Annales de l'université de Grenoble

Laurent Schwartz

Théorie des distributions et transformation de Fourier

Annales de l'université de Grenoble, tome 23 (1947-1948), p. 7-24

<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1947-1948__23__7_0>

THÉORIE DES DISTRIBUTIONS ET TRANSFORMATION DE FOURIER (1)

par **Laurent SCHWARTZ** (Nancy).

---

§ 1. — Préliminaires (2).

1° $(\mathcal{D})$ sera l'espace des fonctions φ de n variables réelles, $x_1, x_2, \dots x_n$, indéfiniment dérivables, nulles en dehors d'ensembles compacts. On appellera *support* d'une fonction φ l'adhérence de l'ensemble des points où elle n'est pas nulle. On dira que des fonctions $\varphi_j \in (\mathcal{D})$ convergent vers o si leurs supports sont contenus dans un compact fixe, et si elles convergent uniformément vers o, ainsi que chacune de leurs dérivées.

2° Une distribution T est une forme linéaire $T(\varphi)$ définie pour toute $\varphi \in (\mathcal{D})$, et *continue* : si des φ_j convergent vers o dans $(\mathcal{D})$, les $T(\varphi_j)$ doivent converger vers o. Le *support* de T est le complémentaire du plus grand ensemble ouvert tel que, pour toute fonction φ ayant son support dans cet ouvert, $T(\varphi)$ soit nul.

Nous appellerons $(\mathcal{D}')$ l'espace des distributions. On introduit dans $(\mathcal{D}')$ une notion de convergence : des distributions $T_j \in (\mathcal{D}')$ convergent vers o si les $T_j(\varphi)$ convergent vers o quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{D})$ et uniformément par rapport à tout ensemble de fonctions φ à supports

(1) Suite d'un article paru dans ces mêmes Annales (t. 21, 1945) et auquel nous nous référerons par les initiales A. G. 45 : « Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier, et applications mathématiques et physiques. »

Le présent article a été exposé à la Conférence Internationale d'Analyse Harmonique (juin 1947, Nancy) ; il n'est qu'un résumé très bref.

Un livre plus complet paraîtra prochainement aux Publications de l'Institut Mathématique de Strasbourg.

(2) Rappel des éléments essentiels d'A. G. 45. Quelques notations ont été modifiées. Notamment le « noyau », dénomination qui pouvait prêter à confusion, a été remplacé par le « support ».

contenus dans un compact fixe et bornées ainsi que chacune de leurs dérivées. Rappelons qu'une fonction $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ définie presque partout et sommable sur tout compact, peut être considérée comme une distribution particulière, car elle définit la forme linéaire

$$(1) \quad f(\varphi) = \int\int \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots x_n)\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)dx_1, dx_2 \ldots dx_n.$$

3° Nous avons défini la dérivée partielle d'une distribution par la formule

$$(2) \qquad \frac{\partial T}{\partial x_k}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right).$$

Toute distribution (donc toute fonction telle que f) apparaît dans cette théorie comme indéfiniment dérivable (et on peut intervertir l'ordre des dérivations partielles).

La dérivation est une opération linéaire continue : si des T_j convergent vers o dans $(\mathcal{D}')$, les $\frac{\partial T_j}{\partial x_k}$ convergent aussi vers o. Toute série convergente peut être, sans précaution, dérivée terme à terme.

Rappelons que toute distribution est égale, dans un ensemble ouvert d'adhérence compacte (mais non en général dans l'espace entier) à une dérivée d'ordre fini d'une fonction continue (non nécessairement dérivable au sens usuel).

4° On définit le produit d'une distribution T et d'une fonction α, indéfiniment dérivable au sens usuel, par la formule

$$(3) \qquad \alpha T(\varphi) = T(\alpha\varphi).$$

On définit aussi le « produit de composition » (Faltung) $S * T$ de 2 distributions S et T. La définition est un peu délicate. Une bonne méthode de calcul est la suivante : pour calculer $S*T(\varphi)$, on calcule $T\big(\varphi(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, \ldots x_n + \xi_n)\big)$, où $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ sont considérés comme des paramètres ; le résultat est une fonction ψ des paramètres $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, indéfiniment dérivable au sens usuel et à support compact si T est à support compact ; en faisant alors jouer à $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ le rôle des n variables réelles indépendantes et en considérant ψ comme $\in(\mathcal{D})$, on peut calculer $S(\psi)$. On pose donc

$$(4) \quad S*T(\varphi) = S(\psi) = S_{\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n}\left[T_{x_1, x_2, \ldots x_n}\varphi(x_1 + \xi_1, \ldots x_n + \xi_n)\right].$$

On peut définir le produit de composition d'un nombre fini quelconque de distributions, dont toutes sauf une au plus sont à support compact. Ce produit est associatif et commutatif.

§ 2. — La transformation de Fourier usuelle.

Habituellement la transformation de Fourier à n variables continues fait correspondre à une fonction $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ des n variables réelles $x_1, x_2, \dots x_n$, une fonction $g(y_1, y_2, \dots y_n)$ de n autres variables $y_1, y_2, \dots y_n$, par la formule

$$(5)\quad \begin{cases} g = \mathcal{F}f, \\ g(y_1, y_2, \cdots y_n) = \displaystyle\iint\cdots\int f(x_1, x_2, \dots x_n) \\ \qquad\qquad \exp.\left(-2i\pi(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)\right)dx_1 \cdots dx_n. \end{cases}$$

