbes complexes.

Démonstration. Puisque la signature réalise un isomorphisme du groupe de cobordisme Ω^4 sur \mathbb{Z} , M est bord d'une variété orientée de dimension cinq V^5 .

Soit t une trivialisation au-dessus du squelette de $M^4 - F^2$ du fibré tangent à M dont l'obstruction soit F . Il y a alors dans V un trois cycle \bar{G} de bord F et une trivialisation E au-dessus du squelette de $V - \bar{G}$ qui étende t et dont l'obstruction soit \bar{G} .

LEMME 3. Soit V une variété à bord de dimension cinq ; soit \bar{G} dans V un trois cycle relatif dont le bord soit une surface d'autointersection nulle du bord de V .

Alors \bar{G} est cohomologue modulo le bord à une sous-variété G de V .

Démonstration. Supposons \bar{G} triangulé et que \bar{G} soit une variété près de l'intérieur des i simplexes pour $i > i_0$, c'est certainement vrai pour $i_0 = 2$. Soit $\sigma = \sigma^{i_0}$ un simplexe de \bar{G} de dimension i_0 , le link $L_\sigma^{2-i_0}$ de σ dans \bar{G} est une sous-variété de codimension deux du link de σ dans V^5 qui est une sphère $S_\sigma^{4-i_0}$. Le link $L_\sigma^{2-i_0}$ borde une variété M_σ dans S_σ : pour $i_0 = 2$ parce que \bar{G} est un cycle, sinon le fibré normal E à L_σ dans S_σ a une section non nulle s (trivial si $i_0 = 1$ et si $i_0 = 0$, en ayant bien sûr pris soin de connecter par un arbre tous les sommets de \bar{G} , parce que $F.F = 0$). La sous-variété $s(L_\sigma)$ de ∂E représente un élément de $H^1(\partial E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; considérant la suite exacte de Mayer Vietoris $H^1(E; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus H^1(S - \overset{\circ}{E}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\partial E; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, on voit que, quitte à modifier $s(L)$ par un élément de $H^1(E; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on peut supposer que $s(L)$ provient de $x \in H^1(S - \overset{\circ}{E}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Représentons x par une application $S - \overset{\circ}{E} \rightarrow \mathbb{R}P^4$, transverse à $\mathbb{R}P^3$ et coïncidant sur le bord avec la construction de Thom du fibré normal à $s(L)$ dans ∂E . On obtient ainsi une sous-variété M_σ de S_σ de bord L_σ . Pour éliminer la singularité de σ_0 , il suffit de remplacer l'étoile de σ dans \bar{G} par le joint de M_σ et de $\overset{\circ}{\sigma}$ le bord de σ .

Il nous reste cependant à montrer comment changer la classe d'homologie de $s(L)$ par un élément y de $H^1(E; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. La classe y est représentée par une sous-variété Y de codimension un de L_σ , la restriction à un voisinage de Y du fibré normal à L_σ dans S_σ est isomorphe à $\epsilon \oplus \nu(Y, L_\sigma)$ et on peut supposer que s est la section constante $+1$ du fibré trivial ϵ ; il suffit alors de prendre s' la section qui est égale à s hors de $E\nu(Y, L_\sigma)$, à -1 au-dessus de Y et telle que $p_2 \circ s' : \nu(Y, L_\sigma) \rightarrow \nu(Y, L_\sigma)$ soit l'identité. \square

REFERENCES

- [BLLV] J. BARGE, J. LANNES, F. LATOUR et P. VOGEL, Λ -sphères, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 7, fasc. 4 (1974), 463-506.
- [B] E.H. BROWN Jr., Generalizations of the Kervaire invariant, Ann. of Math. 95 (1972), 368-384.
- [R₁] V.A. ROHLIN, Soviet Math. Doklady, 84 (1952), 221-224 (en russe).
- [R₂] V.A. ROHLIN, Proof of Gudkov's conjecture, Funkt. Analiz. i ego Pril. 6, (1971), 62-64 (en russe); traduction anglaise, Funct. Anal. and its appl., 6 (1972), 136-138.
- [W] H. WHITNEY, On the topology of differentiable manifolds, in Lectures on Topology, Univ. of Michigan Press, (1941), 101-141.

Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Bât. 425
91405 ORSAY cedex - France



QUELQUES REMARQUES

SUR LES COURBES ALGÈBRIQUES PLANES REELLES

Alexis MARIN

I. - INTRODUCTION

Harnack nous a appris qu'une courbe algébrique plane réelle de degré m n'a pas plus de $M = \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ composantes, des courbes ayant ce nombre maximal de composantes existent en tous degrés et sont nommées M courbes. Les composantes d'une courbe séparent le plan, et sont nommées ovales, sauf dans le cas m impair où une seule composante ne sépare pas, on la nomme pseudo-droite. On note p le nombre d'ovales pairs (i.e. inclus dans un nombre pair d'ovales) et n le nombre d'ovales impairs (les autres).

Après avoir résolu directement, dans le cas des courbes de degré six, le 16^e problème de Hilbert sur la topologie des M -courbes, Gudkov formule la conjecture $p - n \equiv k^2 \pmod{8}$ pour une M -courbe de degré pair $2k$.

En 1971, Rohlin ($[R_1]$) publie une preuve de cette conjecture s'appuyant sur une formule reliant la signature d'une variété de dimension quatre, l'auto-intersection d'une surface caractéristique orientable et l'invariant de Arf d'une forme quadratique définie sur l'homologie de cette surface. Plus tard, il donne une nouvelle preuve s'appuyant sur le théorème d'Atiyah-Singer et valable en toutes dimensions

([R₂]), Gudkov et Krakhnov s'inspireront de cette méthode pour donner en toutes dimensions la généralisation d'une nouvelle congruence pour les (M-1)-courbes :
 $p - n \equiv k^2 \pm 1 \text{ modulo } 8$ ([GK]).

Dans cet article, utilisant une généralisation de la formule de Rohlin au cas où la surface caractéristique n'est plus orientable ([GM]), nous donnons une preuve unifiée de ces deux congruences ; l'utilisation de surfaces caractéristiques non orientables semble nécessaire : nous présenterons des contre-exemples à la première preuve de Rohlin au § IV. L'exposition de ces contre-exemples nécessitera une étude de l'orientation des courbes séparant leurs complexifiées. Nous la ferons au § III, paragraphe essentiellement botanique, où nous donnerons aussi toutes les configurations possibles en degré cinq et six : dès le degré cinq, il y a des configurations qui peuvent être séparantes ou non, dès le degré sept, il y a des configurations séparantes qui ont des orientations distinctes. Nous terminerons ce paragraphe en remarquant que la méthode de Hilbert permet de construire deux M-courbes de degré sept ayant même configuration orientée, mais qui sont dans des composantes distinctes du complémentaire du discriminant. Enfin nous remarquerons au § V que la méthode exposée par Arnold ([A]) pour établir les inégalités de Petrovski pour les courbes de degré pair fonctionne aussi pour les courbes à singularités de degré pair et donne en particulier l'inégalité de Petrovski pour les courbes de degré impair.

II. - PREUVE DES CONGRUENCES

Soit C une courbe algébrique plane réelle de degré pair $2k$, ayant $N \leq M$ ovales. On choisit une équation F de C qui est négative sur la composante non orientable de $\mathbb{R}P^2 - C$. On note $\mathbb{R}P^+ = \{x \in \mathbb{R}P^2 \mid F(x) \geq 0\}$.

Soit c la conjugaison complexe du plan projectif complexe \mathbf{CP}^2 , le quotient \mathbf{CP}^2/c est difféomorphe à la sphère S^4 (considérer une décomposition en anses de \mathbf{CP}^2 ayant une seule anse d'indice 2 dont l'âme est formée d'une droite réelle). Soit $D \subset S^4$ l'image de $C_{\mathbf{C}}$ la complexifiée de la courbe C , c'est une surface connexe de caractéristique d'Euler $\chi(C_{\mathbf{C}})/2 = 2 - M$ (rappelons que $M = g + 1$) et ayant un bord à N composantes ; elle est orientable si et seulement si la courbe C sépare sa complexifiée $C_{\mathbf{C}}$.

