Annales de l'université de Grenoble

G. Choquet

Convergences

Annales de l'université de Grenoble, tome 23 (1947-1948), p. 57-112
<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1947-1948__23__57_0>

CONVERGENCES

par G. **CHOQUET** (Grenoble).

INTRODUCTION

Le but de ce travail est l'étude des relations multivoques entre deux espaces topologiques.

Nous avons, dans une première partie, porté notre attention sur les relations semi-continues inférieurement ou supérieurement, et en particulier sur les relations d'équivalence semi-continues dans un espace topologique.

Nous avons dû pour cela étudier d'abord de façon précise les notions d'ensembles limite supérieure et limite inférieure d'une famille d'ensembles : la notion de filtre (1) s'est avérée pour cela l'outil naturel et indispensable.

Cette étude nous a conduit naturellement à définir une notion de convergence sur l'ensemble des sous-ensembles fermés d'un espace topologique. Cette notion de convergence — ou plutôt de « pseudo-convergence », — plus large que la notion de convergence topologique, semble s'introduire toutes les fois que l'on étudie des familles d'ensembles fermés ou d'applications définies sur des espaces topologiques : En particulier, la « pseudo-topologie » de l'espace des sous-ensembles fermés d'un espace de Hausdorff n'est une topologie que lorsque cet espace est localement compact.

Nous terminons ce mémoire par l'étude des rapports entre la convergence et la convergence uniforme locale, ou plus précisément entre les contingents et paratingents abstraits. Les théorèmes d'énoncé très

(1) Voir H. Cartan, *Comptes Rendus*, 205, 1937, pp. 595 et 777 ; et Bourbaki, *Topologie générale*, ch. I (Act. Sc. et Ind., Hermann, n° 858).

simple auxquels nous aboutissons (²) sont la généralisation et la géométrisation des résultats de Baire et des théorèmes mis par M. Denjoy à la base de la théorie topologique des fonctions de variable réelle. Nous indiquons diverses applications géométriques de ces théorèmes, mais l'œuvre de M. Denjoy (³) reste la meilleure illustration de la puissance de ces méthodes.

(²) Nous avions énoncé sans démonstration l'un de ces théorèmes dans notre thèse : Choquet, Application des propriétés descriptives de la fonction contingent, *J. de Math. pures et app.*, Paris, 1947.

(³) Voir en particulier Denjoy I.

PREMIÈRE PARTIE

1. — Relation entre deux ensembles.

Une relation multivoque R entre les éléments de deux ensembles X, Y est définie par la donnée d'un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de l'ensemble produit $X \times Y$.

Si $x \in X$ et $y \in Y$, on dira que $R(x, y)$ si $(x, y) \in \mathcal{E}$.

Pour tout $x \in X$, on désigne par $\mathcal{Y}(x)$ l'ensemble des éléments y de Y tels que $(x, y) \in \mathcal{E}$; plus généralement, pour tout ensemble $A \subset Y$, on posera $\mathcal{Y}(A) = \bigcup_{x \in A} \mathcal{Y}(x)$.

On note par $[x]$ l'ensemble des éléments (x, y) de $X \times Y$, et par $[A]$ l'ensemble $\bigcup_{x \in A} [x]$,

On définira de façon analogue $\mathcal{X}(y)$ et $\mathcal{X}(B)$, $[y]$ et $[B]$ pour $y \in Y$ et $B \subset Y$.

Pour tout $A \subset X$, on appelle « saturé de A », l'ensemble

$$S(A) = \mathcal{X}\big(\mathcal{Y}(A)\big).$$

En général $S\big(S(A)\big) \neq S(A)$.

On appelle relation complémentaire de R la relation $\complement R$ définie par l'ensemble $(X \times Y - \mathcal{E})$.

Pour deux relations R_1, R_2 définies respectivement par $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, on dit que $R_1 \subset R_2$ si $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$ (ceci se lit R_1 moins large ou plus fine que R_2).

Pour une famille $(R_i)_{i \in I}$ de relations définies par les ensembles $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$, on appelle relation réunion de la famille (resp. intersection), la relation définie par $\mathcal{E} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i$ $\left(\text{resp. } \mathcal{E} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i\right)$.

2. — Relation dans un ensemble.

Une relation R dans un ensemble E est définie par la donnée d'un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $E \times E$.

Exemples : Les relations d'ordre, les relations d'équivalence.

Si R_1 et R_2 sont deux relations d'équivalence dans E, définies par les ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, on dira encore que R_1 est moins large (ou plus fine) que R_2 si $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$. Ceci équivaut à dire que toute classe d'équivalence suivant R_2 est une réunion de classes d'équivalence suivant R_1.

L'ensemble des relations d'équivalence dans E est ordonné par cette relation.

Bornes inférieure et supérieure
d'une famille de relations d'équivalence.

Soit $(R_i)_{i \in I}$ une famille de relations d'équivalence dans E.

1) Cette famille possède une borne inférieure $R = \inf. (R_i)_{i \in I}$ ainsi définie :

On dira que $R(x_1, x_2)$ si $R_i(x_1, x_2)$ pour tout $i \in I$.

Cette borne inférieure est identique à la relation-intersection des R_i.

2) Cette famille possède une borne supérieure $R = \sup. (R_i)_{i \in I}$ ainsi définie :

On dira que $R(x_1, x_2)$ s'il existe une suite finie d'éléments $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ de E, avec $x_1 = \alpha_1$ et $x_2 = \alpha_{n+1}$, et une suite finie de relations $R_1, R_2, \ldots, R_n$ de la famille, telles que

$$R_k(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \text{ pour } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Cette borne supérieure n'est identique à la relation-réunion des R_i que lorsque cette dernière est une relation d'équivalence.

3. — Limite inférieure et limite supérieure d'une famille d'ensembles suivant un filtre.

Définition : Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles d'un espace topologique E et soit $\mathcal{F}$ un filtre sur I.

1) On dit qu'un point x de E est un point-limite supérieure de la

famille $(e_i)_{i \in I}$ suivant le filtre $\mathcal{F}$ si, pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de x et tout élément $a \in \mathcal{F}$, il existe un $i \in a$ tel que $\mathcal{V} \cap e_i \neq \emptyset$.

L'ensemble de tous les points-limite supérieure est dit *l'ensemble-limite supérieure* et se note par sup. $(e_i)_{\mathcal{F}}$.

2) On dit qu'un point x de E est un point-limite inférieure de la famille $\mathcal{F}(e_i)_{i \in I}$ suivant le filtre $\mathcal{F}$ si, pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de x, il existe un élément $a \in \mathcal{F}$ tel que, pour tout $i \in a$, on ait : $\mathcal{V} \cap e_i \neq \emptyset$.

L'ensemble de tous les points-limite inférieure est dit *l'ensemble-limite inférieure* et se note par inf. $(e_i)_{\mathcal{F}}$.

Calcul de sup. $(e_i)_{\mathcal{F}}$ *et de inf.* $(e_i)_{\mathcal{F}}$.

Pour tout sous-ensemble $a \subset I$, posons $\varepsilon_a = \bigcup_{i \in a} e_i$.

Désignons, d'autre part, par $\mathcal{G}$ la famille des sous-ensembles de I qui ne sont pas des complémentaires d'éléments de $\mathcal{F}$.

On a évidemment $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, et la condition $\mathcal{F} \equiv \mathcal{G}$ équivaut à dire que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre.

Nous dirons que $\mathcal{G}$ est la grille associée au filtre $\mathcal{F}$ (4).

Par exemple, si $\mathcal{F}$ désigne le filtre de Fréchet sur l'ensemble N des entiers, $\mathcal{G}$ sera la famille des sous-ensembles infinis de N ; si $\mathcal{F}$ désigne, dans un espace topologique I, le filtre des voisinages d'un point x, $\mathcal{G}$ sera la famille des sous-ensembles de I auxquels x est adhérent.

Nous allons établir les formules

$$(1) \quad \text{sup.}\,(e_i)_{\mathcal{F}} = \bigcap_{a \in \mathcal{F}} \overline{\varepsilon_a} \qquad \text{et} \qquad (2) \quad \text{inf.}\,(e_i)_{\mathcal{F}} = \bigcap_{a \in \mathcal{G}} \overline{\varepsilon_a}.$$

Formule (1). — Il suffit de remarquer ceci : Dire que $x \in$ sup. $(e_i)_{\mathcal{F}}$ équivaut à dire que $x \in \overline{\varepsilon_a}$ pour tout $a \in \mathcal{F}$.

Formule (2). — Soit $x \in$ inf. $(e_i)_{\mathcal{F}}$.

Pour tout $a \in \mathcal{G}$ et tout $b \in \mathcal{F}$, on a : $a \cap b \neq \emptyset$.

Donc pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de x, on a $\mathcal{V} \cap \varepsilon_a \neq \emptyset$.

Autrement dit, pour tout $a \in \mathcal{G}$, on a : $x \in \overline{\varepsilon_a}$,

d'où
$$\text{inf.}\,(e_i)_{\mathcal{F}} \subset \bigcap_{a \in \mathcal{G}} \overline{\varepsilon_a}.$$

Inversement, soit $x \in \bigcap_{a \in \mathcal{G}} \overline{\varepsilon_a}$, et soit $\mathcal{V}$ un voisinage de x. Soit a l'en-

(4) Pour l'étude de cette notion, voir Choquet, Sur les notions de filtre et de grille, *C. R. Acad. Sciences*, t. 224, 1947, pp. 171-173.

semble des i de I tels que $\mathcal{V} \cap e_i \neq \emptyset$. A cause du choix de x, on n'a pas $(\mathrm{I} - a) \in \mathcal{G}$. Donc $a \in \mathcal{F}$; on a donc bien $x \in \inf. (e_i)_{\mathcal{F}}$.