Il sera commode d'utiliser un formalisme à 1 variable. Nous appellerons x un point de l'espace X^n à n dimensions, de coordonnées $x_1, x_2, \dots x_n$; y un point de l'espace Y^n à n dimensions, de coordonnées $y_1, y_2, \cdots y_n$; $dx = dx_1dx_2 \dots dx_n$, $dy = dy_1dy_2 \dots dy_n$ seront les éléments de volumes de ces 2 espaces ; et nous poserons aussi, pour abréger, $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. Alors (5) s'écrit

$$(6)\qquad g(y) = \iint\cdots\int f(x) \exp.(-2i\pi x \cdot y)dx$$

et l'on a la formule de réciprocité de Fourier

$$(7)\qquad \begin{cases} f = \overline{\mathcal{F}}g \\ f(x) = \displaystyle\iint\cdots\int g(y) \exp.(+2i\pi x \cdot y)dy. \end{cases}$$

Nous ferons jouer un rôle essentiel à la formule de Parseval : si $g_1 = \mathcal{F}f_1$, $g_2 = \mathcal{F}f_2$, cette formule s'écrit

$$(8)\qquad \iint\cdots\int f_1(x)\overline{f_2}(x)dx = \iint\cdots\int g_1(y)\overline{g_2}(y)dy$$

ou

$$(9)\qquad \iint\cdots\int f_1(x)f_2(x)dx = \iint\cdots\int g_1(y)g_2(-y)dy.$$

La formule (5) n'a de sens que dans certains cas (si f est sommable par exemple, ou si c'est une fonction « monotone » convenablement définie) ; on lui donne un sens dans des cas plus étendus par des procédés classiques (méthode de M. Plancherel si f est de carré sommable ; généralisation de M. F. Riesz si $f \in L^p$, $1 < p < 2$; méthode de M. Bochner[3]). Mais, sauf dans des cas restreints, la formule de réciprocité (7) n'a pas de sens, de même que les formules (8)-(9).

Nous voudrions définir la transformation de Fourier dans le cadre très général des distributions, et donner la même valeur aux 2 formules réciproques (6) et (7). Mais c'est *impossible* dans le cas le plus général ; la transformée de Fourier d'une distribution quelconque peut se définir, mais *ce n'est pas une distribution*. Nous nous bornerons ici à définir un espace restreint de distributions, dont les transformées de Fourier sont des distributions.

§ 3. — Distributions sphériques.

Soit $(\mathcal{S})$ l'espace des fonctions $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ indéfiniment dérivables (au sens usuel), et tendant vers o à l'infini plus vite que toute puissance de $1/r$ $(r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$ ainsi que chacune de leurs dérivées.

On peut encore dire que, si $\varphi \in (\mathcal{S})$, tout produit d'un polynôme par une dérivée de φ (ou toute dérivée du produit de φ par un polynôme) est une fonction bornée, et réciproquement ; nous dirons pour abréger que φ est « à décroissance rapide à l'∞ ainsi que ses dérivées ». L'espace $(\mathcal{S})$ admet évidemment, comme sous-espace particulier, l'espace $(\mathcal{D})$, des fonctions φ indéfiniment dérivables à support compact.

Nous introduirons dans $(\mathcal{S})$ une notion de convergence. Des $\varphi_j \in (\mathcal{S})$ convergeront vers o si le produit par tout polynôme de toute dérivée des φ_j (ou toute dérivée du produit des φ_j par tout polynôme) converge uniformément vers o dans tout l'espace. On voit que des $\varphi_j \in (\mathcal{D})$, convergeant vers o dans $(\mathcal{D})$, convergent aussi vers o dans $(\mathcal{S})$, mais la réciproque est inexacte. On montre aisément que $(\mathcal{D})$, considéré comme sous-espace vectoriel de $(\mathcal{S})$, avec la topologie induite par celle de $(\mathcal{S})$, est dense dans $(\mathcal{S})$.

Nous appellerons espace $(\mathcal{S}')$ des *distributions sphériques* l'espace des *formes linéaires* $T(\varphi)$, définies pour $\varphi \in (\mathcal{S})$ et *continues*. Dire que $T(\varphi)$ est continue, c'est dire que si des $\varphi_j \in (\mathcal{S})$ convergent vers o dans $(\mathcal{S})$, les $T(\varphi_j)$ doivent converger vers o.

(3) *Bochner*. « Vorlesungen über Fouriersche Integrale ». Leipzig, 1932. Pages 110-169. Sous un formalisme différent, il y a évidemment une grande parenté entre les idées de M. Bochner et celles-ci.

Si T est une distribution sphérique, $T(\varphi)$ est définie pour $\varphi \in (\mathcal{D})$; et si des $\varphi_j \in (\mathcal{D})$ convergent vers o dans $(\mathcal{D})$, elles convergent à fortiori vers o dans $(\mathcal{S})$, donc les $T(\varphi_j)$ convergent vers o ; cela prouve que T est une distribution $\in (\mathcal{D}')$, suivant la définition du § 1. Autrement dit, du fait que $(\mathcal{S})$ est un espace plus grand que $(\mathcal{D})$ (avec une topologie moins fine), $(\mathcal{S}')$ est un sous-espace de $(\mathcal{D}')$. Une distribution quelconque $T \in (\mathcal{D}')$ n'est pas une distribution sphérique, $\in (\mathcal{S}')$; pour qu'elle le soit, il est nécessaire que, si des $\varphi_j \in (\mathcal{D})$ convergent vers o *avec la définition de la convergence de* $(\mathcal{S})$, les $T(\varphi_j)$ convergent vers o ; cette condition est aussi suffisante, car si elle est réalisée, T est une forme linéaire définie sur $(\mathcal{D})$, sous-espace *dense* de $(\mathcal{S})$ et continue pour la topologie de $(\mathcal{S})$, donc elle est prolongeable d'*une manière unique* en une forme linéaire continue sur $(\mathcal{S})$, c'est-à-dire une distribution sphérique. L'unicité nous assure que 2 distributions sphériques $\in (\mathcal{S}')$ distinctes sont 2 distributions $\in (\mathcal{D}')$ distinctes.