Considérons dans la sphère S^4 la surface $F = D \cup \mathbb{R}P^+$; elle est caractéristique puisque $H_2(S^4) = 0$ et est en général non orientable (même si D l'est !); on a :

$$\sigma(S^4) = 0$$

$$F \cdot F = \frac{1}{2} C_{\mathbf{C}} \cdot C_{\mathbf{C}} + 2(-\chi(\mathbb{R}P^+))^{(+)} = 2(k^2 - (p-n)) .$$

Soit $q : H_1(F ; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ la forme de Rohlin de la surface F ([GM]), les composantes de C engendrent un sous-espace L de $H_1(F ; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

PROPOSITION 1. La forme de Rohlin q est nulle sur L .

Démonstration. Il suffit de remarquer que L est engendré par les bords des composantes orientables de $\mathbb{R}P^- (= \{x \in \mathbb{R}P^2 \mid F(x) \leq 0\})$. Ces composantes B_i sont des membranes (cf. [GM]) qui ne recoupent pas F et dont les bords ∂B_i ont des voisinages orientables dans F ; la valeur $q(B_i)$ est donc le double de l'obstruction à étendre à B_i une section du fibré normal à ∂B_i dans F , soit $2(-2\chi(B_i))$ qui est congrue à zéro modulo quatre. \square

(+) Soit v un champ de vecteur tangent à $\mathbb{R}P^+$ et transverse à $\partial \mathbb{R}P^+$, soit n un champ normal à F étendant $i v$; les sommes des indices des zéros de n sur D et $\mathbb{R}P^+$ sont $1/2 C_{\mathbf{C}} \cdot C_{\mathbf{C}}$ et $2(-\chi(\mathbb{R}P^+))$ respectivement.

COROLLAIRE.

- 1) Si C est une M -courbe, $p - n - k^2 \equiv 0 \pmod{8}$ (Rohlin $[R_1][R_2]$) ;
- 2) Si C est une $M-1$ courbe, $p - n - k^2 \equiv \pm 1 \pmod{8}$ (Gudkov et Krakhnov $[GK]$);
- 3) Si C est une $M-2$ courbe qui ne sépare pas sa complexifiée,
 $p - n - k^2 \equiv 0, \pm 2 \pmod{8}$;
- 4) Si C est une courbe qui sépare sa complexifiée, $p - n - k^2 \equiv 0 \pmod{4}$
 (Arnold $[A]$) .

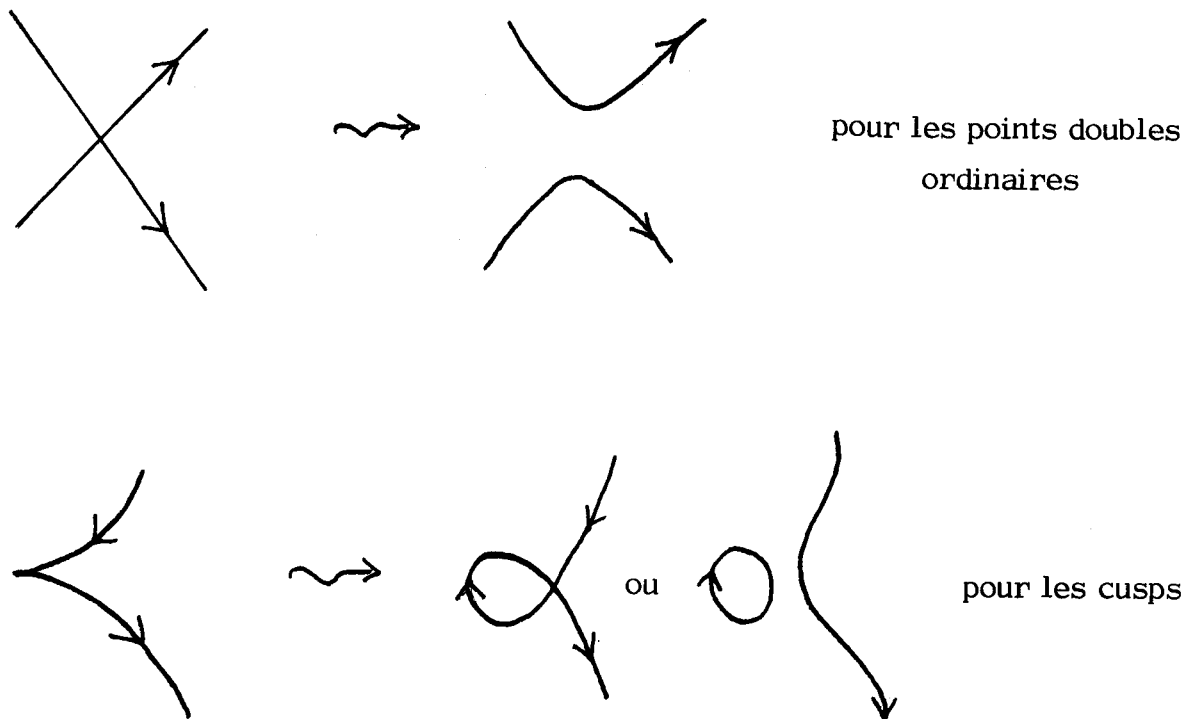
Démonstration. D'après la formule de Rohlin ($[GM]$) , $p - n - k^2$ modulo 8 est l'invariant de Brown de la forme q . Si C est une $M-i$ courbe, l'orthogonal d'un facteur hyperbolique contenant L dans $H_1(F ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est de rang i et représenté par des classes d'homologie de D ; la conclusion résulte alors de la classification des formes quadratiques sur les $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espaces vectoriels ($[GM]$) . \square

III. - ORIENTATION DES COURBES SEPARANT LEUR COMPLEXIFIEE

PROPOSITION 2. Soit C une courbe algébrique plane réelle de degré d dont les seules singularités réelles sont des points doubles ordinaires et des cusps. Soit \tilde{C} une courbe réelle de degré d proche de C . Pour que \tilde{C} sépare sa complexifiée $\tilde{C}_{\mathbb{C}}$, il faut et il suffit que :

- i) C sépare sa complexifiée $C_{\mathbb{C}}$;
- ii) On puisse choisir une moitié de $C_{\mathbb{C}}$ ⁽⁺⁾ de façon à ce que si on oriente C comme bord de cette moitié, les singularités de C qui disparaissent le fassent suivant les modèles :

(+) Une moitié de $C_{\mathbb{C}}$ est $D \subset C_{\mathbb{C}}$ tel que $D \cap c(D) = \partial D = C$, $D \cup c(D) = C_{\mathbb{C}}$ où c est la conjugaison complexe. Si C est réductible, il peut y avoir plusieurs moitiés (voir plus loin).



De plus, l'orientation ainsi obtenue pour \tilde{C} est bord de l'orientation d'une moitié de $\tilde{C}_{\mathbb{C}}$.

La démonstration résulte de l'observation de la courbe près du plan projectif réel.

RAPPELS (voir Rohlin [R₃] et Mishachev [M]).

Soit C une courbe de degré d séparant sa complexifiée ; on oriente la courbe C comme bord d'une de ses moitiés. Une paire d'ovales emboîtés est dite positive si son orientation est bord d'une orientation de l'anneau qu'elle délimite, négative dans le cas contraire ; un ovale est désorienté s'il est impair et forme une paire négative avec le premier ovale dans lequel il est inclus. On note d le nombre d'ovales désorientés, D^+ (respectivement D^-) le nombre de paires positives (respectivement négatives) dont l'ovale extérieur est désorienté. Si le degré d est impair, on peut assigner un signe à chaque ovale : l'homologie du plan privée de l'intérieur de l'ovale est libre, de rang un, engendrée par la pseudo-droite ; l'ovale vaut

± 2 fois ce générateur, il est dit positif s'il vaut -2 fois le générateur, négatif sinon. On note p^- le nombre d'ovales pairs négatifs et n^+ le nombre d'ovales impairs positifs.