Propriétés de inf. $(e_i)_{\mathcal{F}}$ *et de sup.* $(e_i)_{\mathcal{F}}$.

a) Les formules (1) et (2) montrent que inf. $(e_i)_{\mathcal{F}}$ et sup. $(e_i)_{\mathcal{F}}$ sont des ensembles fermés.

D'autre part, comme $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, on a : inf. $(e_i)_{\mathcal{F}} \subset$ sup. $(e_i)_{\mathcal{F}}$.

Notons aussi que la relation $\bar{\varepsilon}_a = \overline{\left(\bigcup_{i \in a} e_i\right)} = \overline{\left(\bigcup_{i \in a} \bar{e}_i\right)}$ entraîne que

$$\inf. (e_i)_{\mathcal{F}} = \inf. (\bar{e}_i)_{\mathcal{F}} \qquad \text{et} \qquad \sup. (e_i)_{\mathcal{F}} = \sup. (\bar{e}_i)_{\mathcal{F}}.$$

b) Si $\mathcal{F}'$ est un filtre plus fin que $\mathcal{F}$, on a :

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \subset \mathcal{G}' \subset \mathcal{G},$$

d'où $$\inf. (e_i)_{\mathcal{F}} \subset \inf. (e_i)_{\mathcal{F}'} \subset \sup. (e_i)_{\mathcal{F}'} \subset \sup. (e_i)_{\mathcal{F}}.$$

c) Pour tout ultrafiltre $\mathcal{F}$, on a $\mathcal{F} \equiv \mathcal{G}$, d'où inf. $(e_i)_{\mathcal{F}} =$ sup. $(e_i)_{\mathcal{F}}$. Or pour tout filtre sur I il existe un ultrafiltre plus fin que lui. On obtient donc la généralisation suivante d'un théorème classique :

Pour toute famille $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *de sous-ensembles de* E, *et pour tout filtre* $\mathcal{F}$ *sur* I, *il existe un filtre* $\mathcal{F}'$ *plus fin que* $\mathcal{F}$ *et tel que :*

$$\inf. (e_i)_{\mathcal{F}'} = \sup. (e_i)_{\mathcal{F}'},$$

Notons ici que, si pour un filtre $\mathcal{F}'$ sur I, on a inf. $(e_i)_{\mathcal{F}'} =$ sup. $(e_i)_{\mathcal{F}'}$, la même égalité subsiste pour tout filtre $\mathcal{F}''$ plus fin que $\mathcal{F}'$. Ceci résulte des inclusions obtenues ci-dessus (en (*b*)).

En général le filtre intersection des filtres $\mathcal{F}'_{\mathrm{A}}$ plus fins que $\mathcal{F}$ et tels que inf. $(e_i)_{\mathcal{F}'} =$ sup. $(e_i)_{\mathcal{F}'} =$ un même ensemble A n'est pas un filtre $\mathcal{F}'_{\mathrm{A}}$. Mais ceci a lieu lorsque E est localement compact, à cause des relations que nous allons établir ci-dessous, en (*d*),

d) *Si* $(\mathcal{F}_\varphi)_{\varphi \in \Phi}$ *est une famille de filtres sur* I, *et si* $\mathcal{F}$ *désigne le filtre intersection :* $\mathcal{F} = \bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathcal{F}_\varphi$, *on a les relations :*

$$\inf. (e_i)_{\mathcal{F}} = \bigcap_{\varphi \in \Phi} \inf. (e_i)_{\mathcal{F}_\varphi}. \tag{3}$$

$$\sup. (e_i)_{\mathcal{F}} \supset \overline{\left(\bigcup_{\varphi \in \Phi} \sup. (e_i)_{\mathcal{F}_\varphi}\right)} \tag{4}$$

et cette inclusion (4) *devient une identité lorsque* E *est localement compact ou lorsque* Φ *est finie.*

Démonstration. Relation (3) : Remarquons que la grille $\mathcal{G}$ associée à $\mathcal{F}$ est la réunion des grilles $\mathcal{G}_\varphi$ associées aux $\mathcal{F}_\varphi$.

Or une propriété connue de l'opération intersection (5) nous montre que

$$\bigcap_{a \in \bigcup \mathcal{G}_{\mathcal{F}_\varphi}} \bar{\varepsilon}_a = \bigcap_{\varphi \in \Phi} \left(\bigcap_{a \in \mathcal{G}_{\mathcal{F}_\varphi}} \bar{\varepsilon}_a \right),$$

ce qui exprime le résultat annoncé.

Relation (4) : α) Comme $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\varphi$ pour tout $\varphi \in \Phi$, on a

$$\text{sup.}\,(e_i)_{\mathcal{F}} \supset \text{sup.}\,(e_i)_{\mathcal{F}_\varphi}.$$

Comme de plus sup. $(e_i)_{\mathcal{F}}$ est un ensemble fermé, on a la formule annoncée.

β) Si E est localement compact, pour tout $x \in \complement\, \text{sup.}\,(e_i)_{\mathcal{F}_\varphi}$ et pour tout voisinage compact $\mathcal{V}$ de x disjoint de sup. $(e_i)_{\mathcal{F}_\varphi}$, il existe un élément $a_\varphi \in \mathcal{F}_\varphi$ tel que $\mathcal{V} \cap \bar{\varepsilon}_{a_\varphi} = \emptyset$.

Si, en particulier, $x \in \complement\, \overline{\left(\bigcup_{\varphi \in \Phi} \text{sup.}\,(e_i)_{\mathcal{F}_\varphi} \right)}$ et si $\mathcal{V}$ est un voisinage compact de x disjoint de $\overline{\left(\bigcup_{\varphi \in \Phi} \text{sup.}\,(e_i)_{\mathcal{F}_\varphi} \right)}$, on a

$$\mathcal{V} \cap \left(\bigcup_{\varphi \in \Phi} \bar{\varepsilon}_{a_\varphi} \right) = \emptyset.$$

Donc
$$\mathring{\mathcal{V}} \cap \overline{\left(\bigcup_{\varphi \in \Phi} \varepsilon_{a_\varphi} \right)} = \emptyset.$$

Si l'on pose $a = \bigcup_{\varphi \in \Phi} a_\varphi$, cette égalité devient $\mathring{\mathcal{V}} \cap \bar{\varepsilon}_a = \emptyset$. Or $a \in \mathcal{F}$. Donc le point x n'est pas un point-limite supérieure de la famille $(e_i)_{i \in \mathcal{F}}$ suivant $\mathcal{F}$. On a donc bien :

$$\text{sup.}\,(e_i)_{\mathcal{F}} = \overline{\left(\bigcup_{\varphi \in \Phi} \text{sup.}\,(e_i)_{\mathcal{F}_\varphi} \right)}. \tag{5}$$

On peut montrer par un exemple que cette identité ne serait pas vérifiée si dans le second membre on enlevait le signe de fermeture, même pour E métrique compact.

(5) Voir Bourbaki, Fasc. Res, Act. Sc. Hermann, 846, page 25, formule 41.

γ) Lorsque Φ est finie, cette identité résulte aisément de ce que l'intersection d'un nombre fini d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.

Remarque : L'identité (5) peut être fausse lorsque E n'est pas localement compact. On en construira aisément un exemple dans l'espace E obtenu comme réunion d'un disque ouvert et d'un point de sa circonférence.

e) Pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur I *et pour tout* $x \in \sup.(e_i)_{\mathcal{F}}$, *il existe des filtres $\mathcal{F}'$ plus fins que $\mathcal{F}$ pour lesquels on a*

$$x \in \inf.(e_i)_{\mathcal{F}'}.$$

L'intersection $\mathcal{F}_x$ de ces filtres $\mathcal{F}'$ est encore un filtre $\mathcal{F}'$, et tout filtre plus fin que $\mathcal{F}_x$ est un filtre $\mathcal{F}'$.

Démonstration : Pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de x, et tout $a \in \mathcal{F}$, désignons par $a_{\mathcal{V}}$ l'ensemble des indices i tels que

$$\mathcal{V} \cap e_i \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad i \in a.$$

Soit $\mathcal{B}_x$ la famille de ces $a_{\mathcal{V}}$; $\mathcal{B}_x$ est une base de filtre car, d'une part

$$a_{1\mathcal{V}_1} \cap a_{2\mathcal{V}_2} \supset (a_1 \cap a_2)_{\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2},$$

d'autre part $a_{\mathcal{V}} \neq 0$ puisque $a \in \sup.(e_i)_{\mathcal{F}}$.

Soit $\mathcal{F}_x$ le filtre de base $\mathcal{B}_x$. Il est évidemment plus fin que $\mathcal{F}$, et par construction on a : $x \in \inf.(e_i)_{\mathcal{F}_x}$.

Il résulte de la définition de $\mathcal{F}_x$ que c'est le moins fin de tous les filtres $\mathcal{F}'$ tels que $x \in \inf.(e_i)_{\mathcal{F}'}$; d'autre part il résulte des inclusions de (b) que cette relation a lieu pour tout filtre plus fin que $\mathcal{F}_x$.

Remarque : Si x possède une base dénombrable de voisinages et si $\mathcal{F}$ possède une base dénombrable, $\mathcal{F}_x$ possède aussi une base dénombrable $\mathcal{B}_x$. Il existe donc un filtre élémentaire $\mathcal{F}'$ plus fin que $\mathcal{F}_x$, donc plus fin aussi que $\mathcal{F}$, et tel que

$$x \in \inf.(e_i)_{\mathcal{F}'}.$$

f) Corollaire de résultats précédents :

Pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur I, *si $(\mathcal{F}_j)_{j \in J}$ désigne, soit la famille des filtres plus fins que $\mathcal{F}$, soit la famille des ultrafiltres plus fins que $\mathcal{F}$, on a :*

$$\sup.(e_i)_{\mathcal{F}} = \bigcup_{j \in J} (\inf.\, e_i)_{\mathcal{F}_j} \qquad \text{et} \qquad \inf.(e_i)_{\mathcal{F}} = \bigcap_{j \in J} \sup.(e_i)_{\mathcal{F}_j}.$$

La première de ces formules résulte immédiatement du résultat énoncé en (e).