Il est enfin nécessaire d'introduire une notion de convergence dans l'espace $(\mathcal{S}')$ des distributions sphériques. Des $T_j \in (\mathcal{S}')$ convergeront vers o dans $(\mathcal{S}')$ si les $T_j(\varphi)$ convergent vers o, quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{S})$, et uniformément par rapport à tout ensemble de fonctions φ bornées ainsi que le produit de chaque polynôme par chacune de leurs dérivées. On voit que si des $T_j \in (\mathcal{S}')$ convergent vers o dans $(\mathcal{S}')$, elles convergent aussi vers o dans la topologie de $(\mathcal{D}')$; la réciproque est évidemment fausse.

Donnons quelques exemples. Une fonction mesurable $f(x)$ « à croissance lente à l'∞ », c'est-à-dire telle que

$$(10) \qquad \iint \cdots \int \frac{|f(x)|}{(1+r^2)^k}\, dx < +\infty$$

pour une valeur convenable de k, est « sphérique ». Elle définit en effet, pour $\varphi \in (\mathcal{S})$, suivant la formule (1), une forme linéaire continue $f(\varphi)$:

$$(11) \qquad f(\varphi) = \iint \cdots \int f(x)\varphi(x)\, dx.$$

De même une mesure « à croissance lente à l'∞ » est sphérique, si l'on entend par là une mesure μ telle que

$$(12) \qquad \iint \cdots \int \frac{|d\mu|}{(1+r^2)^k} < +\infty, \text{ pour } k > 0 \text{ assez grand.}$$

Cette condition de croissance lente, (12), est suffisante mais non nécessaire pour qu'une mesure μ soit sphérique ; elle est nécessaire et suffisante si μ est une mesure $\geqslant 0$ [1].

Une distribution sphérique est indéfiniment dérivable (formule (2)) et toutes ses dérivées sont sphériques ; la dérivation est une opération linéaire continue dans $(\mathcal{S}')$. On voit alors que toute dérivée d'une fonction ou d'une mesure à croissance lente est sphérique ; on démontre que la réciproque est vraie, toute distribution sphérique est une dérivée du produit d'un polynôme par une fonction continue bornée (non nécessairement dérivable au sens usuel).

On peut définir dans $(\mathcal{S}')$ les opérations de multiplication et de composition définies dans $(\mathcal{D}')$. Cependant :

1° Le produit αT n'est sphérique, T étant sphérique, que si α, fonction indéfiniment dérivable, *est à croissance lente à l'∞ ainsi que toutes ses dérivées* ; car il faut que, quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{S})$, $\alpha\varphi$ soit aussi $\in (\mathcal{S})$.

2° Le produit de composition $S * T$ est défini et sphérique, S étant sphérique, non seulement si T est à support compact, mais dans des cas plus généraux, comprenant au moins le cas où S est une dérivée d'une fonction continue (non nécessairement dérivable au sens usuel) « à décroissance rapide à l'∞ ».

Pourquoi le nom de distribution sphérique ? Les espaces $(\mathcal{D})$ (de fonctions indéfiniment dérivables à supports compacts) et $(\mathcal{D}')$ (de distributions) sont définissables non seulement sur l'espace R^n dont chaque point x a pour coordonnées $x_1, x_2, \ldots x_n$, mais sur toute variété indéfiniment différentiable (il faut seulement remarquer que l'on ne peut pas, en général, parler de dérivées partielles, sauf si une définition de la dérivation est spécialement donnée ; on ne peut pas non plus assimiler une fonction à une distribution, si une mesure des volumes dx n'a pas été fixée). Considérons alors l'espace R^n utilisé ; adjoignons-lui un point à l'∞, nous obtenons un espace homéomorphe à la sphère à n dimensions S^n, et admettant une structure indéfiniment différentiable évidente (définie au voisinage du point à l'∞ de R^n par une inversion).

Pour qu'une distribution $T \in (\mathcal{D}')$, *distribution sur l'espace* R^n, *soit sphérique, il faut et il suffit qu'elle soit prolongeable en une distribution sur la sphère* S^n.

[1] Il peut arriver par exemple qu'une fonction f soit très oscillante, qu'elle prenne de très grandes valeurs positives et négatives, de sorte que d'une part la formule (11) définisse f comme $\in (\mathcal{S}')$, mais que d'autre part $\int\int \cdots \int \frac{|f(x)|}{(1+r^2)^k}\, dx = +\infty$ quel que soit k.

§ 4. — Transformation de Fourier dans l'espace des distributions sphériques.

L'espace $(\mathcal{S}')$ des distributions sphériques sera le domaine par excellence de l'analyse harmonique. Nous distinguerons nettement les rôles des 2 variables x et y, mais rien n'empêchera, quand on le voudra, de les identifier ; nous désignerons par $(\mathcal{S})_x$, $(\mathcal{S})_y$, $(\mathcal{S}')_x$, $(\mathcal{S}')_y$, les espaces $(\mathcal{S})$, $(\mathcal{S}')$, construits respectivement sur les espaces à n dimensions X^n et Y^n.