Bien qu'ils ne les énoncent que pour les M -courbes, Rohlin et Mishachev prouvent $([R_3], [M])$:

Soit C une courbe de degré d séparant sa complexifiée :

$$\text{si } d = 2k \text{ est pair, } k^2 - (p^- - n^+) = 4(d + D^- - D^+) ;$$

$$\text{si } d = 2k + 1 \text{ est impair, } \frac{k(k+1)}{2} - (p^- - n^+) = 2(d + D^- - D^+) .$$

Remarquons que jusqu'au degré 6, ces relations fixent l'orientation d'une disposition donnée. Les dispositions possibles sont déterminées par les conditions d'intersection avec une droite plus le fait que le nombre de composantes d'une courbe séparante est congru au nombre maximal M modulo deux. Dans les tableaux suivants, nous construisons toutes les possibilités non maximales en degré cinq et six.

L'orientabilité et les orientations sont déterminées par la proposition 2.

Dans le tableau concernant le degré 6, les constructions sont indiquées de manière beaucoup plus schématique. Pour plus de détails sur la construction des courbes par les méthodes de Hilbert, de Harnack et de Gudkov, le lecteur pourra consulter l'article d'A'Campo $[A']$.

Degré 5

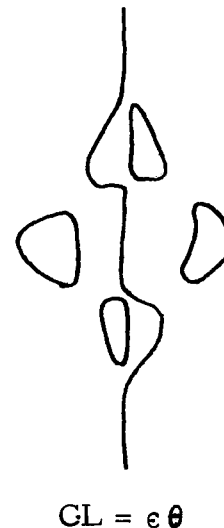
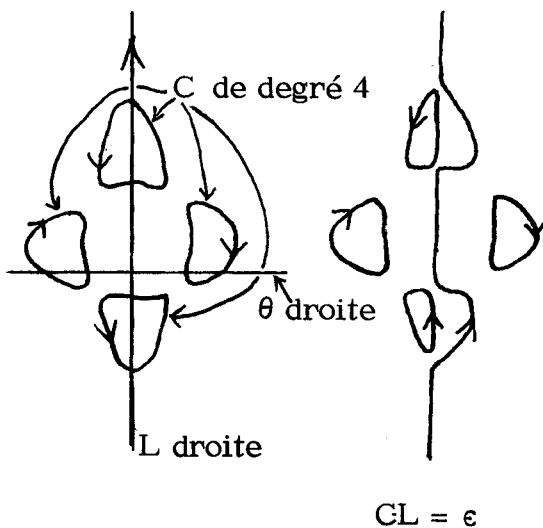
$p^- n^+ d D^+ D^-$

Notation

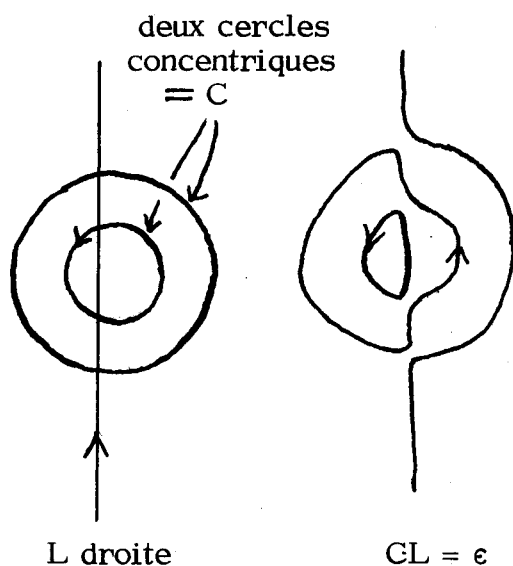
Construction d'une courbe séparante

Construction d'une courbe non séparante ayant \hat{m} configuration

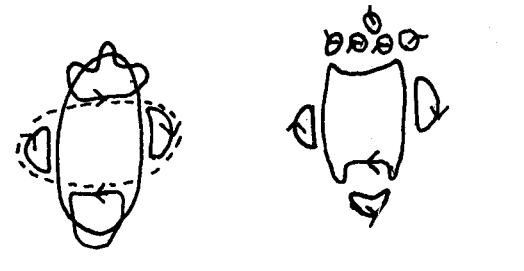
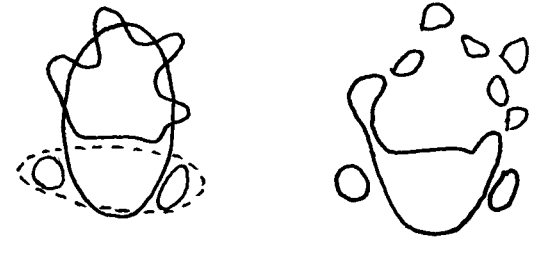
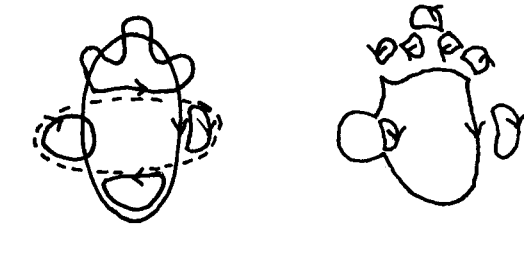

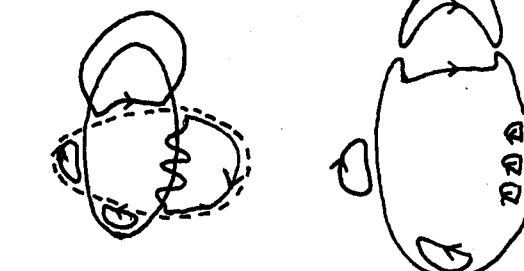
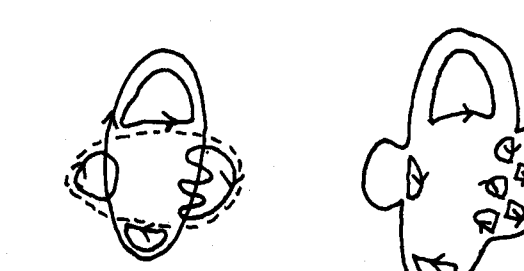
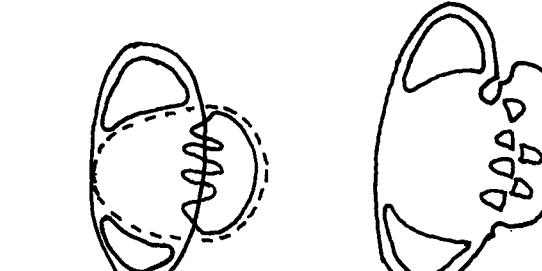
3 0 0 0 0 $I 3^- 1^+$



1 0 1 0 0 $I \frac{1^-}{1^-}$



N'existe pas : prendre une droite D qui a un point à l'intérieur du plus petit ovale, transformer $C \cup D$ en une courbe de degré 6 formée de trois ovales emboîtés qui sépare (voir p. 10) .