La seconde formule résulte de la formule (2), en remarquant que la grille associée à $\mathcal{F}$ est la réunion à la fois des filtres plus fins que

$\mathcal{F}$ et des ultrafiltres plus fins que $\mathcal{F}$. Elle peut encore se traduire ainsi : Pour tout $x \notin \inf.\,(e_i)_{\mathcal{F}}$, il existe des filtres $\mathcal{F}'$ plus fins que $\mathcal{F}$ et tels que $x \notin \sup.\,(e_i)_{\mathcal{F}'}$; pour x donné, le filtre intersection de ces filtres $\mathcal{F}'$ n'est d'ailleurs pas en général un filtre $\mathcal{F}'$, même lorsque E est compact.

Étude du cas où E *est compact ou localement compact.*

Soit $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille de sous-ensembles d'un espace E localement compact, et soit $\mathcal{F}$ un filtre sur I.

a) Pour tout compact $\mathrm{K} \subset \complement \sup.\,(e_i)_{\mathcal{F}}$, *il existe un élément* $a \in \mathcal{F}$ *tel que* $\overline{\varepsilon_a} \subset (\mathrm{E} - \mathrm{K})$.

En effet, pour tout $m \in \mathrm{K}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de m et un $a_{\mathcal{V}} \in \mathcal{F}$ tels que : $\overline{\varepsilon_{a_{\mathcal{V}}}} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Il existe un nombre fini de tels voisinages $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_n$ qui recouvrent K. Il suffit de prendre $a = \bigcap\limits_{i=1,2,\ldots,n} a_{\mathcal{V}_i}$.

Application : Généralisation d'un théorème de Janiszewski :

Soient E un espace compact et $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille de sous-ensembles de E. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur I.

La condition nécessaire et suffisante pour que $\sup.\,(e_i)_{\mathcal{F}}$ *soit connexe est que, pour tout entourage* δ *de la structure uniforme de* E, *il existe un* $a \in \mathcal{F}$ *tel que le défaut d'enchaînement de* $\overline{\varepsilon_a}$ *soit petit d'ordre* δ (6).

b) Pour tout recouvrement ouvert fini de $\inf.\,(e_i)_{\mathcal{F}}$ *par des ouverts* ω_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *tels que* $\omega_k \cap \inf.\,(e_i)_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ *pour tout* k, *il existe un élément* $a \in \mathcal{F}$ *tel que, pour tout* $i \in a$ *et tout* k, *on ait :* $e_i \subset \omega_k \neq \emptyset$.

Ceci résulte immédiatement de la définition de $\inf.\,(e_i)_{\mathcal{F}}$.

c) Pour que l'ensemble fermé $e \subset \mathrm{E}$ *soit tel que*

$$e = \inf.\,(e_i)_{\mathcal{F}} = \sup.\,(e_i)_{\mathcal{F}} ,$$

il faut et il suffit que, pour tout recouvrement ouvert fini de e *par des*

(6) C'est-à-dire que, pour tout couple de points de ε_a, on peut passer de l'un à l'autre par une chaîne finie de points telle que deux quelconques consécutifs de ces points soient voisins d'ordre δ. Lorsque E est métrique, le défaut d'enchaînement de $\overline{\varepsilon_a}$ peut être caractérisé par un nombre.

ouverts ω_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *tels que* $\left(E - \bigcup_k \omega_k\right)$ *soit compact et que* $(e \cap \omega_k) \neq \emptyset$ *pour tout* k, *il existe un élément* $a \in \mathcal{F}$ *tel que :*

1) $$\overline{\varepsilon_a} \subset \bigcup_k \omega_k.$$

2) *Pour tout* $i \in a$ *et tout* k, $e_i \cap \omega_k \neq \emptyset$.

Démonstration : Il résulte des résultats ci-dessus $\big((a)$ et $(b)\big)$ que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante.

1) On a $\sup.(e_i)_{\mathcal{F}} \subset e$.

En effet, soit $m \in \left(E - \sup.(e_i)_{\mathcal{F}}\right)$. Si $\mathcal{V}$ est un voisinage compact de m tel que $\mathcal{V} \cap e = \emptyset$, l'ouvert $\omega = (E - \mathcal{V})$ recouvre e.

Ce recouvrement satisfait aux conditions du théorème. Donc il existe $a \in \mathcal{F}$ tel que :

$$\mathcal{V} \cap \overline{\varepsilon_a} = \emptyset, \qquad \text{d'où} \qquad m \notin \sup.(e_i)_{\mathcal{F}}.$$

2) On a $e \subset \inf.(e_i)_{\mathcal{F}}$.

En effet, soit $m \in e$, et soit ω_1 un voisinage ouvert de m. Posons $\omega_2 = E$. Le recouvrement ouvert (ω_1, ω_2) de e satisfait aux conditions du théorème. Donc il existe $a \in \mathcal{F}$ tel que, pour tout $i \in a$, on ait $e_i \cap \omega_1 \neq \emptyset$. D'où $m \in \inf.(e_i)_{\mathcal{F}}$.

En résumé, on a : $\sup.(e_i)_{\mathcal{F}} \subset e \subset \inf.(e_i)_{\mathcal{F}}$, d'où l'identité cherchée.

Remarque. — Lorsque E est compact, la condition de l'énoncé devient :

Pour toute famille finie d'ouverts (ω_k) *tels que :*

$$e \subset \bigcup_k \omega_k \quad \textit{et} \quad e \cap \omega_k \neq \emptyset \textit{ pour tout } k,$$

il existe $a \in \mathcal{F}$, *tel que, ..., etc.*

4. — Relations entre deux espaces topologiques.

Définition 1. — *On dit que la relation* R *entre les espaces topologiques* X *et* Y *est* fermée (*resp. ouverte*) *si l'ensemble* $\mathcal{E}$ *qui la définit est* fermé (*resp. ouvert*) *dans* $X \times Y$.

Toute relation fermée a pour complémentaire une relation ouverte.

Conséquences.

1) Soit R fermée. Pour tout ensemble fermé $A \subset X$, $[A]$ est fermé dans $X \times Y$; or $\mathcal{Y}(A)$ est la projection de l'ensemble fermé $\mathcal{E} \cap [A]$; donc $\mathcal{Y}(A)$ est fermé si X est compact.

Pour tout ouvert $A \subset X$, $[A]$ est ouvert ; $\mathcal{Y}(A)$ est la projection de l'ensemble $\mathcal{E} \cap [A]$ qui est fermé au voisinage de chacun de ses points. Donc, si X et Y sont des espaces localement compacts à base dénombrable, $\mathcal{Y}(A)$ est un F_σ, réunion dénombrable de compacts.

2) Soit R ouverte. Pour tout fermé $A \subset X$, l'ensemble $\mathcal{E} \cap [A]$ est ermé au voisinage de chacun de ses points ; mêmes conclusions que ci-dessus.

Pour tout ouvert $A \subset X$, $\mathcal{Y}(A)$ est ouvert.

3) Pour tout ouvert $A \subset X$, si R est ouverte, le saturé S(A) de A est ouvert.

Pour tout fermé $A \subset X$, si X et Y sont compacts et R fermée, S(A) est fermé.

Formes équivalentes à la définition 1.

1) *Pour qu'une relation* R *soit ouverte, il faut et il suffit que pour tout* $x \in X$ *et pour tout* $y \in \mathcal{Y}(x)$, *il existe un voisinage* $\mathcal{V}_x$ *de* x *et un voisinage* $\mathcal{V}_y$ *de* y *tels que, pour tout* $x' \in \mathcal{V}_x$, *on ait* $\mathcal{V}_y \subset \mathcal{Y}(x')$.

Cette condition ne fait que traduire le fait que $\mathcal{E}$ est ouvert.

Définition 2. — *On dit que la relation* R *entre* X *et* Y *est semi-continue supérieurement sur* X *au point* $x \in X$ *si, pour tout* $y \in \complement\, \mathcal{Y}(x)$, *il existe un voisinage* $\mathcal{V}_x$ *de* x *et un voisinage* $\mathcal{V}_y$ *de* y *tels que, pour tout* $x' \in \mathcal{V}_x$, *avec* $x' \neq x$, *on ait :* $\mathcal{V}_y \cap \mathcal{Y}(x') = \emptyset$.

Il est immédiat que ceci équivaut à dire que

$$\mathcal{Y}(x) \supset \sup.\, \mathcal{Y}(x')_{\mathcal{F}'}$$

où $\mathcal{F}'$ désigne le filtre des voisinages de x diminués du point x (si x est isolé, par définition le second membre sera $\equiv \emptyset$).

Lorsque $\mathcal{Y}(x)$ est fermé, cette condition peut s'écrire :

$$\mathcal{Y}(x) = \sup.\, \mathcal{Y}(x')_{\mathcal{F}}$$

où $\mathcal{F}$ désigne le filtre des voisinages de x.

Théorème 1. — *Pour qu'une relation* R *soit fermée, il faut et il suffit que pour tout* $x \in X$ *la relation* R *soit semi-continue supérieurement sur* X, *et que* $\mathcal{Y}(x)$ *soit fermé.*

En effet, si R est fermée, $\mathcal{Y}(x)$ est fermé pour tout $x \in X$. D'autre part, pour $(x, y) \in \complement \mathcal{E}$, il existe un voisinage élémentaire de (x, y) disjoint de $\mathcal{E}$; ceci traduit la définition de la semi-continuité supérieure.