Soit $u(x)$ une fonction $\in(\mathcal{S})_x$; elle est sommable, donc elle a une transformée de Fourier usuelle, définie par (6)

$$v(y) = \int\int\cdots\int u(x)\,\text{exp.}\,(-2i\pi x\,.\,y)dx. \tag{13}$$

Il est facile de voir que $v(y)\in(\mathcal{S})_y$. En effet :

a) La formule (13) peut être indéfiniment dérivée. Par exemple

$$\frac{\partial}{\partial y_1}v(y) = \int\int\cdots\int u(x)\,.\,(-2i\pi x_1)\,\text{exp.}\,(-2i\pi x\,.\,y)dx \tag{14}$$

l'intégrale du 2ᵉ membre ayant un sens puisque $x_1 u(x)$ est sommable. C'est le fait que u soit à « décroissance rapide à l'∞ » qui entraîne le fait que v soit indéfiniment dérivable.

b) En sens inverse, une intégration par parties montre que

$$2i\pi y_1 v(y) = \int\int\cdots\int \frac{\partial}{\partial x_1}u(x)\,\text{exp.}\,(-2i\pi x\,.\,y)dx. \tag{15}$$

Le 2ᵉ membre étant sommable, $y_1 v(y)$ est bornée ; en continuant, on voit que le fait que u ait toutes ses dérivées successives sommables entraîne le fait que v soit « à décroissance rapide à l'∞ ». Il y a donc échange des 2 propriétés ; si $u\in(\mathcal{S})_x$, elle est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées, donc v a toutes dérivées à décroissance rapide, $v\in(\mathcal{S})_y$. Naturellement ici la formule de réciprocité joue

$$u(x) = \int\int\cdots\int v(y)\,\text{exp.}\,(+2i\pi x\,.\,y)dy \tag{16}$$

et, pour des fonctions appartenant à $(\mathcal{S})_x$ et $(\mathcal{S})_y$, la formule de Parseval est valable. Ajoutons que le raisonnement même qui nous a permis de montrer que $u \in (\mathcal{S})_x$ entraîne $v \in (\mathcal{S})_y$ montre aussi que si des u_j convergent vers o dans $(\mathcal{S})_x$, leurs transformées de Fourier v_j convergent vers o dans $(\mathcal{S})_y$: *la transformation de Fourier usuelle $\mathcal{F}$ et sa conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$ établissent entre les espaces topologiques* $(\mathcal{S}_x)$ et $(\mathcal{S})_y$, 2 *isomorphismes réciproques* (*et, si l'on identifie les variables x et y, elles établissent sur* $(\mathcal{S})$ 2 *automorphismes réciproques*).

Il est maintenant très facile de définir la transformée de Fourier d'une distribution sphérique quelconque U. Si U est une fonction ayant une transformée de Fourier usuelle V (par exemple si U est de carré sommable), on a, quelle que soit $u \in (\mathcal{S})_x$ et sa transformée de Fourier $v \in (\mathcal{S})_y$, la formule de Parseval

$$(17) \qquad \iint \cdots \int V(y)v(y)dy = \iint \cdots \int U(x)u(-x)dx$$

ou

$$(18) \qquad V(v(y)) = U(u(-x))$$

cette dernière notation étant la notation fonctionnelle (1).

Mais si U est une distribution sphérique quelconque $\in (\mathcal{S}')_x$, la formule (18) définit, *d'une manière bien déterminée et unique*, une forme linéaire $V(v)$ qui peut s'expliciter :

$$(19) \qquad V(v) = U\left(\iint \cdots \int v(y) \exp.(-2i\pi x \cdot y)dy\right).$$

Cette forme linéaire définit bien une distribution sphérique $\in (\mathcal{S}')_y$; car si v tend vers o dans $(\mathcal{S})_y$, u tend vers o dans $(\mathcal{S})_x$, donc le 2ᵉ membre de (18) tend vers o, U étant sphérique, et par suite aussi le premier : V est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{S})_y$, c. q. f. d. Cette définition absolument générale de la transformée de Fourier redonne, dans les cas classiques, la transformée de Fourier classique, puisque celle-ci vérifie (18), qui détermine V d'une manière unique. Naturellement V ne peut être nulle que si U est nulle ; car si $V = 0$, le 1ᵉʳ membre de (18) est nul quel que soit $v \in (\mathcal{S})_y$, donc le 2ᵉ quel que soit $u \in (\mathcal{S})_x$, et U est nulle. D'ailleurs la formule (18) est tout aussi valable si l'on remplace la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ par sa conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$; on peut l'écrire, respectivement dans ces 2 cas

$$(20) \qquad \begin{cases} \mathcal{F}U(v) = U(\mathcal{F}v) \\ \overline{\mathcal{F}}U(v) = U(\overline{\mathcal{F}}v) \end{cases}$$

(ce qui exprime que la transformation $\mathcal{F}$ de $(\mathcal{S}')_x$ dans $(\mathcal{S}')_y$ est la *transposée* de la transformation $\mathcal{F}$ de $(\mathcal{S})_y$ dans $(\mathcal{S})_x$.) Alors

$$(21) \qquad \begin{cases} \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}U(v) = \mathcal{F}U(\bar{\mathcal{F}}v) = U(\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}v) = U(v) \\ \text{ou} \quad \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}U = U \quad \text{et aussi} \quad \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}V = V, \end{cases}$$

$\mathcal{F}$ et $\bar{\mathcal{F}}$ sont réciproques l'une de l'autre ; si $V = \mathcal{F}U$, alors $U = \bar{\mathcal{F}}V$, et réciproquement. Bien plus, si des $U_j \in (\mathcal{S}')_x$ convergent vers 0 dans $(\mathcal{S}')_x$, leurs images de Fourier V_j convergent vers 0 dans $(\mathcal{S}')_y$; on le voit immédiatement en utilisant la définition de la convergence dans $(\mathcal{S}')$ (§ 3, page 11) et en remarquant qu'à tout ensemble de fonctions $u \in (\mathcal{S})_x$, bornées ainsi que le produit de chaque polynôme par chacune de leurs dérivées, correspond un ensemble analogue de fonctions $v \in (\mathcal{S})_y$ et inversement. *La transformation de Fourier* $\mathcal{F}$ *et sa conjuguée* $\bar{\mathcal{F}}$ *établissent entre les 2 espaces topologiques* $(\mathcal{S}')_x$ *et* $(\mathcal{S}')_y$ *2 isomorphismes réciproques ; si l'on identifie les variables* x *et* y, $\mathcal{F}$ *et* $\bar{\mathcal{F}}$ *définissent dans l'espace topologique* $(\mathcal{S}')$ *2 automorphismes réciproques*. Il en résultera en particulier qu'on peut effectuer la transformation de Fourier, terme à terme, sur une série convergente, ce qui est impossible habituellement.