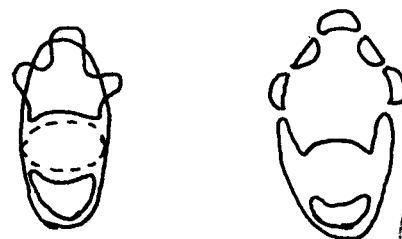
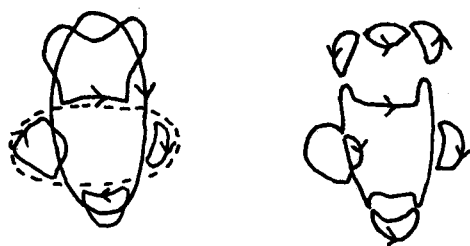
p n d D ⁺ D ⁻ Notation	Construction d'une courbe séparante	Construction d'une courbe non séparante ayant même configuration
9 0 0 0 0 9		
7 2 1 0 0 6 $\frac{1,1^-}{1}$		<p>N'existe pas car c'est une M-2 courbe pour laquelle $p - n - k^2 \equiv 4 \pmod{8}$ (3e partie du corollaire du § 2)</p>
5 4 2 0 0 4 $\frac{2,2^-}{1}$		<p>Faire dégénérer une courbe $1 \frac{5}{1}$ de Gudkov</p>
3 6 3 0 0 2 $\frac{3,3^-}{1}$		<p>N'existe pas car c'est une M-2 courbe pour laquelle $p - n - k \equiv 4 \pmod{8}$ (3e partie du corollaire du § 2)</p>
1 8 4 0 0 1 $\frac{4,4^-}{1}$		

p n d D⁺ D⁻ Notation

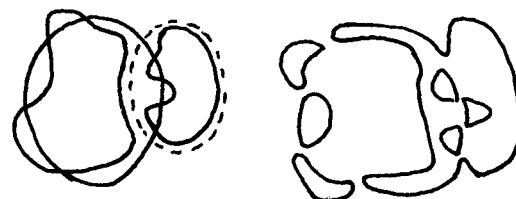
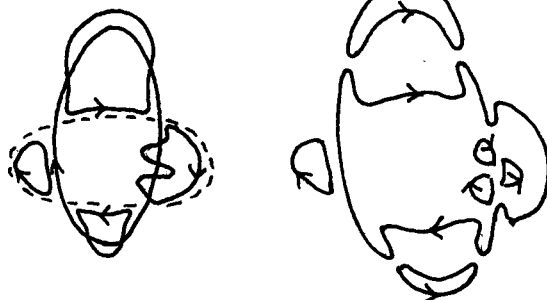
Construction d'une courbe séparante

Construction d'une courbe non séparante ayant même configuration

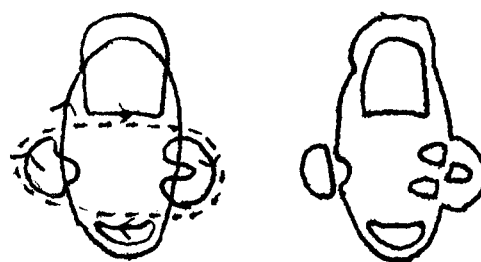
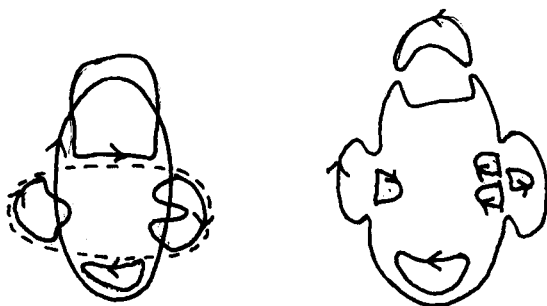
6 1 1 0 0 5 $\frac{1^-}{1}$



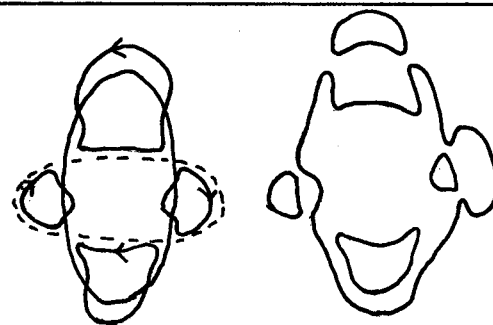
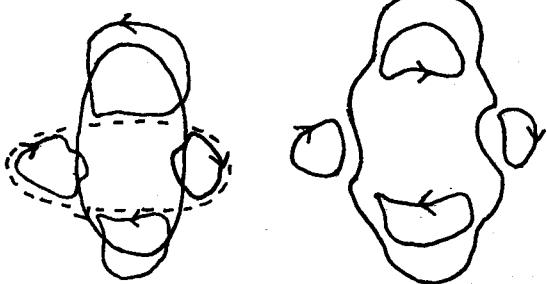
4 3 2 0 0 3 $\frac{1,2^-}{1}$



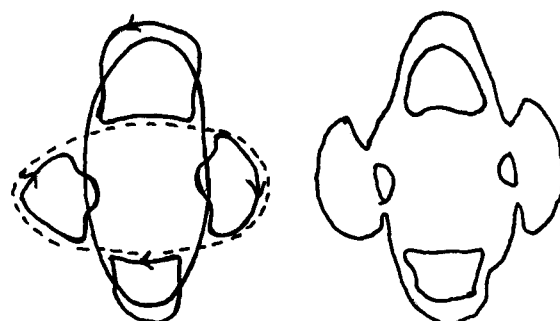
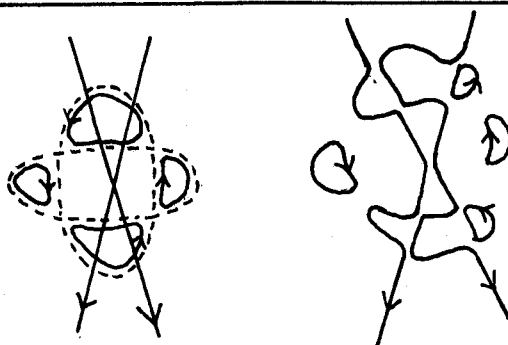
2 5 4 0 0 1 $\frac{1,4^-}{1}$



3 2 2 0 0 1 $\frac{2^-}{1}$

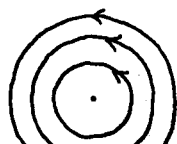


1 4 3 0 0 1 $\frac{1,3^-}{1}$



2 1 1 1 0

$\frac{1^-}{1^-}$
 $\frac{1^-}{1}$



trois cercles concentriques

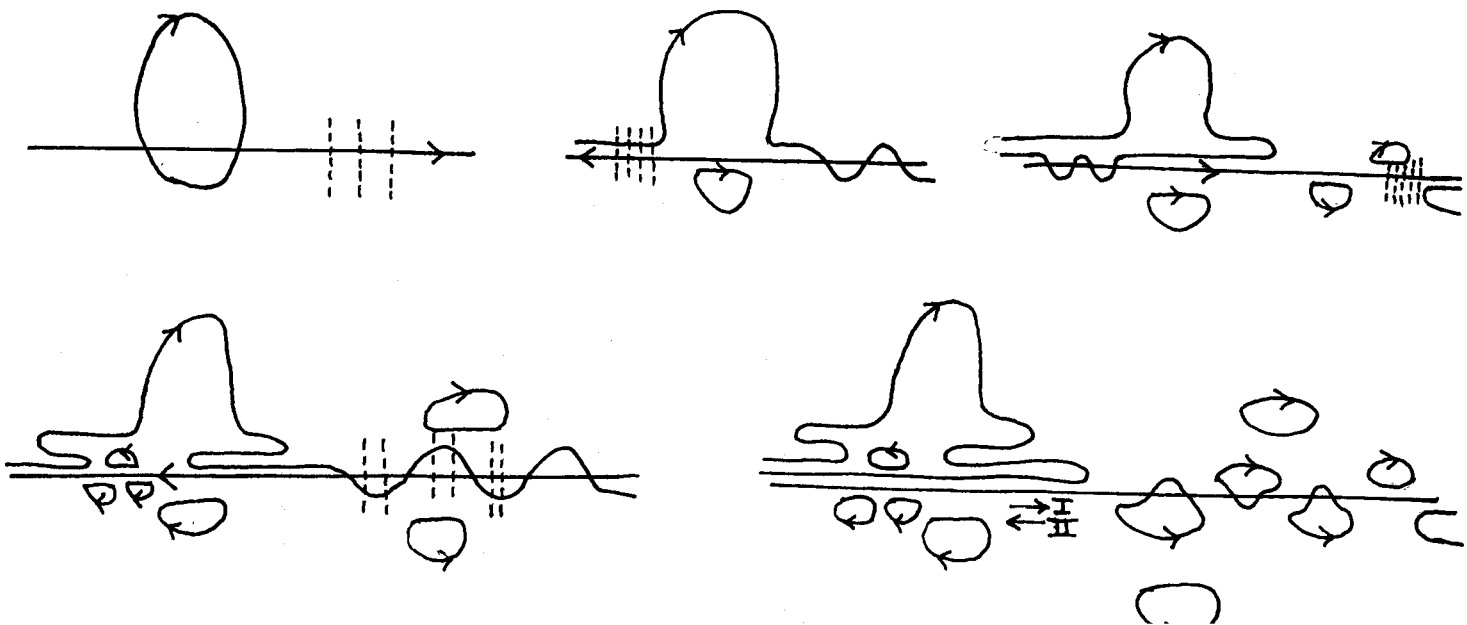
N'existe pas : voir page 10

Une courbe de degré six formée de trois ovales emboîtés sépare sa complexifiée :