Si au point $x \in X$, la relation R est semi-continue supérieurement, et si $\mathcal{Y}(x)$ est fermé, la définition 2 montre que si $(x, y) \in \complement \mathcal{E}$, il existe un voisinage élémentaire de (x, y) disjoint de $\mathcal{E}$. Ceci étant vrai pour tout $x \in X$, l'ensemble $\complement \mathcal{E}$ est ouvert, donc $\mathcal{E}$ est fermé.

Conséquence : Si pour tout x la relation R est semi-continue supérieurement sur X et si $\mathcal{Y}(x)$ est fermé, cette relation est aussi semi-continue supérieurement sur Y en tout point y et $\mathcal{X}(y)$ est fermé.

Propriétés des relations semi-continues supérieurement.

a) Si R est semi-continue supérieurement sur X au point $x_0 \in X$, il en est de même de la relation R′ définie par $\mathcal{Y}'(x) = \overline{\mathcal{Y}(x)}$. Cette relation R′ est fermée et associée à l'ensemble $\mathcal{E}' = \overline{\mathcal{E}}$.

b) Soit $(R_i)_{i \in I}$ une famille de relations entre X et Y, définies par la famille d'ensembles $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ et semi-continues supérieurement sur X au point $x_0 \in X$.

La relation intersection R_I, définie par $\mathcal{E}_I = \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$, ou encore par $\mathcal{Y}_I(x) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{Y}_i(x)$ est semi-continue supérieurement sur X en x_0.

Démonstration : Si x_0 est isolé, cet énoncé est trivial. Sinon on est ramené à montrer que $\sup. \mathcal{Y}_I(x)_{\mathcal{F}'_0} \subset \mathcal{Y}_I(x_0)$, $\mathcal{F}'_0$ désignant le filtre des voisinages de x_0, diminués du point x_0.

Or $\mathcal{Y}_I(x) \subset \mathcal{Y}_i(x)$, d'où $\sup. \mathcal{Y}_I(x)_{\mathcal{F}'_0} \subset \bigcap_i \sup. \mathcal{Y}_i(x)_{\mathcal{F}'_0}$.

De plus : $\sup. \mathcal{Y}_i(x)_{\mathcal{F}'_0} \subset \mathcal{Y}_i(x_0)$, d'où $\bigcap_{i \in I} \sup. \mathcal{Y}_i(x)_{\mathcal{F}'_0} \subset \mathcal{Y}_I(x_0)$.

D'où la relation cherchée.

Si les R_i sont fermées, la relation R_I est évidemment fermée : Cette remarque généralise cette propriété connue, que l'intersection de deux ensembles fermés cartésiens est semi-continue supérieurement lorsque ces ensembles varient continuement ou de façon semi-continue supérieurement.

c) THÉORÈME 2. — *Soit* R *une relation entre* X *et* Y, *qui soit semi-continue supérieurement en tout point de* X.

Si Y *est compact, si* X *est connexe et si pour tout* $x \in X$ *l'ensemble*

$\mathcal{Y}(x)$ *est connexe* (*et* $\neq \emptyset$), *alors les ensembles* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{Y}(x)$ *sont connexes*.

Démonstration : Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\mathcal{E} \cap [x]$ est connexe. Donc si $\mathcal{E}$ n'est pas connexe, il existe une partition de $\mathcal{E}$ en deux ensembles $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ ouverts dans $\mathcal{E}$ tels que si X_1, X_2 désignent respectivement les projections de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ dans X, on ait :

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset\,; \qquad X_1 \cup X_2 = X\,; \qquad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \cap [X_1]\,; \qquad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E} \cap [X_2].$$

On montre aisément que X_1 et X_2 sont ouverts dans X, ce qui est en contradiction avec le fait que X est connexe.

Donc $\mathcal{E}$ est connexe. Il en est de même de sa projection $\mathcal{Y}(X)$ dans Y.

Corollaire. — *Si* R *est fermée, si* X *et* Y *sont compacts, et si* X *est connexe ainsi que tout* $\mathcal{Y}(x)$ (*pour* $x \in X$), *alors les ensembles* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{Y}(X)$ *sont des continus*.

a) Cas de Y compact. Si Y est un espace compact, et si la relation R est fermée, pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de $\mathcal{Y}(x)$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_x$ de x tel que

$$\mathcal{Y}(\mathcal{V}_{(x)}) \subset \mathcal{V}.$$

Exemples généraux de relations semi-continues supérieurement.

A toute relation R entre X et Y, on peut associer trois relations intéressantes semi-continues supérieurement sur X.

1) La relation R_1 définie par $\mathcal{E}_1 = \overline{\mathcal{E}}$; c'est l'intersection des relations fermées plus larges que R ; on peut encore la définir par :

$$\mathcal{Y}_1(x) = \sup.\, \mathcal{Y}(x')_{\mathcal{F}} = \sup.\, \overline{\mathcal{Y}(x')_{\mathcal{F}}}\ ,$$

$\mathcal{F}$ désignant le filtre des voisinages de x.

C'est là une relation très souvent utilisée.

2) La relation R_2 définie par :

$$\mathcal{E}_2 = \bigcup_{x \in X} \overline{(\mathcal{E} - \mathcal{Y}(x))}.$$

Cette relation est fermée et peut encore se définir par :

$$\mathcal{Y}_2(x) = \sup.\, \mathcal{Y}(x')_{\mathcal{F}'} = \sup.\, \overline{\mathcal{Y}(x')_{\mathcal{F}'}}\ ,$$

$\mathcal{F}'$ désignant le filtre des voisinages de x diminués du point x (lorsque x est isolé, on pose $\mathcal{Y}_2(x) = \emptyset$).

3) La relation R_3 définie comme intersection des relations semi-continues supérieurement sur X et plus larges que R.

La relation R_3 peut être définie aussi par $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E} \cup \mathcal{E}_2$ ou par $\mathcal{Y}_3(x) = \mathcal{Y}(x) \cup \sup. \mathcal{Y}(x')_{\mathcal{F}}$.

Semi-continuité supérieure au sens fort.

Il existe, à côté de la semi-continuité supérieure que nous venons d'étudier, un autre type de semi-continuité supérieure d'ailleurs moins intéressant, et que nous signalons ici surtout parce qu'il s'introduit de façon analogue à la semi-continuité inférieure dont nous parlerons plus loin.

DÉFINITION 1 BIS. — *On dit que la relation* R *entre* X *et* Y *est* mi-fermée *suivant* X *si, pour tout ensemble fermé* $B \subset Y$, *l'ensemble* $\mathcal{X}(B)$ *est fermé dans* X.

DÉFINITION 2 BIS. — *On dit que la relation* R *entre* X *et* Y *est semi-continue supérieurement au sens fort au point* $x_0 \in X$ *si, pour tout voisinage* $\mathcal{V}$ *de* $\mathcal{Y}(x_0)$ *dans* Y, *il existe un voisinage* $\mathcal{V}_{x_0}$ *de* x_0 *tel que* $\mathcal{Y}(\mathcal{V}_{x_0}) \subset \mathcal{V}$.

On montre aisément que, pour que R soit mi-fermée suivant X, il faut et il suffit qu'elle soit semi-continue supérieurement au sens fort en tout point de X.

Si Y est un espace normal, et si $\mathcal{Y}(x_0)$ est un ensemble fermé, la semi-continuité supérieure forte en x_0 entraîne la semi-continuité supérieure ordinaire.

Si Y est un espace compact, la semi-continuité supérieure ordinaire en x_0 entraîne la semi-continuité forte.

Donc si Y est compact et si $\mathcal{Y}(x_0)$ est un ensemble fermé, ces deux semi-continuités sont identiques au point x_0.

On peut souligner le peu d'intérêt de la semi-continuité supérieure forte par le résultat suivant, qui montre combien cette semi-continuité est restrictive.

THÉORÈME 3. — *Lorsque* X *et* Y *sont des espaces métrisables, si* R *est semi-continue supérieurement au sens fort au point* $x_0 \in X$, *il existe un sous-ensemble compact* $K \subset \mathcal{Y}(x_0)$ *tel que, pour tout voisinage* $\mathcal{V}$ *de* K *dans* Y, *il existe un voisinage* $\mathcal{V}_{x_0}$ *de* x_0 *tel que* :

$$\mathcal{Y}(\mathcal{V}_{x_0}) \subset (\mathcal{V} \cup \mathcal{Y}_{(x_0)}).$$

Donc, si l'on néglige ce qui se passe au voisinage du sous-ensemble compact K de $\mathcal{Y}(x_0)$, — sous-ensemble en général non-dense sur $\mathcal{Y}(x_0)$ —, on voit qu'en gros on a $\mathcal{Y}(x) \subset \mathcal{Y}(x_0)$ dès que x est assez voisin de x_0 (cette inclusion est d'ailleurs vérifiée effectivement lorsque $\mathcal{Y}(x_0)$ est ouvert).

Relations semi-continues inférieurement.

Définition 3. — *On dit que la relation* R *entre* X *et* Y *est* mi-ouverte *suivant* X *si, pour tout ensemble ouvert* $B \subset Y$, *l'ensemble* $\mathcal{X}(B)$ *est ouvert dans* X.

Définition 4. — *On dit que* R *est semi-continue inférieurement sur* X *au point* $x_0 \in X$ *si, pour tout* $y \in \mathcal{Y}(x_0)$, *et pour tout voisinage* $\mathcal{V}_y$ *de* y, *il existe un voisinage* $\mathcal{V}_{x_0}$ *de* x_0 *tel que, pour tout* $x' \in \mathcal{V}_{x_0}$ *on ait :* $\mathcal{V}_y \cap \mathcal{Y}(x') \neq \emptyset$.

Ceci équivaut d'ailleurs à dire que $\mathcal{Y}(x_0) \subset \inf. \mathcal{Y}(x')_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{F}$ *désignant le filtre des voisinages de* x_0.