Nous admettrons sans démonstration que, dans les cas cités au § 3, page 12, où l'on peut effectuer respectivement la multiplication et le produit de composition, la transformation de Fourier échange ces 2 produits :

$$(22) \qquad \begin{cases} \mathcal{F}(U_1U_2) = \mathcal{F}U_1 * \mathcal{F}U_2 = V_1 * V_2 \\ \mathcal{F}(U_1 * U_2) = (\mathcal{F}U_1)(\mathcal{F}U_2) = V_1V_2 \end{cases}$$

formules qui généralisent les formules habituelles de la transformation de Fourier classique. La démonstration rigoureuse consiste à partir de ces formules, vraies si U_1 et U_2 sont des fonctions $\in (\mathcal{S})_x$, et à faire un passage à la limite utilisant la continuité de ces produits et de la transformation $\mathcal{F}$; nous n'insistons pas, mais il faut faire attention aux conditions d'applications de ces formules.

§ 5. — Exemples.

Nous ne pouvons ici multiplier les exemples. Nous en choisirons qui soient capables d'illustrer le mécanisme de la transformation de Fourier.

1er exemple. — Transformée de Fourier de $\frac{\partial\delta}{\partial x_1}$ (5) (δ = mesure de Dirac, masse $+1$ à l'origine).

La formule (19) donne immédiatement

$$(23)\quad \begin{cases} V(v) = \dfrac{\partial\delta}{\partial x_1}\left(\displaystyle\iint\cdots\int v(y)\exp.(-2i\pi x\,.\,y)dy\right) \\ \quad\;\; = \displaystyle\iint\cdots\int v(y)\,.\,2i\pi y_1 dy \end{cases}$$

ou

$$(24)\qquad V = 2i\pi y_1.$$

La 2e formule (22) donne alors, quelle que soit la distribution sphérique U $\left(\text{et en utilisant la formule } \frac{\partial\delta}{\partial x_1} * U = \frac{\partial U}{\partial x_1}\ (6)\right)$

$$(25)\qquad \mathcal{F}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right) = 2i\pi y_1 \mathcal{F}U,$$

formule qui généralise une formule classique dans la transformation de Fourier.

2e exemple. — Formule sommatoire de Poisson.

Partons de la distribution

$$(26)\qquad U = \sum_l \delta_l$$

Nous donnerons à cette formule la signification suivante : l est le point de X^n de coordonnées entières $l_1, l_2, \ldots l_n$; δ_l est la masse $+1$ placée en ce point. U est une mesure $\geqslant 0$, formée de masses $+1$ en tous les points de coordonnées entières. La série du 2e membre est convergente dans $(\mathcal{S}')_x$. On peut la transformer terme à terme, et on trouve ainsi

$$(27)\qquad V = \mathcal{F}U = \sum_l \exp.(-2i\pi l\,.\,y)$$

la somme du 2e membre étant nécessairement convergente dans $(\mathcal{S}')_y$.

On peut modifier cette expression. Supposons d'abord que v ait un support de diamètre < 1 (donc contenant au plus un point de coordonnées entières) ; soit $w(y)$ la fonction périodique, de période 1

(5) Rappelons que $\frac{\partial\delta}{\partial x_1}(\varphi) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0)$.

(6) A. G. 45, formule (21).

(par rapport à toutes les variables $y_1, y_2, \dots y_n$) obtenue à partir de v par prolongement périodique (w est la somme de toutes les translatées entières de u : $w(y) = \sum_l v(y-l)\Big)$.

D'après la notation (1), pour $v \in (\mathcal{S})_y$

$$(28) \quad \exp.(-2i\pi l.y)(v) = \int\int \cdots \int \exp.(-2i\pi l.y) v(y) dy$$

n'est autre que le l-ième coefficient de Fourier (au sens classique) de la fonction périodique $w(y)$; alors $V(v)$ est la somme de tous les coefficients de Fourier de $w(y)$; $w(y)$ est indéfiniment dérivable, sa série de Fourier est absolument convergente, et la somme des coefficients de Fourier vaut $w(0)$, qu'on peut écrire $\sum_l v(l)$, un seul des termes de cette somme pouvant être $\neq 0$ en vertu des hypothèses faites sur v.

$$(29) \qquad V(v) = \sum_l v(l) = \Big(\sum_l \delta_l\Big)(v).$$

Les 2 fonctionnelles V et $\sum_l \delta_l$ prennent la même valeur si v a un support de diamètre < 1 ; mais toute fonction $v \in (\mathcal{S})_y$ est une série convergente de fonctions dont les supports ont des diamètres < 1, de sorte que ces 2 fonctionnelles, toutes deux continues, prennent la même valeur quelle que soit v et sont donc égales. On a donc

$$(30) \qquad \mathcal{F}\Big(\sum_l \delta_l\Big) = \sum_l \delta_l.$$

Nous avons là un exemple simple d'une *mesure* dont la transformée de Fourier est une *mesure*. La formule de Parseval montre alors que, si $u \in (\mathcal{S})_x$ et $v \in (\mathcal{S})_y$ sont transformées de Fourier l'une de l'autre,

$$(31) \qquad \sum_l u(l) = \sum_l v(l).$$

C'est la formule sommatoire de Poisson. Elle est classique, et on peut naturellement l'étendre à des cas plus généraux [7] ; mais il est intéressant de l'interpréter comme une formule de Parseval.

[7] On ne connaît pas de conditions nécessaires et suffisantes générales que doive vérifier u pour que la formule de Poisson soit valable.