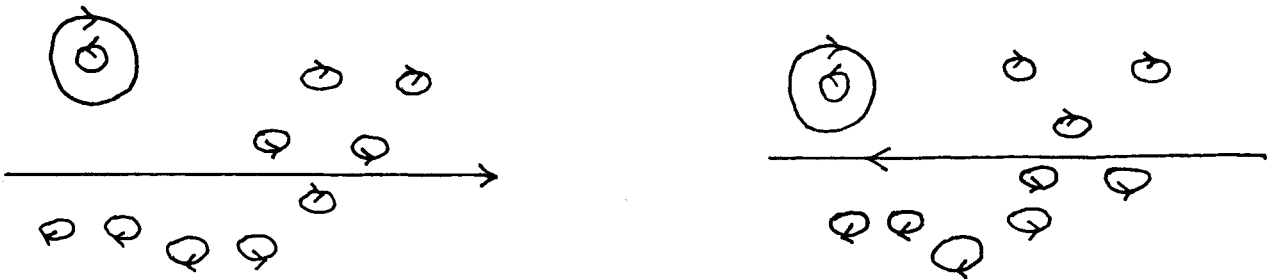
Soit Y le revêtement double de $\mathbb{C}P^2$ ramifié sur $C_{\mathbb{C}}$; on a :
 $\chi(Y) = 2\chi(\mathbb{C}P^2) - \chi(C_{\mathbb{C}}) = 6 + 18 = 24$; donc, puisque Y est simplement connexe, le second nombre de Betti de Y est $b_2(Y) = 22$, la signature est $\sigma(Y) = 2\sigma(\mathbb{C}P^2) - \frac{C_{\mathbb{C}} \cdot C_{\mathbb{C}}}{2} = 2 - 18 = -16$. La forme quadratique est donc de type $(3, 19)$. Soient A, B, C les images réciproques des composantes de $\mathbb{R}P^2 - C$ de caractéristique d'Euler 0 et D l'image réciproque de la droite $\mathbb{C}P^1$; la forme quadratique est positive sur le sous-espace engendré par A, B, C et D ; ces classes sont donc liées , ce qui est équivalent au fait que C est nul en homologie dans $C_{\mathbb{C}}$, donc que C sépare $C_{\mathbb{C}}$.

Remarque. Les formules de Rohlin et de Mishachev assurent qu'une courbe séparante de degré $2k$ (respectivement $2k+1$) a au moins k composantes (respectivement $k+1$ composantes), que tous les ovales sont emboîtés les uns dans les autres et que toutes les orientations sont les mêmes : $d = n$ dans le cas pair (respectivement $d = n = n^-$ dans le cas impair). Est-ce qu'une courbe ayant cette disposition sépare sa complexifiée ?

Dès le degré sept, les formules ci-dessus ne déterminent plus l'orientation d'une configuration donnée et l'exemple suivant, basé sur la méthode de Harnack, fournit deux courbes séparantes ayant des orientations distinctes :



En désingularisant les orientations I et II de la droite, on obtient les configurations :

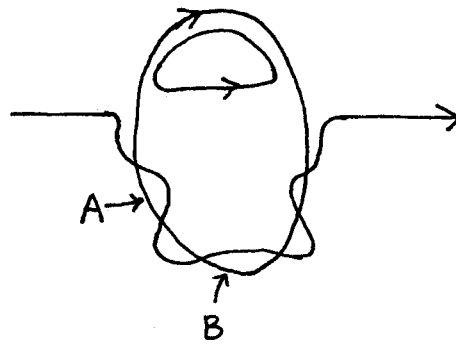
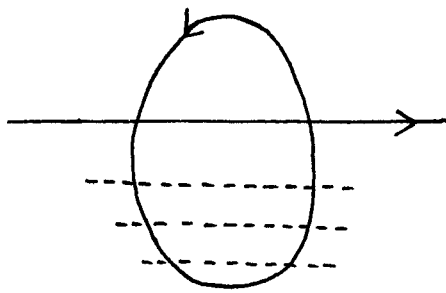


qui ont des orientations distinctes.

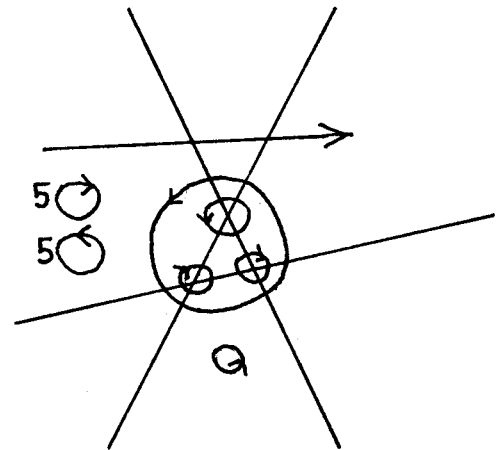
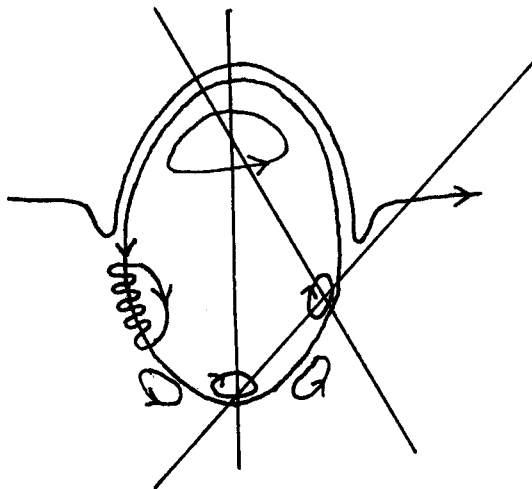
Nous ne savons pas construire de tels exemples avec des M-courbes ; remarquons cependant que pour la courbe $I 13 \frac{1}{1}$ par exemple, la relation de Mishachev donne deux possibilités d'orientation, mais en appliquant la relation de Rohlin à des courbes séparantes de degré huit dégénérant sur la réunion de la courbe et d'une droite joignant l'ovale impair et un ovale pair extérieur, on en élimine une et il ne reste plus que l'orientation $I 5^+ 7^- \frac{1^-}{1^+}$ (cette courbe est obtenue par la méthode de Harnack) : les restrictions que l'on peut tirer de ces deux formules ne sont pas claires.

Pour conclure ce paragraphe de résultats expérimentaux, construisons par la méthode de Hilbert, deux M-courbes de degré sept de type $I 6^+ 5^- \frac{1^+ 2^-}{1^+}$ qui sont dans des composantes distinctes du complémentaire du discriminant.

La distinction des deux courbes se fait en étudiant la position des ovales extérieurs par rapport aux droites joignant les ovales impairs. Il serait intéressant de savoir s'il y a une isotopie équivariante (pour la conjugaison complexe de $\mathbb{C}P^2$) joignant ces deux courbes.