Il est immédiat que *pour que* R *soit mi-ouverte suivant* X, *il faut et il suffit que* R *soit semi-continue inférieurement en tout point de* X.

Propriétés des relations semi-continues inférieurement.

a) Si R est semi-continue inférieurement sur X au point $x_0 \in X$, il en est de même de la relation R' définie par $\mathcal{Y}'(x) = \overline{\mathcal{Y}(x)}$.

b) Soit $(R_i)_{i \in I}$ une famille de relations entre X et Y, définies par la famille d'ensembles $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$, et semi-continues inférieurement sur X au point $x_0 \in X$.

La relation réunion R_I, définie par $\mathcal{E}_I = \bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i$ ou encore par $\mathcal{Y}_I(x) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{Y}_i(x)$ est semi-continue inférieurement sur X au point $x_0 \in X$. Ceci résulte de la formule :

$$\bigcup_{i \in I} \inf. \mathcal{Y}_i(x')_{\mathcal{F}} \subset \inf. \Big(\bigcup_{i \in I} \mathcal{Y}_i(x')\Big)_{\mathcal{F}} .$$

En particulier, si les R_i sont mi-ouvertes, R_I est aussi mi-ouverte.

c) Soient $R_{X,Y}$ une relation entre X et Y ; $R_{Y,Z}$ une relation entre Y et Z ; et $R_{X,Z}$ la relation composée de $R_{X,Y}$ et $R_{Y,Z}$.

Si $R_{X,Y}$ est mi-ouverte suivant X, et $R_{Y,Z}$ mi-ouverte suivant Y, la relation $R_{X,Z}$ est mi-ouverte suivant X : ceci résulte immédiatement de la définition 3.

Exemples de relations mi-ouvertes.

1) Toute relation R ouverte est mi-ouverte.

2) Toute relation R définie par un ensemble $\mathcal{E}$ tel que, pour tout $y \in Y$, l'ensemble $\mathcal{E} \cap [y]$ soit ouvert sur $[y]$, est mi-ouverte.

3) Si R est une relation quelconque entre X et Y, parmi toutes les relations mi-ouvertes moins larges que R, il en existe une plus large que toutes les autres, à savoir leur réunion (propriété (*b*) ci-dessus). Cette relation R_N sera dite le *noyau* de R.

Il est immédiat que $\mathcal{Y}_N(x)$ est fermé dans $\mathcal{Y}(x)$; en particulier, si $\mathcal{Y}(x)$ est un ensemble fermé, $\mathcal{Y}_N(x)$ est aussi un ensemble fermé.

Remarque 1 : Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'applications continues de X dans Y. Chacune de ces applications engendre une relation mi-ouverte R_i entre X et Y, définie par $\mathcal{Y}_i(x) = \{f_i(x)\}$.

La relation R réunion des R_i est mi-ouverte. L'étude de certains cas simples pourrait faire croire qu'inversement toute relation mi-ouverte R est de cette forme. Mais il n'en est rien, même dans le cas où X, Y sont deux segments de droite et où tout $\mathcal{Y}(x)$ est un ensemble fermé ; il n'existe même en général aucune application continue $f(x)$ de X dans Y telle que $f(x) \in \mathcal{Y}(x)$ pour tout $x \in X$.

Remarque 2 : Nous avons fait remarquer plus haut que, pour toute relation R entre X et Y, la relation R_1 définie par

$$\mathcal{Y}_1(x) = \sup.\, \mathcal{Y}(x')_{\mathcal{F}}$$

était une relation semi-continue supérieurement (et même fermée) sur X.

Par contre il est inexact en général que la relation R′ définie par : $\mathcal{Y}'(x) = \inf.\, \mathcal{Y}(x')_{\mathcal{F}}$ soit semi-continue inférieurement sur X.

Remarque 3 : La semi-continuité supérieure n'est pas une notion duale de la semi-continuité inférieure. Cette dualité n'a lieu en fait qu'entre les relations fermées et ouvertes, qui ne sont qu'un cas particulier des relations semi-continues.

Relations particulières.

Supposons que, pour tout $x \in X$, $\mathcal{Y}(x)$ contienne un élément et un seul. $\mathcal{Y}(x)$ définit donc une application de X dans Y.

1) Dans le cas général la continuité de $\mathcal{Y}(x)$ ne résulte pas de ce que $\mathcal{E}$ soit fermé [7].

Par contre si Y est compact et si $\mathcal{E}$ est fermé, on a vu (§ 4, au début) que, pour tout fermé $B \subset Y$, l'ensemble $\mathcal{X}(B)$ est fermé dans X. Donc l'application $\mathcal{Y}(x)$ est alors continue.

Inversement, si $\mathcal{Y}(x)$ est une application continue de X dans Y, on sait qu'on ne peut affirmer que l'ensemble représentatif $\mathcal{E}$ de $\mathcal{Y}(x)$ est fermé dans $(X \times Y)$ que si Y est séparé.

Conséquence : Si Y est compact, la condition nécessaire et suffisante pour que l'application $\mathcal{Y}(x)$ de X dans Y soit continue, est que l'ensemble représentatif $\mathcal{E}$ de cette application soit fermé dans $X \times Y$.

2) Supposons maintenant $\mathcal{E}$ fermé, mais X, Y quelconques.

La relation R suivante dans X :

$$R(x_1, x_2) \quad \text{si} \quad \mathcal{Y}(x_1) = \mathcal{Y}(x_2),$$

est une relation d'équivalence. Toute classe d'équivalence $\mathcal{X}(y)$ (où $y \in \mathcal{Y}(X)$) est un sous-ensemble fermé de X.

Soit g l'application canonique biunivoque de X/R sur $\mathcal{Y}(X)$.

En général, ni g, ni g^{-1} ne sont continues [8] ; les espaces X/R et $\mathcal{Y}(X)$ n'ont donc pas en général de topologies comparables.

Par contre, si X est compact, $\mathcal{Y}(A)$ est fermé pour tout fermé $A \subset X$; ceci est vrai en particulier pour tout A fermé saturé pour la relation R. Donc g^{-1} est continue ; si Y est compact, $\mathcal{X}(B)$ est fermé pour tout fermé $B \subset Y$; donc g est continue.

Donc si X et Y sont compacts, g est une homéomorphie entre les espaces E/R et $\mathcal{Y}(X)$, qui sont d'ailleurs compacts puisque $\mathcal{Y}(X)$ est l'image continue d'un compact.

Définition générale d'une relation d'équivalence fermée dans un espace topologique.

Définition 5. — *On dit que la relation d'équivalence* R *dans l'espace* E *est fermée si, dans* $E \times E$, *l'ensemble* $\mathcal{E}$ *qui définit* R *est fermé.*

Cette définition entraîne que toute classe d'équivalence suivant R est un ensemble fermé.

(7) Par exemple, soit X le segment (0 — 1), Y la demi-droite $y > 0$. La fonction $\mathcal{Y}(x)$ égale à $\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et à 0 pour $x = 0$ n'est pas continue et a cependant un ensemble représentatif $\mathcal{E}$ fermé dans $X \times Y$.

(8) On en aura un exemple en remplaçant dans l'exemple ci-dessus (Note 7) X par la demi-droite $x \geqslant 0$.

La propriété suivante est caractéristique des relations d'équivalence fermées :

Pour tout couple (x_1, x_2) *tel que non*-$R(x_1, x_2)$, *il existe un voisinage* $\mathcal{V}_{x_1}$ *de* x_1 *et un voisinage* $\mathcal{V}_{x_2}$ *de* x_2 *tels que, pour tout* $x'_1 \in \mathcal{V}_{x_1}$ *et tout* $x'_2 \in \mathcal{V}_{x_2}$, *on ait non*-$R(x'_1, x'_2)$.

La démonstration de ce fait est immédiate.

Il peut encore se traduire de la façon suivante :

Si K *est une classe d'équivalence quelconque suivant* R, *pour tout filtre* $\mathcal{F}$ *sur* E *convergeant vers un point de* K, *on a :*

$$\sup . S(x)_{\mathcal{F}} \subset K,$$

en désignant par $S(x)$ *le saturé de tout point* $x \in E$.

Il est intéressant de comparer les relations d'équivalence fermées dans E avec celles qui pourraient se déduire, comme dans l'étude ci-dessus (Relations particulières), de certaines relations fermées entre E et un autre espace. On va voir qu'en général ces relations multivoques fermées ne conduisent pas à des relations d'équivalence fermées. Soit par exemple E un espace compact et R une relation d'équivalence dans E ; on impose seulement à R que toute classe d'équivalence suivant R soit un ensemble fermé, ce qui n'entraîne pas que R soit fermée en notre sens. Or donnons à l'*ensemble* quotient E/R la topologie discrète. Il est immédiat que l'application canonique de E sur l'espace discret $\frac{E}{R}$ définit entre E et cet espace discret une relation fermée. Et cependant la relation d'équivalence dans E associée à cette application canonique est identique à R, donc n'est pas fermée.

THÉORÈME 4. — *Soit* $(R_i)_{i \in I}$ *une famille de relations d'équivalence dans l'espace topologique* E ; *et soit* $R = \inf . (R_i)_{i \in I}$.

1) *Il existe une application canonique continue et biunivoque de* E/R *dans l'espace produit* $\prod_{i \in I} E/R_i$.

2) *Si toute* R_i *est fermée,* R *est fermée*

3) *si chacun des espaces* E/R_i *est séparé,* E/R *est séparée ; la réciproque est inexacte.*

Démonstration : 1) Remarquons d'abord que tout ensemble ouvert de E saturé pour une R_i est aussi saturé pour R.

Pour tout i, il existe une application canonique continue f_i de E/R sur E/R_i : c'est celle qui, à toute classe d'équivalence suivant R associe la classe d'équivalence suivant R_i qui la contient.