3^e exemple. — Prenons pour U une fonction $f(x)$ « à croissance lente à l'∞ » (condition (10)). Soit Ω un ensemble ouvert borné, f_Ω la fonction égale à f sur Ω, à 0 en dehors de Ω. Lorsque l'ouvert Ω est assez grand, f_Ω est aussi voisine qu'on veut de f dans $(\mathcal{S}')_x$ (8). Il résulte alors de la continuité de la transformation $\mathcal{F}$ que $\mathcal{F}f$ est la limite dans $(\mathcal{S}')_y$, de $\mathcal{F}f_\Omega$; mais $\mathcal{F}f_\Omega$ se calcule par l'intégrale de Fourier usuelle, de sorte qu'on peut écrire

$$(32) \qquad \mathcal{F}f = \lim_\Omega \int\int \cdots \int_\Omega f(x) \exp.(-2i\pi x \,.\, y) dx.$$

Contrairement à la conception classique des intégrales multiples, qui ne peuvent converger indépendamment de la forme des volumes Ω s'accroissant indéfiniment que si elles convergent absolument, l'intégrale ci-dessus converge alors que $\int\int \cdots \int |f(x)| dx = +\infty$; mais elle ne converge « numériquement » peut-être pour aucune valeur particulière de y, c'est une convergence dans l'espace des distributions sphériques $(\mathcal{S}')_y$.

4^e exemple. — Théorème de Paley-Wiener. — Un théorème classique de Paley-Wiener (9) dit que, pour qu'une fonction de carré sommable soit la transformée de Fourier d'une fonction de support compact, il faut et il suffit qu'elle soit analytiquement prolongeable pour les valeurs complexes des variables, en une fonction entière de type exponentiel (Une fonction $f(z_1, z_2, \ldots z_n)$ est dite analytique entière de type exponentiel s'il existe un nombre > 0, c, tel que l'on ait, quels que soient $z_1, z_2, \ldots z_n$, *complexes :*

$$(33) \qquad |f(z_1, z_2, \ldots z_n)| \leqslant \exp.\left[c(|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|)\right]).$$

On peut généraliser comme suit :

Pour qu'une distribution sphérique $V \in (\mathcal{S}')_y$ soit transformée de Fourier d'une distribution U à support compact, il faut et il suffit que V soit une fonction, prolongeable analytiquement pour les valeurs complexes des variables en une fonction entière de type

(8) Suivant la terminologie de N. Bourbaki (« Topologie générale », Paris, Hermann, 1940), f_Ω converge vers f suivant l'ordonné filtrant des ouverts bornés Ω. On peut si l'on veut considérer une suite croissante d'ouverts Ω_ν, qui finissent, pour ν assez grand, par contenir tout ensemble compact donné à l'avance, on a alors $f = \lim_\nu f_{\Omega_\nu}$ dans $(\mathcal{S}')_x$.

(9) Paley-Wiener : « Fourier Transforms in the Complex Domain. » Amer. Math. Soc. Colloquium. New-York, 1934. Théorème X, page 13.

exponentiel, et qu'elle soit pour les valeurs réelles des variables, « à croissance lente à l'∞ ».

Nous ne donnerons pas la démonstration, qui est un peu délicate.

§ 6. — Distributions de type $\geqslant 0$.

On dit qu'une fonction continue $f(x)$ (de n variables) est de type $\geqslant 0$ si, quels que soient les nombres complexes $z_1, z_2, \ldots z_l$ et les points $x_1, x_2, \ldots x_l$ (de l'espace R^n) on a

$$(34) \qquad \sum f(x_i - x_j) z_i \bar{z}_j \geqslant 0.$$

Appelons μ la mesure formée des masses z_i aux points x_i ; la formule (34) s'écrit

$$(35) \qquad \iint \cdots \int \iint \cdots \int f(x-y)\, d\mu_x\, d\bar{\mu}_y \geqslant 0.$$

On voit alors aisément que la formule (35) reste vraie si μ est une mesure quelconque à support compact. En particulier si μ est une fonction continue φ à support compact, (35) devient

$$(36) \qquad \iint \cdots \int \iint \cdots \int f(x-y)\varphi(x)\bar{\varphi}(y)\, dx\, dy \geqslant 0$$

et réciproquement on peut définir une fonction continue f de type $\geqslant 0$ en disant qu'elle est continue et qu'elle vérifie cette inégalité, pour toute fonction φ continue à support compact ou même simplement pour toute fonction $\varphi \in (\mathcal{D})$. Transformons (36) par le changement de variables $x - y = \xi$, $y = -\eta$:

$$(37) \qquad \iint \cdots \int f(\xi)\, d\xi \left(\iint \cdots \int \varphi(\xi - \eta)\bar{\varphi}(-\eta)\, d\eta \right) \geqslant 0.$$

Convenons d'appeler $\tilde{\varphi}(x)$ la fonction $\bar{\varphi}(-x)$, comme on le fait habituellement en analyse harmonique. La parenthèse est le produit de composition $\varphi * \tilde{\varphi}$; avec la notation fonctionnelle (1), (37) s'écrit

$$(38) \qquad f(\varphi * \tilde{\varphi}) \geqslant 0 \text{ quelle que soit } \varphi \in (\mathcal{D}).$$

Nous pouvons alors définir une *distribution de type* $\geqslant 0$ *comme une distribution* $T \in (\mathcal{D}')$ *vérifiant*

$$(39) \qquad T(\varphi * \tilde{\varphi}) \geqslant 0 \textit{ quelle que soit } \varphi \in (\mathcal{D}).$$