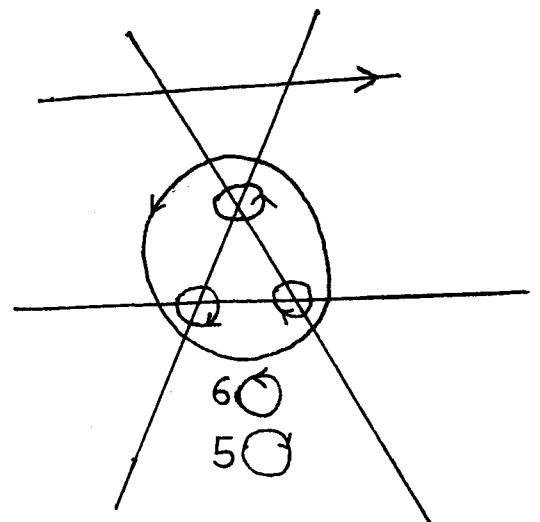
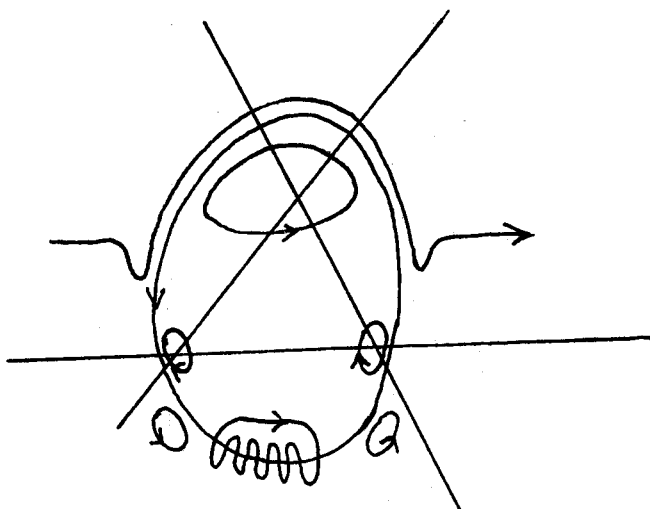


A:



en faisant vibrer dans la région A , on obtient cette disposition

B:



en faisant vibrer dans la région B , on obtient cette disposition

IV. - CONTRE-EXEMPLES A LA PREMIERE PREUVE DE ROHLIN

Rappelons brièvement cette preuve : Rohlin considère Y le revêtement double de $\mathbb{C}P^2$ ramifié sur la courbe $C_{\mathbb{C}}$ de degré $2k$. Si k est impair, l'image réciproque Π_- de $\mathbb{R}P^2$ est une surface caractéristique pour Y et la congruence est équivalente à ce que l'invariant de Arf de cette surface est nul. Rohlin donne la base suivante de $H_1(\Pi_-)$: $\alpha_1 \dots \alpha_p$ les ovals pairs et $\beta_1 \dots \beta_p$ les images réciproques de p sections b_i de $\mathbb{R}P^2$ qui transforment $\mathbb{R}P^2$ en une collection de cercles ; il affirme que $q(\beta_i) = 0$. Il spécifie que les b_i joignent les ovals pairs aux ovals impairs ne précisant pas le choix des b_i pour la composante non orientable de $\mathbb{R}P^2$. Quoi qu'il en soit, les β_i restent dans chaque composante de Π_- . Nous allons construire une M -courbe de degré 10 pour laquelle Π_- a sept composantes, cinq sont une sphère et les invariants de Arf de la forme de Rohlin q restreinte à l'homologie de chacune des autres composantes vaut 1.

Avant de donner l'exemple, calculons $q(\alpha_i)$ et $q(\beta_i)$ où β_i est l'image réciproque d'un segment de $\mathbb{R}P^2$ joignant deux ovals (ils peuvent être indifféremment pairs ou impairs).

1) Soit α_i une composante paire de la courbe C et D_i le disque bordé par α_i ; il se relève en un disque Δ_i qui est une membrane pour α_i ; on a : $\Delta_i \cdot \Pi_- = -\chi(\mathbb{R}P^2 \cap D_i) \equiv n_i \pmod{2}$ où n_i est le nombre d'ovales intérieurs à α_i et l'obstruction à étendre un collier de α_i dans Π_- en un champ de vecteur normal à Δ_i est $-\chi(D_i) = -1$. On a donc :

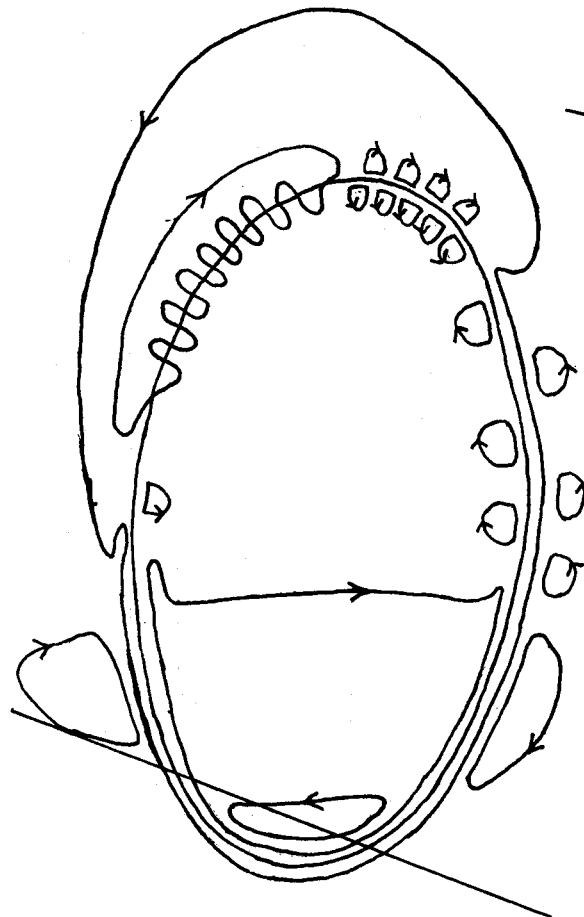
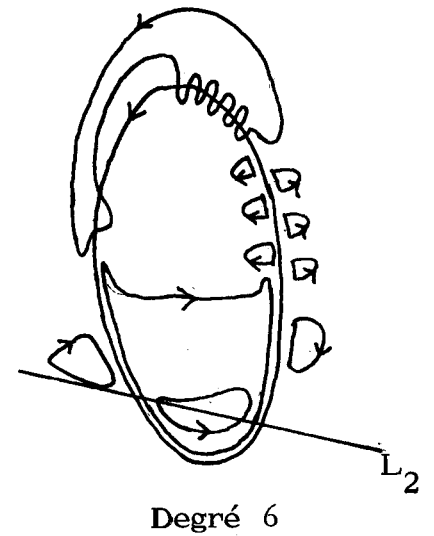
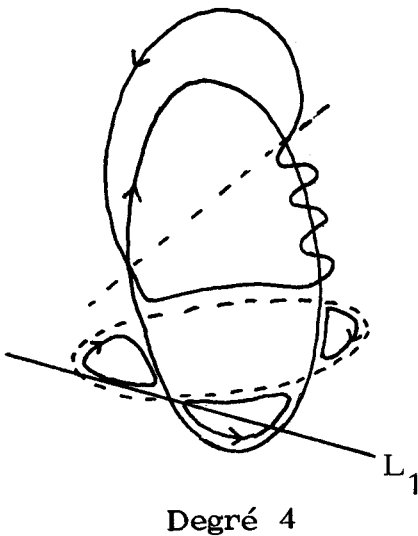
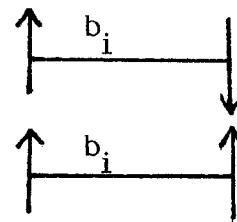
$$q(\alpha_i) = 1 + n_i .$$