Soit f l'application canonique $f = (f_i)$ de E/R dans le produit topologique $\prod_{i \in I} E/R_i$; elle est continue, et d'autre part elle est biunivoque puisque $R = \inf. (R_i)_{i \in I}$.

2) Toute R_i étant définie par un ensemble fermé $\mathcal{E}_i$ dans $E \times E$, la relation R, définie par $\bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$ est aussi fermée.

3) Si tout E/R_i est séparé, il en est de même de $\prod_{i \in I} E/R_i$. Comme $f(E/R) \subset \prod_{i \in I} E/R_i$, l'espace $f(E/R)$ est séparé. Il en est donc de même de E/R.

L'application f n'est pas en général bicontinue. Il suffit pour le voir de prendre E séparé et R_1, R_2 telles que E/R_1 et E/R_2 aient une topologie grossière (9) et que toute classe d'équivalence suivant $R = \inf. (R_1, R_2)$ contienne un seul élément. Alors E/R, homéomorphe à E, est séparé, alors que $f(E/R)$ a la topologie grossière.

Application 1 : Si E est compact et si la famille $(R_i)_{i \in I}$ est telle que tout E/R_i soit compact, E/R est compact.

Exemple : Soit E un espace compact et g une application continue de E dans un espace séparé. La relation d'équivalence R définie dans E par : $R(x_1, x_2)$ si $g(x_1) = g(x_2)$ et si m_1, m_2 sont sur une même composante connexe de E est telle que E/R soit séparé, donc aussi compact.

Notons ici que, si E n'est pas compact, et si R_1, R_2 sont telles que E/R_1 et E/R_2 soient compacts, l'espace séparé E/R, où $R = \inf. (R_1, R_2)$ n'est pas forcément compact.

Application 2 : Espace séparé associé à un espace topologique :

Soit E un espace topologique quelconque.

Soit $(R_i)_{i \in I}$ la famille de toutes les relations d'équivalence dans E telles que E/R_i soit séparé (cette famille n'est pas vide).

Si on pose $R = \inf. (R_i)_{i \in I}$, l'espace E/R est séparé.

Nous dirons que E/R est l'espace séparé associé à E (10).

(9) La topologie grossière sur un ensemble A est celle dans laquelle les seuls ensembles ouverts sont A et $\emptyset$.

(10) On pourrait obtenir R par le procédé transfini suivant :

Pour tout espace topologique A, disons que $S(a, b)$ (où $a, b \in A$), s'il existe une suite finie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ de points de A, avec $\alpha_1 = a$, $\alpha_{n+1} = b$, et une autre suite finie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de points de A, telle que α_k et $\alpha_{k+1} \in \overline{\overline{x_k}}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$ en désignant par $\overline{\overline{x_k}}$ l'intersection des voisinages fermés de x_k.

La relation S est une relation d'équivalence.

Désignons alors, dans E, la relation S par S_1 ; puis par S_2 la relation d'équivalence dans E induite par la relation S dans E/S_1 ; et de façon générale par S_{n+1} (n entier) la

Borne supérieure. — On n'a pas de théorème analogue au précédent pour $R = \sup.(R_i)_{i \in I}$.

Soit par exemple E une circonférence ; δ_1, δ_2 deux diamètres de E, et R_1, R_2 les deux relations d'équivalence ainsi définies :

$R_i(x_1, x_2)$ si x_1 et x_2 sont symétriques par rapport à $\delta_{i(i=1,2)}$.

Chacun des espaces E/R_i est compact. Or, si $(\widehat{\delta_1, \delta_2})/\pi$ est irrationnel, toute classe d'équivalence suivant $R = \sup.(R_1, R_2)$ est partout dense sur E ; donc E/R a une topologie grossière.

THÉORÈME 5. — *Soit* R *une relation d'équivalence dans un espace compact* E. *Les propriétés suivantes de* R *sont équivalentes :*

1) R *est fermée.*

2) *Le saturé de tout ensemble fermé est fermé.*

3) *Toute classe d'équivalence est un ensemble fermé et possède une base fondamentale de voisinages ouverts saturés.*

4) *Toute classe d'équivalence* γ *est un ensemble fermé, et pour tout voisinage* $\mathcal{V}_1$ *de* γ, *il existe un sous-voisinage* $\mathcal{V}_2$ *de* γ *tel que toute classe d'équivalence ayant un point au moins dans* $\mathcal{V}_2$, *soit contenue dans* $\mathcal{V}_1$.

L'une quelconque de ces propriétés entraîne que E/R *soit séparé, donc aussi compact.*

THÉORÈME 6. — *Soit* R *une relation d'équivalence fermée dans un espace localement compact* E.

Le saturé de tout ensemble compact $K \subset E$ *est fermé ; ceci caractérise les relations* R *fermées dans* E.

L'espace quotient E/R *n'est pas en général séparé. Mais lorsque* E *est dénombrable à l'infini* ([11]), E/R *est séparé et normal* (*sans être pour cela localement compact*) ([12]).

La démonstration de ces théorèmes ne présente pas de difficultés. La seconde partie du théorème 6 se démontre en utilisant le fait que le saturé de tout ensemble compact est un ensemble fermé.

Applications immédiates : 1) Soit E un espace localement compact ;

relation d'équivalence dans E induite par la relation S dans E/S_n. On pose alors $S_\omega = \sup.(S_n)_{n=1,2,\ldots}$.

Puis on définit $S_{\omega+1}$, $S_{\omega+2}$, etc. On peut ainsi définir S_α pour tout nombre ordinal α. Si pour $\alpha = \alpha_0$, E/S_{α_0} est séparé, on aura $S_\beta \equiv S_{\alpha_0}$ pour tout $\beta > \alpha_0$, et on peut alors montrer que $S_{\alpha_0} \equiv R$.

L'existence d'un tel α_0 résulte de l'axiome du choix.

([11]) C'est-à-dire que E est une réunion dénombrable de compacts.

([12]) *Exemple :* E est l'ensemble suivant dans le plan xOy : La droite $x = 0$ plus l'ensemble des points de coordonnées $\left(x = \frac{1}{n}, y = p\right)$, où $n = 1, 2, \ldots, \ldots$ $p = 1, 2, \ldots$.

Et l'on prend pour classes d'équivalence de R les composantes connexes de E.

la relation d'équivalence R dont les classes d'équivalence sont les composantes connexes de E est fermée.

2) Soit R_1 une relation d'équivalence fermée dans l'espace localement compact E. Soit R_2 la relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les composantes connexes des classes d'équivalence de R_1. La relation R_2 est fermée.

Relations d'équivalence fermées en des sens plus stricts.

On peut renforcer progressivement la définition des relations d'équivalence fermées.

Définition 5 bis. — *On dit que la relation d'équivalence* R *dans l'espace* E *est* FORTEMENT FERMÉE *si la relation canonique entre les espaces* E *et* E/R *est fermée.*

Il est immédiat que toute relation R fortement fermée est fermée.

La propriété suivante est caractéristique des relations R fortement fermées :

Pour tout couple (x_1, x_2) *tel que non-*$R(x_1, x_2)$, *si* $\gamma(x_1)$ *désigne la classe d'équivalence contenant* x_1, *il existe un voisinage ouvert saturé* $\mathcal{V}_{\gamma(x_1)}$ *de* $\gamma(x_1)$ *et un voisinage* $\mathcal{V}_{x_2}$ *de* x_2 *tels que*

$$\mathcal{V}_{x_2} \cap \mathcal{V}_{\gamma(x_1)} = \emptyset.$$

Par exemple, si E est localement compact, toute relation d'équivalence R fermée dans E est aussi fortement fermée. Mais ceci ne s'étend pas au cas général : On pourra en construire un exemple dans l'espace E obtenu comme réunion d'un disque ouvert et d'un point de sa circonférence.

Définition 5 ter. — *On dit que la relation d'équivalence* R *dans l'espace* E *est* TRÈS FORTEMENT FERMÉE *si l'espace* E/R *est separé.*

Il est immédiat que toute relation R très fortement fermée est fortement fermée.

La propriété suivante est caractéristique des relations R très fortement fermées.

Pour tout couple (γ_1, γ_2) *de classes d'équivalence distinctes, il existe deux ensembles ouverts saturés disjoints contenant respectivement* γ_1 *et* γ_2.

Il existe des relations R qui sont fortement fermées sans l'être très fortement (voir le théorème ci-dessus relatif aux espaces localement compacts). Mais dans un espace compact E toute relation d'équivalence fermée est très fortement fermée.

DEUXIÈME PARTIE

Pseudo-topologies, pré-topologies et topologies.

Dans un espace métrique E, la définition d'écart mutuel de deux ensembles fermés ([13]) organise l'ensemble 2^E des sous-ensembles fermés de E en espace métrique. Ceci induit sur 2^E une topologie qu'on peut appeler topologie de la convergence uniforme.

On pourrait donner des définitions analogues pour tout espace uniforme E.

Mais tout espace topologique n'est pas uniformisable, et même si E est uniformisable, il peut l'être de plusieurs façons et les topologies sur 2^E associées à ces diverses structures uniformes ne sont pas toujours identiques.

D'autre part on a souvent besoin d'une notion de convergence différente de la notion de convergence uniforme. Par exemple, si E est localement compact, on utilise souvent la notion de « convergence uniforme sur tout compact ».

Il semble donc utile de définir pour un espace topologique quelconque E une notion de convergence sur 2^E et d'essayer d'organiser 2^E en espace topologique.

Il est naturel pour cela d'utiliser les définitions des limites supérieure et inférieure d'une famille d'ensembles suivant un filtre. Il se trouve que la notion de convergence associée à cette notion de limite ne définit pas toujours directement sur E une topologie. Elle définit ce que nous appellerons une *pseudo-topologie,* c'est-à-dire une structure généralisant les structures $\mathfrak{L}^*$ ([14]).