Si T est une fonction continue f, on démontre élémentairement que f est uniformément continue et bornée $\big(|f(x)| \leqslant f(0)\big)$; c'est donc une distribution sphérique. Plus généralement on démontre qu'une distribution de type $\geqslant 0$ est *nécessairement sphérique* et que (39) est alors vrai quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{S})$; appelons-la U et considérons-la comme $\in (\mathcal{S}')_x$. Etudions sa transformée de Fourier $V \in (\mathcal{S}')_y$. Si nous remplaçons φ par $u \in (\mathcal{S}_x)$, de transformée de Fourier $\mathcal{F}u = v$, on remarque que $\mathcal{F}\check{\bar{u}} = \bar{v}$. D'après la formule de Parseval qui a servi à la définition même de V, (39) entraîne

$$(40) \qquad V(v\bar{v}) \geqslant 0 \text{ quelle que soit } v \in (\mathcal{S})_y.$$

Peut-on en déduire que

$$(41) \qquad V(\psi) \geqslant 0 \text{ quelle que soit } \psi \geqslant 0,\ \in (\mathcal{S})_y \ ?$$

Certainement, et c'est immédiat dans le cas d'une seule variable ($n = 1$). Car $\psi \geqslant 0$ est de la forme $v\bar{v}$, avec $v = \pm\sqrt{\psi}$; comme $\psi \geqslant 0$, toutes ses racines sont multiples d'ordre pair, et $\pm\sqrt{\psi}$ est encore indéfiniment dérivable, si on choisit convenablement les signes. Mais pour plusieurs variables, une fonction $\psi \geqslant 0$ n'est pas en général de la forme $v\bar{v}$, v indéfiniment dérivable (exemple : à 3 variables, $\psi = x^2 + y^2 + z^2$; $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ n'est pas dérivable à l'origine).

Mais si ψ est à *support compact,* si ε est une constante $\geqslant 0$, ρ une fonction $\geqslant 0$ et $\in (\mathcal{D})$, identique à 1 sur le support de ψ, on a, dans $(\mathcal{D})$:

$$(42) \qquad \psi = \psi\rho^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} (\psi + \varepsilon)\rho^2.$$

Or $(\psi + \varepsilon)\rho^2 = v\bar{v}$, avec $v = \sqrt{\psi + \varepsilon}\,\rho$, qui est bien indéfiniment dérivable si $\psi \geqslant 0$. Alors de (40) on déduit

$$(43) \qquad V\big((\psi + \varepsilon)\rho^2\big) \geqslant 0,$$

d'où $V(\psi) \geqslant 0$ par passage à la limite ($\varepsilon \to 0$), si $\psi \geqslant 0$ est à support compact.

Comme les $\psi \geqslant 0$ à supports compacts sont denses dans le sous-espace des fonctions $\geqslant 0$, $\in (\mathcal{S})_y$, on en déduit bien (41).

Mais alors V est une distribution $\geqslant 0$, c'est-à-dire une mesure $\geqslant 0$, μ [10], qui vérifie d'ailleurs la condition (12), puisqu'elle est sphérique.

[10] A. G. 45, théorème de la page 66.

Réciproquement si $V = \mu$ est une mesure $\geqslant 0$ sphérique, elle vérifie (41), d'où (40) et par suite $T = \mathcal{F}\mu$ est sphérique et vérifie (39) ; elle est de type $\geqslant 0$.

Nous pouvons donc énoncer :

Théorème de Bochner généralisé. — Pour qu'une distribution soit de type $\geqslant 0$, *il faut et il suffit qu'elle soit sphérique et que sa transformée de Fourier soit une mesure* $\geqslant 0$ (*nécessairement sphérique donc vérifiant la condition* (12)).

On peut en déduire une foule de propriétés. Ainsi, Δ désignant le Laplacien, $\Delta\delta$ est de type $\leqslant 0$, car sa transformée de Fourier est $-4\pi^2 r^2$, fonction $\leqslant 0$. Si h est un entier $\geqslant 0$, $(-1)^h \Delta^h \delta$ est de type $\geqslant 0$. Si alors T est une distribution de type $\geqslant 0$,

$$(44) \qquad (-1)^h \Delta^h T = (-1)^h \Delta^h \delta * T$$

est encore de type $\geqslant 0$, car sa transformée de Fourier est $\geqslant 0$.

Si T est de type $\geqslant 0$, $T = \mathcal{F}\mu$, où μ vérifie la condition (12) ; mais alors $\mu = (1 + 4\pi^2 r^2)^k \nu$, où ν est une mesure $\geqslant 0$ *sommable*

$$\left(\iint \cdots \int d\nu < +\infty\right).$$

Alors, comme $\mathcal{F}(4\pi^2 r^2) = -\Delta\delta$,

$$(45) \qquad \mathcal{F}\mu = T = (\delta - \Delta\delta)^{*k} * \mathcal{F}\nu.$$

où $\mathcal{F}\nu$ est une fonction continue de type $\geqslant 0$ usuelle. Autrement dit :

Pour qu'une distribution soit de type $\geqslant 0$, *il faut et il suffit qu'elle soit le* $(1 - \Delta)^k$ (*k entier* $\geqslant 0$) *d'une fonction continue usuelle de type* $\geqslant 0$.

On calcule aisément la transformée de Fourier de la fonction r^α ($\alpha \geqslant 0$), ou $1/r^\alpha$ ($0 \leqslant \alpha < n$) ou de la pseudo-fonction $\overline{|1/r}$ ($\alpha \geqslant n$) [11].

$$(46) \qquad \mathcal{F}\,\overline{|r^m} = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}+m}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{m}{2}\right)} \overline{|r^{-(m+n)}}$$

(sauf si m ou $-(m+n)$ est un entier $\geqslant 0$ pair).

[11] Notation de M. Hadamard. Voir A. G. 45, formule (9).

Pour $0 > m > -n$, on voit que (le symbole $\overline{|}$ étant alors inutile) $\mathcal{F}r^m \geqslant 0$, on retrouve les fonctions classiques de type $\geqslant 0$ utilisées dans la théorie du potentiel. Pour les autres valeurs de m on en déduit de remarquables propriétés sur le « type » de $\overline{|}\,r^m$, que nous n'examinerons pas ici.