2) Soit b_i un segment de $\mathbb{R}P^2$ joignant deux ovals et d_i un arc dans une moitié A de la complexifiée $C_{\mathbb{C}}$ joignant les deux extrémités de b_i . Soit m_i une surface dont le bord est $b_i \cup d_i$, normale à $\mathbb{R}P^2 \cup A$ près de $b_i \cup d_i$ et transverse à $\mathbb{R}P^2$. L'image réciproque μ_i de m_i est une membrane pour β_i qui coupe Π_- en

un nombre pair de points (le double de $\#(\overset{\circ}{m}_i \cap \mathbb{R}P^-)$). Comme $b_i \cup d_i$ n'a pas nécessairement un voisinage orientable dans $\mathbb{R}P^- \cup A$, considérons l'obstruction \mathcal{O} à étendre le fibré normal à $b_i \cup d_i$ dans $\mathbb{R}P^- \cup A$ en un sous-fibré de rang un du fibré normal à m_i ; elle est paire si et seulement si $b_i \cup d_i$ a un voisinage orientable dans $\mathbb{R}P^- \cup A$. L'obstruction $\tilde{\mathcal{O}}$ à étendre le fibré normal à β_i dans Π_- en un sous-fibré de rang un du fibré normal à μ_i est $2\mathcal{O}$; elle est congrue à zéro modulo 4 si et seulement si $b_i \cup d_i$ a un voisinage orientable dans $\mathbb{R}P^- \cup A$. Nous avons donc :

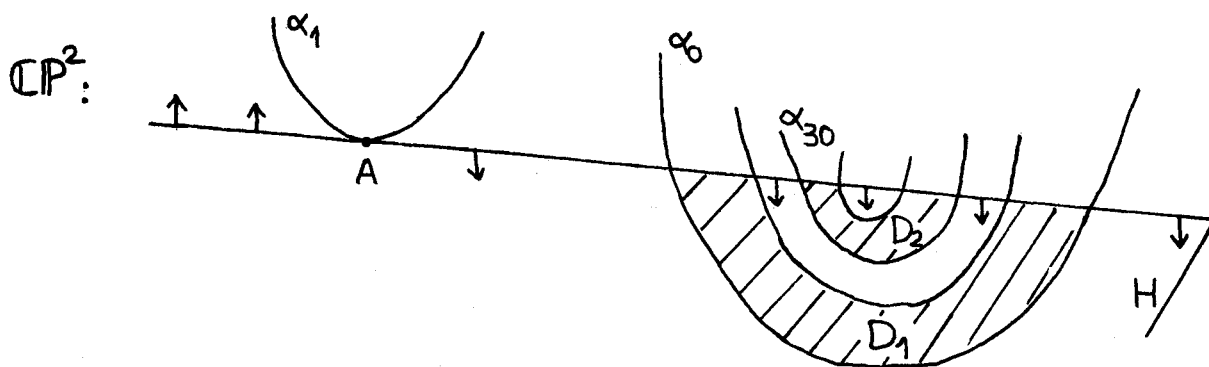
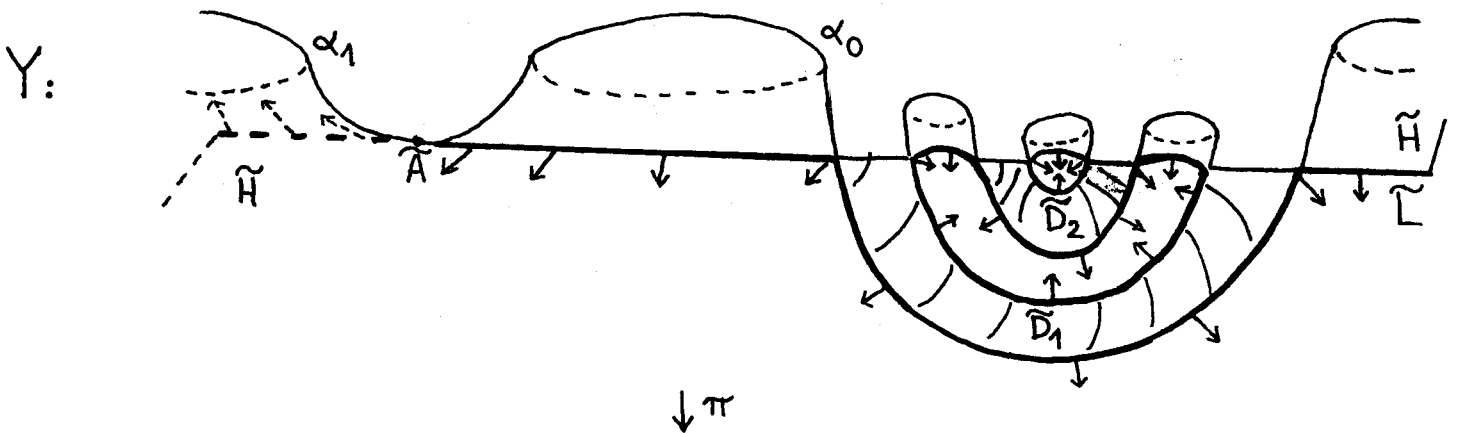
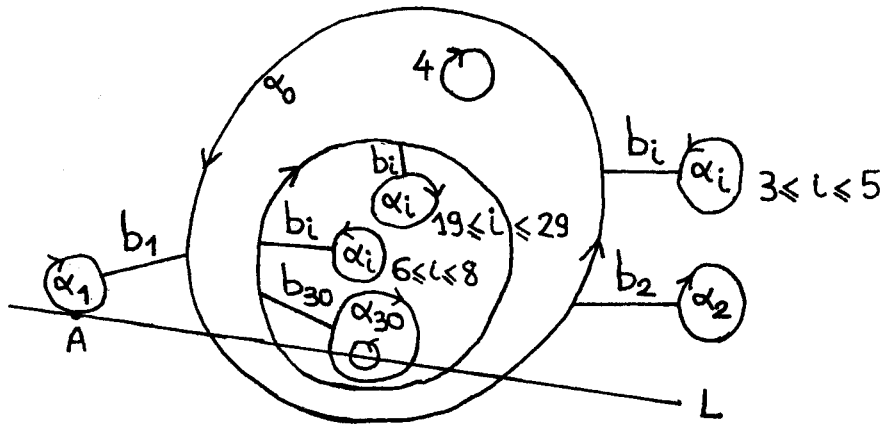
$q(\beta_i) = 0$, si les orientations sont

$q(\beta_i) = 1$, si les orientations sont



Courbe $5 \frac{1}{1} \frac{14}{1}$ de degré 8

La configuration de la M-courbe de degré 10 ainsi obtenue peut être schématisée de la manière suivante (on a dessiné les tangentes L_1, L_2, L_3 dans les étapes intermédiaires pour s'assurer de la position d'une tangente L à l'un des ovals extérieur et ne recoupant la courbe $C_{\mathbb{C}}$ qu'en sa partie réelle) :



Soit H un hémisphère de la tangente L dessinée. Son intérieur ne recoupe pas la courbe complexifiée $C_{\mathbb{C}}$, il se relève donc à Y en \tilde{H} ; il en est de même des disques D_1 et D_2 en \tilde{D}_1 et \tilde{D}_2 , la surface $\tilde{H} \cup \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2$ est une membrane pour son bord β_0 . Cette membrane ne recoupe pas Π_- , le champ de vecteur normal à L dessiné s'étend en un champ normal à H (penser L comme la droite d'équation $X = 0$ et A comme le point à l'infini de cette droite, ce champ est $(1,0)$) et les obstructions à l'étendre en un champ normal à D_1 et à D_2 sont égales; on a donc : $q(\beta_0) = 0$.

La partie Π_-^{∞} de Π_- au-dessus de la partie non orientable de $\mathbb{R}P^7$ a pour base symplectique $\alpha_0 + \dots + \alpha_5$, $\beta_0 + \beta_1$, $\alpha_1\beta_1, \dots, \alpha_5\beta_5$. On a :

$$q(\alpha_0 + \dots + \alpha_5) = 6 + 31 \equiv 1 \pmod{2}, \quad q(\beta_0 + \beta_1) = q(\beta_0) + q(\beta_1) = 1,$$

$$q(\alpha_i) = 1, \quad 1 \leq i \leq 5, \quad q(\beta_1) = q(\beta_2) = 1$$

$$q(\beta_i) = 0, \quad 3 \leq i \leq 5.$$

L'invariant de Arf vaut donc 1.