Nous étudierons brièvement les pseudo-topologies et en particulier les *pré-topologies,* plus directement liées à la notion d'*adhérence.*

([13]) Notion due à Hausdorff. Voir Kuratowski, Topologie I, page 89.

([14]) Voir Kuratowski, *loc. cit.*, page 76 ; un espace $\mathfrak{L}^*$ est défini à partir de la notion de suite convergente.

Puis nous montrerons comment à toute pseudo-topologie on peut associer une pré-topologie et une topologie.

Nous pourrons utiliser cette étude pour définir une pseudo-topologie et une topologie sur l'ensemble des applications continues d'un espace dans un autre.

Nous ferons ensuite une étude un peu plus détaillée de ces notions dans des espaces moins généraux (compacts, connexes, localement connexes, etc.).

5. — Structures pseudo-topologiques sur un ensemble.

Une structure *pseudo-topologique* $\mathfrak{p}$ sur un ensemble E est définie par la donnée d'une relation $R(\mathcal{U}, m)$, dite *relation de pseudo-convergence* entre l'ensemble des ultrafiltres $\mathcal{U}$ sur E et l'ensemble des points m de E.

Lorsque $R(\mathcal{U}, m)$ est vraie, on dit que m est *pseudo-limite* de $\mathcal{U}$, ou encore que $\mathcal{U}$ *pseudo-converge* vers m [15].

Nous supposerons vérifié le seul axiome.

U_1. *Pour tout* $m \in E$, *l'ultrafiltre des sur-ensembles de* $\{m\}$ *pseudo-converge vers* m.

Exemple : Dans tout espace topologique E, la définition topologique ordinaire de la convergence d'un ultra-filtre induit sur E une pseudo-topologie qui est dite *induite* par la topologie de E.

Extension de la relation de pseudo-convergence aux filtres quelconques.

Définition 1. — *On dira qu'un filtre* $\mathcal{F}$ *sur* E *pseudo-converge vers* m *si tout ultra-filtre plus fin que* $\mathcal{F}$ *pseudo-converge vers* m. *Cette relation se notera* $R(\mathcal{F}, m)$.

Exemple : Si E est un espace topologique, on vérifie aisément que l'extension $R(\mathcal{F}, m)$ de la relation $R(\mathcal{U}, m)$ induite par la topologie de E est identique à la relation de convergence topologique dans E.

Toute relation $R(\mathcal{F}, m)$ possède évidemment les propriétés suivantes :

F_1 : $$\big(\mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \text{ et } R(\mathcal{F}, m)\big) \rightarrow R(\mathcal{F}', m).$$

[15] Un ultrafiltre peut n'avoir aucun point pseudo-limite.

Autrement dit, plus un filtre est fin, plus il a de points pseudo-limites.

F_2 : *Si non*-$R(\mathcal{F}, m)$, *il existe un* $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ *tel que, pour tout* $\mathcal{F}'' \supset \mathcal{F}'$, *on ait non*-$R(\mathcal{F}'', m)$.

F_3 : *Pour tout* $m \in E$, *si* $\mathcal{F}$ *désigne le filtre des sur-ensembles de* $\{m\}$, *on a* $R(\mathcal{F}, m)$.

Inversement, soit $R(\mathcal{F}, m)$ une relation entre l'ensemble des filtres $\mathcal{F}$ sur E et l'ensemble des points m de E.

Désignons par $R(\mathfrak{U}, m)$ la restriction de $R(\mathcal{F}, m)$ à l'ensemble des ultrafiltres $\mathfrak{U}$.

On vérifie aisément que, si la relation $R(\mathcal{F}, m)$ vérifie les axiomes F_1, F_2, F_3, la relation $R(\mathfrak{U}, m)$ est une relation de pseudo-convergence (axiome F_3), et l'extension $R'(\mathcal{F}, m)$ de $R(\mathfrak{U}, m)$ aux filtres quelconques $\mathcal{F}$ est identique à $R(\mathcal{F}, m)$ (axiomes F_1 et F_2).

Comparaison des pseudo-topologies.

Soient $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ deux pseudo-topologies sur E, définies par les relations $R_1(\mathcal{F}, m)$ et $R_2(\mathcal{F}, m)$. On dit que $\mathfrak{p}_1$ est plus fine que $\mathfrak{p}_2$ ($\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2$) si $R_1(\mathcal{F}, m) \rightarrow R_2(\mathcal{F}, m)$ ([16]).

Autrement dit, plus une pseudo-topologie est fine, moins les filtres ont de points pseudo-limites.

Par exemple, si deux pseudo-topologies $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ sont telles que pour chacune d'elles tout ultrafiltre possède un point limite et un seul, $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ sont, ou bien non comparables, ou bien identiques.

Applications pseudo-continues.

Soient, sur deux ensembles E, E', deux pseudo-topologies $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$, définies par les relations R, R', et soit f une application de E dans E'.

Si $m \in E$ et $m' = f(m)$, on dira que f est pseudo-continue en m si

$$R(\mathcal{F}, m) \rightarrow R'(\mathcal{F}', m'),$$

en désignant par $\mathcal{F}'$ le filtre de base $f(\mathcal{F})$.

Si f est une application biunivoque de E sur E', qui soit pseudo-continue ainsi que l'application réciproque de f, on montre aisément que cette application f réalise une isomorphie des structures pseudo-topologiques $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$. Autrement dit, ces structures sont pseudo-homéomorphes.

On démontre aisément aussi le théorème des applications composées pseudo-continues.

([16]) Cette définition est la même que la définition que nous avons donnée pour les relations quelconques.

Somme et produit pseudo-topologiques.

Ces notions se définissent, comme dans les espaces topologiques, à partir de la notion d'application pseudo-continue.

Soit par exemple $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces pseudo-topologiques. Sur l'ensemble produit $E = \prod_{i \in I} E_i$, la pseudo-topologie produit sera par définition la moins fine de toutes celles qui rendent pseudo-continues les fonctions coordonnées. Autrement dit, on dira que $R(\mathcal{F}, m)$ est vraie si $R_i(\mathcal{F}_i, m_i)$ est vraie pour tout $i \in I$, $\mathcal{F}_i$ et m_i étant les projections de $\mathcal{F}$ et m dans E_i.

Pseudo-topologie quotient.

Soit $\mathfrak{p}$ une pseudo-topologie sur un ensemble E, et R une relation d'équivalence dans E.

On appelle pseudo-topologie quotient sur l'ensemble quotient E/R, *la pseudo-topologie la plus fine rendant pseudo-continue dans* E *l'application canonique sur* E/R. *On la notera par* $\mathfrak{p}/R$.

On peut montrer que cette pseudo-topologie quotient existe bien et qu'elle est définie par la relation $R'(\mathcal{F}', m')$ suivante :

Si $R(\mathcal{F}, m)$ désigne la relation définissant $\mathfrak{p}$, on dira que $R'(\mathcal{F}', m')$ est vraie si $\mathcal{F}'$ et m' sont les images canoniques d'un $\mathcal{F}$ et d'un m tels que $R(\mathcal{F}, m)$ soit vraie.

On vérifie aisément que cette relation $R'(\mathcal{F}', m')$ satisfait bien aux axiomes F_1, F_2, F_3.

Remarque : Si $\mathfrak{p}$ est une pré-topologie [17] (resp. une topologie), la pseudo-topologie quotient $\mathfrak{p}/R$ n'est pas forcément une pré-topologie (resp. une topologie).

Pseudo-adhérence d'un ensemble.

Définition 2. — *On dit que m est* pseudo-adhérent *au filtre* $\mathcal{F}$ *sur* E *s'il est pseudo-limite d'un filtre plus fin que* $\mathcal{F}$.

L'ensemble des points pseudo-adhérents à $\mathcal{F}$ *s'appelle sa* pseudo-adhérence *et se note par* $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}$.

Remarque 1 : Plus un filtre est fin, plus il a de points pseudo-limites et moins il a de points pseudo-adhérents.

Remarque 2 : Il existe des filtres $\mathcal{F}$ dont la pseudo-adhérence $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}$ est identique à l'ensemble des points pseudo-limites. On dit qu'un tel

[17] Voir plus loin la définition.

filtre pseudo-converge *strictement*. Par exemple tout ultrafiltre pseudo-converge strictement.

DÉFINITION 3. — *Pour tout sous-ensemble* $A \subset E$, *on appelle pseudo-adhérence de* E, *et on note par* $\widetilde{A}$ *la pseudo-adhérence du filtre des sur-ensembles de* A.

On pourrait dire encore que $\widetilde{A}$ est la réunion des pseudo-adhérences des filtres ayant une base dans A, ou l'ensemble des points pseudo-limites des ultrafiltres ayant une base dans A.

Il est immédiat que $A \subset \widetilde{A}$ et que $\widetilde{\left(\bigcup_i A_i\right)} = \bigcup_i \widetilde{A_i}$, pour toute réunion finie d'ensembles.

Pour tout filtre $\mathcal{F}$, on a $\widetilde{\mathcal{F}} \subset \bigcap_{a \in \mathcal{F}} \widetilde{a}$, mais il n'y a pas en général identité entre les deux termes de cette inclusion, même si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre. Ceci tient à ce que, pour une famille $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ d'ultrafiltres, le filtre $\mathcal{F}$ intersection de cette famille est en général tel que la famille des ultrafiltres plus fins que $\mathcal{F}$ soit strictement plus grande que $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$.

Limites supérieure et inférieure d'une famille d'ensembles.

On peut, dans tout espace pseudo-topologique E définir encore les notions de limites supérieure et inférieure d'une famille d'ensembles. Il suffit pour cela de présenter sous une forme convenable les définitions données dans le cas où E est un espace topologique :

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E, et $\mathcal{F}$ un filtre sur I.