Nous avons pris l'étude des distributions de type $\geqslant 0$, comme un exemple de l'analyse harmonique en théorie des distributions. Nous n'en donnerons pas d'autre. Disons seulement qu'un des nombreux problèmes de l'analyse harmonique est la définition et la recherche du *spectre* d'une fonction ; *le spectre d'une distribution sphérique n'est autre, par définition, que le support de sa transformée de Fourier.* Nous étudierons dans un autre travail les propriétés du spectre ; pour une distribution $\neq 0$, il n'est jamais vide.

§ 7. — Équations aux dérivées partielles.

La transformation de Fourier se prête admirablement à l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. Une telle équation s'écrit en effet

$$DT = 0 \qquad \text{ou} \qquad D\delta * T = 0 \tag{47}$$

(où D est un « polynôme » à coefficients constants en $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}$, T une distribution inconnue).

Supposons $T = U$ sphérique. On peut effectuer une transformation de Fourier. $\mathcal{F}(D\delta)$ est un polynôme ordinaire H en $y_1, y_2, \ldots y_n$, si $V = \mathcal{F}U$, on est ramené à l'équation de type multiplicatif

$$HV = 0. \tag{48}$$

C'est là une équation d'un type tout nouveau, introduit par la théorie des distributions. Il est difficile de donner dans tous les cas l'expression générale des solutions V de (48), mais on peut toujours en donner un grand nombre de propriétés qui les caractérisent à peu près. V *a nécessairement son support sur la variété algébrique d'équation* $H(y_1, y_2, \ldots y_n) = 0$ [12]. Comme cette variété est de volume nul, V *n'est jamais une fonction, sauf si elle est nulle* ; c'est

[12] Cette condition nécessaire n'est pas suffisante. Ainsi, dans A. G. 45, en haut de la page 67 : $x\delta' = -\delta \neq 0$ bien que δ' ait son support à l'origine, donc sur la variété $x = 0$.

peut-être une mesure, généralement même c'est une distribution qui n'est pas une mesure. On voit ainsi comment la théorie des distributions est ici indispensable, puisqu'*aucune solution* non $\not\equiv 0$ U de (47) n'est transformée de Fourier d'une fonction. Nous bornerons notre étude à 3 exemples immédiats :

1er exemple :

$$(49) \qquad \Delta T - \omega^2 T = 0 \quad (\omega = \text{constante réelle} \neq 0)$$

$$(50) \qquad H = -4\pi^2 r^2 - \omega^2.$$

La variété $H = 0$ n'existe pas (dans le domaine réel).

L'équation (49) *n'a pas de solutions sphériques* ; à fortiori n'a-t-elle pas de solutions qui soient des fonctions bornées ou à croissance lente à l'∞. Cette circonstance se produira toutes les fois que la variété $H = 0$ n'a pas de point réel. Si au contraire cette variété a au moins un point réel a, la masse $+1$ au point a, δ_a, vérifie (48), et exp. $(+2i\pi a . x)$ est solution de (47). *Donc une équation telle que* (47) *qui n'a pas de solutions exponentielles imaginaires, n'a pas de solutions sphériques.* C'est un cas particulier d'une théorie spectrale des solutions des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants, étudiant l'approximation des solutions quelconques de l'équation par des combinaisons de ses solutions exponentielles ; un mémoire spécial ([13]) traite du cas des équations intégro-différentielles du type « Faltung » à 1 variable ; nous n'avons que des résultats incomplets pour plusieurs variables, nous en reparlerons ultérieurement.

2e exemple :

$$(51) \qquad \Delta T = 0$$

$$(52) \qquad H = -4\pi^2 r^2.$$

La variété $H = 0$ n'a qu'un point réel, l'origine. Les solutions de (48) sont des distributions ponctuelles, ayant leur support à l'origine ; leurs transformées de Fourier sont des polynômes. *L'équation de Laplace n'a d'autres solutions sphériques que les polynômes harmoniques usuels.* En particulier, une fonction harmonique bornée est une constante, nous redémontrons le théorème de Liouville. Cette conclusion subsistera toutes les fois que la variété $H = 0$ n'a d'autre

([13]) « Théorie générale des fonctions moyennes périodiques. » Annals of Mathematics, d'octobre 1947.

point réel que l'origine. Si cette variété a un nombre fini de points réels $a_1, a_2, \ldots a_l$, une solution bornée de (47) est une somme finie d'exponentielles imaginaires :

$$\Sigma c_j \exp.(2i\pi a_j . x). \tag{53}$$

3e exemple :

$$\Delta T + \omega^2 T = 0 \quad (\omega = \text{constante réelle} \neq 0) \tag{54}$$

$$H = -4\pi^2 r^2 + \omega^2. \tag{55}$$

La variété $H = 0$ est une sphère (Σ). Il existe une infinité de solutions sphériques de (54). Si $V = \mu$ est une mesure quelconque portée par la sphère Σ, $U = \iint \cdots \int_\Sigma \exp.(+2i\pi x . y) d\mu(y)$ est solution bornée de (54).

Il est ici très facile de donner la forme de toutes les solutions de (48), donc de toutes les solutions sphériques de (54). *Comme la variété* $H = 0$ *est à support compact, toute solution sphérique de* (54) *est, d'après le théorème de Paley-Wiener, une fonction analytique entière de type exponentiel.* On démontre d'ailleurs que toutes les distributions solutions de (49), (51) ou (54) sont des fonctions analytiques (équations aux dérivées partielles elliptiques).

Toutes les fois que la variété d'équation $H = 0$ (dans l'espace réel) est non compacte, il existe des solutions sphériques non analytiques, et même des solutions sphériques qui ne sont pas des fonctions.

Cette méthode est naturellement une généralisation de la méthode de « l'équation caractéristique » des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

(Parvenu aux Annales le 3 septembre 1947.)