Une base symplectique de $\Pi_- - \Pi_-^{\infty}$ est (α_i, β_i) , $6 \leq i \leq 30$. On a :

$$q(\alpha_i) = 1, \quad 6 \leq i \leq 29, \quad q(\beta_i) = 0, \quad 6 \leq i \leq 18,$$

$$q(\alpha_{30}) = 0 \quad q(\beta_i) = 1, \quad 19 \leq i \leq 30.$$

L'invariant de Arf vaut donc aussi 1.

Remarque : Pour ce calcul, il nous a été essentiel de connaître $q(\beta_0)$ que l'on a pu calculer grâce à la géométrie particulière de la courbe.

Lorsque k est pair, Rohlin considère une droite réelle qu'il déforme en E de manière équivariante (pour la conjugaison complexe) de façon à ce qu'elle ne rencontre pas C . Soit \tilde{E} l'image réciproque de E et Π_+ l'image réciproque de $\mathbb{R}P^+$. Il considère alors la surface caractéristique $F = \tilde{E} \cup \Pi_+$. Nous allons montrer ici que l'invariant de Arf de la forme quadratique q restreinte à \tilde{E} est nul.

\tilde{E} est un revêtement ramifié de $\mathbb{C}P^1$ dont les points de ramification s'échangent par conjugaison. Soit α l'image réciproque d'un segment joignant deux points de ramification conjugués et β une des composantes de l'image réciproque de $\mathbb{R}P^1$. Puisque les deux moitiés de \tilde{E} s'échangent par conjugaison, l'invariant de Arf de la forme quadratique restreinte à \tilde{E} est $q(\alpha) \cdot q(\beta)$. Calculons $q(\alpha)$: en déplaçant la pseudo-droite E jusqu'à ce qu'elle soit tangente à C , on engendre un cycle évanescent pour α , il recoupe Π_+ en un point et, par la théorie de Picard-Lefschetz, l'obstruction à étendre une section est -1 ; donc $q(\alpha) = 0$.

Nous ne savons pas calculer, en général, l'invariant de Arf de la forme q restreinte à Π_+ . Bien sûr, les α_i et les β_i forment une base symplectique, mais on ne peut espérer $q(\beta_i) = 0$; cela signifierait que $A \cup \mathbb{R}P^+$ est orientable, auquel cas on aurait une égalité $p - n = k^2$. L'égalité n'est pas vérifiée par exemple pour les courbes $1 \frac{9}{1}$ et $5 \frac{5}{1}$ en degré 6, ni pour la courbe $5 \frac{1}{1} 14$ en degré 8, voir p. 15.

V. - LES INEGALITES DE PETROWSKI

THEOREME. Soit C une courbe algébrique plane réelle de degré $2k$ ayant M points doubles ordinaires réels et $2N$ points doubles ordinaires complexes. On a alors l'inégalité :

$$|2\chi(\mathbb{R}P^+) - 1 + M| \leq 1 + 3k(k-1) - (M+2N) .$$

COROLLAIRE. Soit C une courbe algébrique plane réelle de degré $2k+1$ qui coupe transversalement la droite de l'infini en M points. On a l'inégalité :

$$|2\chi(\mathbb{R}P^+) - 1 + M| \leq 3k^2 + k .$$

Démonstration du théorème. On éclate tous les points doubles ordinaires pour obtenir une courbe \tilde{C} dans $S = \sigma_{M+2N} \mathbb{C}P^2$. Soit $f = 0$ une équation affine de \tilde{C} et \tilde{C}_ϵ

la courbe lisse d'équation $f = \epsilon$. Soit σ la conjugaison complexe de S . Le quotient S/σ est difféomorphe à la sphère S^4 éclatée N fois. Considérons la surface $F = \tilde{C}_{\epsilon/\sigma} \cup S_{\mathbb{R}^+}$ ($S_{\mathbb{R}^+} = \{x \in S_{\mathbb{R}} \mid f(x) \geq \epsilon\}$). La surface F est nulle en homologie modulo deux dans S/σ , on peut donc considérer X le revêtement double de S ramifié sur X .

La caractéristique d'Euler de X est :

$$\begin{aligned} \chi(X) &= 4 + 2N - \chi(F) = 4 + 2N - \left[\frac{\chi(\tilde{C}_{\epsilon})}{2} + \chi(S_{\mathbb{R}^+}) \right] \\ &= 4 + 2N + k(2k-3) - (M+2N) - \chi(\mathbb{R}P^+). \end{aligned}$$

La variété X est le quotient par la conjugaison complexe de Y le revêtement double de S ramifié sur \tilde{C}_{ϵ} , donc X est simplement connexe, et le second nombre de Betti est :

$$b_2(X) = 2 + 2N + k(2k-3) - (M+2N) - \chi(\mathbb{R}P^+).$$

La signature de l'involution du revêtement ramifié X est :

$$\frac{F^2}{2} = \frac{\tilde{C}_{\epsilon}^2}{2} - \chi(S_{\mathbb{R}^+}) = k^2 - (M+2N) - \chi(\mathbb{R}P^+).$$

De l'inégalité $-\frac{F^2}{2} \leq b_2(M)$, on tire :

$$2\chi(\mathbb{R}P^+) - (1-M) \leq 1 + 3k(k-1) - (M+2N).$$

On obtient bien sûr aussi l'inégalité :

$$2\chi(\mathbb{R}P^-) - (1-M) \leq 1 + 3k(k-1) - (M+2N).$$

La conjonction de ces deux inégalités donne l'inégalité de Petrowski puisque

$$1 - M = \chi(S_{\mathbb{R}}) = \chi(S_{\mathbb{R}^+}) + \chi(S_{\mathbb{R}^-}) = \chi(\mathbb{R}P^+) + \chi(\mathbb{R}P^-).$$

Remarque. Le lecteur curieux établira une inégalité plus fine dans le cas de singularités plus compliquées. Cette formule fait intervenir une résolution tronquée de la singularité : on n'éclate que les points infiniment voisins de multiplicité paire.

REFERENCES

- [A'] N. A'CAMPO, Sur la 1ère partie du 16e problème de Hilbert, Séminaire Bourbaki, 31e année, 1978-79, n° 537.
- [A] V.I. ARNOLD, The arrangement of the ovals of real plane algebraic curves, involutions of four-dimensional manifolds and the arithmetic of integral quadratic forms, *Funkt. Analiz. i ego Pril.*, 5:3 (1971), 1-9 ; traduction angl. *Funct. Anal. and its appl.* 5 (1972), 169-175.
- [GK] D.A. GUDKOV and A.D. KRAKHNOV, Periodicity of the Euler characteristic of real algebraic $M-1$ varieties, *Funkt. Analiz. i ego Pril.*, Z:2 (1973), 15-19 ; traduction angl. *Funct. Anal. and its appl.* 7 (1974), 98-102.
- [GM] L. GUILLOU et A. MARIN, Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 285 (18 juillet 1977).
- [M] N.M. MISHACHEV, Complex orientations of plane M -curves of odd degree, *Funkt. Analiz. i ego Pril.* 9 (1975), 77-78 ; traduction angl. *Funct. Anal. and its Appl.* 9 (1975), 342-343.
- [R₁] V.A. ROHLIN, Proof of Gudkov's conjecture, *Funkt. Analiz. i ego Pril.* 6 (1971), 62-64 ; traduction angl. *Funct. Anal. and its appl.* 6 (1972), 136-138.
- [R₂] V.A. ROHLIN, Congruences modulo 16 in Hilbert's sixteenth problem, *Funkt. Analiz. i ego Pril.* 6 (1971), 58-64 ; part II, *ibid.* 7 (1973), 91-92. Traduction angl. *Funct. Anal. and its appl.* 6 (1972), 301-306 ; part II, *ibid.* 7 (1974), 163-164.
- [R₃] V.A. ROHLIN, Complex orientations of real algebraic curves, *Funkt. Analiz. i ego Pril.* 8 (1974), 71-75 ; traduction angl. *Funct. Anal. and its appl.* 8 (1974), 331-334.

Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Bâtiment 425

91405 ORSAY cedex - France