L'ensemble $\sup. (e_i)_{\mathcal{F}}$ sera défini comme l'ensemble des points pseudo-limite des ultrafiltres ainsi construits : Si $\mathcal{U}$ désigne un ultrafiltre plus fin que $\mathcal{F}$, pour tout $i \in I$, on pose $f(i) =$ un point quelconque de e_i. On définit ainsi une application de I dans E ; par définition l'ultrafiltre de base $f(\mathcal{U})$ est un ultrafiltre $\mathcal{U}'$.

L'ensemble $\inf. (e_i)_{\mathcal{F}}$ sera défini par la formule :

$$\inf. (e_i)_{\mathcal{F}} = \bigcap_{j \in J} \sup. (e_i)_{\mathcal{F}_j},$$

où $(\mathcal{F}_j)_{j \in J}$ désigne la famille des filtres (ou des ultrafiltres) plus fins que $\mathcal{F}$.

Par exemple, pour tout $A \subset E$, si l'on prend $A = e_i$ (pour tout $i \in I$), on trouve que $\sup. (e_i)_{\mathcal{F}} = \inf. (e_i)_{\mathcal{F}} = \widetilde{A}$.

6. — Structures pré-topologiques sur un ensemble.

On dit qu'une structure pseudo-topologique $\mathfrak{p}$ est une structure *pré-topologique* si elle possède la propriété suivante :

U_2 : *Pour tout ultrafiltre* $\mathfrak{U}$ *sur* E, *on a :* $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{U}}} = \bigcap_{a\in\mathfrak{U}} \widetilde{a}$.

Filtre des pseudo-voisinages d'un point.

Pour $m \in E$. soit $\mathcal{G}_m$ l'ensemble de toutes les parties $a \subset E$ telles que : $m \in \widetilde{a}$. Pour toute structure pseudo-topologique $\mathfrak{p}$, $\mathcal{G}_m$ constitue une grille ([4]) ; soit $\mathcal{F}_m$ le filtre associé à $\mathcal{G}_m$ ([4]).

Ce filtre $\mathcal{F}_m$ est l'intersection des filtres qui pseudo-convergent vers m. Il a pour éléments les complémentaires des parties b de E telles que $m \notin \widetilde{\widetilde{b}}$; nous appellerons *pseudo-voisinages* de m les éléments de $\mathcal{F}_m$; autrement dit $\mathcal{F}_m$ sera le filtre des pseudo-voisinages de m.

Tout ultrafiltre plus fin que $\mathcal{F}_m$ est une partie de $\mathcal{G}_m$; donc si l'axiome U_2 est vérifié, cet ultrafiltre pseudo-converge vers m. Donc si l'axiome U_2 est vérifié, le filtre $\mathcal{F}_m$ pseudo-converge aussi vers m.

Inversement, supposons qu'une pseudo-topologie $\mathfrak{p}$ satisfasse à la condition :

U'_2 : *Pour tout* $m \in E$, *le filtre* $\mathcal{F}_m$ *des pseudo-voisinages de* m *pseudo-converge vers* m.

Cette condition entraîne la propriété U_2. En effet, soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur E ; si $m \in \widetilde{a}$ pour tout $a \in \mathfrak{U}$, l'ultrafiltre $\mathfrak{U}$ est plus fin que $\mathcal{F}_m$; donc $\mathfrak{U}$ pseudo-converge vers m, autrement dit $m \in \widetilde{\widetilde{\mathfrak{U}}}$; comme d'autre part on a toujours $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{U}}} \subset \bigcap_{a\in\mathfrak{U}} \widetilde{a}$, on a bien $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{U}}} = \bigcap_{a\in\mathfrak{U}} \widetilde{a}$.

Les axiomes U_2 et U'_2 sont donc équivalents (dès que l'axiome U_1 est vérifié).

Théorème I. — *Pour toute pré-topologie* $\mathfrak{p}$, *on a pour tout filtre* $\mathcal{F}$ *sur* E :

$$\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}}} = \bigcap_{a\in\mathcal{F}} \widetilde{a}.$$

Démonstration : On sait déjà que $\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}}} \subset \bigcap_{a\in\mathcal{F}} \widetilde{\widetilde{a}}$.

Soit alors $m \in \bigcap_{a \in \mathcal{F}} \widetilde{a}$. Comme m est pseudo-adhérent à tous les éléments de $\mathcal{F}$, il existe, à cause de la définition de $\mathcal{F}_m$, une borne supérieure $\mathcal{F}'$ pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_m$.

Tout ultrafiltre plus fin que $\mathcal{F}'$ est plus fin que $\mathcal{F}_m$, donc pseudo-converge vers m. Comme $\mathcal{F}'$ est plus fin que $\mathcal{F}$, on a bien $m \in \widetilde{\mathcal{F}}$.

Structures de pré-adhérence et structures pré-topologiques.

Nous savons que, pour toute pseudo-topologie $\mathfrak{p}$ sur E, on a les propriétés :

$X \subset \widetilde{X}$ pour tout $X \subset E$, et $\widetilde{\left(\bigcup_i X_i\right)} = \bigcup_i \widetilde{X_i}$ pour toute réunion finie.

Réciproquement, supposons définie sur l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties X de E une opération $\breve{X}$ définissant une application de $\mathfrak{P}(E)$ dans lui-même et vérifiant les axiomes suivants :

A_1 : *Pour tout* $X \subset E$, *on a* $X \subset \breve{X}$.

A_2 : $\breve{\left(\bigcup_i X_i\right)} = \bigcup_i \breve{X_i}$ *pour toute réunion finie* (18).

Nous dirons que $\breve{X}$ est la *pré-adhérence* de X et que l'opération $\breve{X}$ définit sur E une structure de pré-adhérence.

A toute structure de pré-adhérence sur E, on peut associer une pseudo-topologie définie par la relation $R(\mathfrak{U}, m)$ suivante :

On dira que $R(\mathfrak{U}, m)$ *est vraie si m est pré-adhérent* (19) *à tout élément de* $\mathfrak{U}$.

Cette définition entraîne que l'ensemble des points pseudo-limite de $\mathfrak{U}$ soit identique à $\bigcap_{a \in \mathfrak{U}} \breve{a}$.

Pour tout $X \subset E$, désignons par $\widetilde{X}$ sa pseudo-adhérence relative à la pseudo-topologie définie par $R(\mathfrak{U}, m)$.

THÉORÈME 2. — *Pour tout* $X \subset E$, *on a* $\widetilde{X} = \breve{X}$.

Démonstration : 1) $\widetilde{X} \subset \breve{X}$. En effet, pour tout ultrafiltre $\mathfrak{U}$ ayant une base sur X, et pour chacun des éléments a de cette base, on a : $\breve{a} \subset \breve{X}$; donc tout point pseudo-limite de $\mathfrak{U}$ appartient à $\breve{X}$.

2) $\breve{X} \subset \widetilde{X}$. En effet, soit $m \in \breve{X}$. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des parties a de X telles que $m \in \breve{a}$. Il est immédiat que $\mathcal{G}$ constitue une grille sur X ;

(18) La définition générale de la réunion finie implique que A_2 entraine $\breve{(\emptyset)} = \emptyset$.

(19) m est dit pré-adhérent à X si $m \in \breve{X}$.

soit $\mathcal{F}$ le filtre sur X associé à $\mathcal{G}$. Tout ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur X plus fin que $\mathcal{F}$ a ses éléments dans $\mathcal{G}$. Donc l'ultrafiltre sur E ayant pour base $\mathfrak{U}$ pseudo-converge vers m ; d'où $m \in \widetilde{\widetilde{X}}$.

Corollaire : Pour tout ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur E, on a

$$\widetilde{\widetilde{\mathfrak{U}}} = \bigcap_{a \in \mathfrak{U}} \widetilde{\widetilde{a}}.$$

Autrement dit, la pseudo-topologie associée à une structure de pré-adhérence est une pré-topologie ; et la pseudo-adhérence associée à cette pré-topologie est identique à la pré-adhérence donnée.

On peut donc définir une pré-topologie, soit par une relation $R(\mathfrak{U}, m)$ de pseudo-convergence, soit par une opération $\widetilde{X}$ de pré-adhérence. On peut donc identifier les notions de structure pré-topologique et de structure de pré-adhérence.

Pré-topologie associée à une pseudo-topologie.

Soit $\mathfrak{p}$ une pseudo-topologie sur E. La pseudo-adhérence $(\widetilde{\widetilde{X}})$ satisfait aux axiomes A_1 et A_2. Soit $\mathfrak{p}'$ la pré-topologie définie par l'opération $\widetilde{\widetilde{X}}$. On dit que $\mathfrak{p}'$ est la *pré-topologie associée à* $\mathfrak{p}$.

La relation $\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}}} \subset \bigcap_{a \in \mathcal{F}} \widetilde{\widetilde{a}}$ montre que $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$. Plus précisément, $\mathfrak{p}'$ est la plus fine de toutes les pré-topologies moins fines que $\mathfrak{p}$.

Topologie associée à une pseudo-topologie.

Soit $\mathfrak{p}$ une pseudo-topologie sur E ; et soit $X \subset E$.

On dit que X est fermé si $X = \widetilde{\widetilde{X}}$.

On dit que X est ouvert si son complémentaire est fermé.

Il est immédiat que, pour que X soit ouvert, il faut et il suffit que, pour tout $m \in X$, si $R(\mathcal{F}, m)$ est vraie, il existe un élément $a \in \mathcal{F}$ tel que $a \subset X$; ceci équivaut encore à dire que X est un pseudo-voisinage de chacun de ses points.

Les ensembles ouverts possèdent les propriétés suivantes :

O_1 : Toute réunion d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.

O_2 : Toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.

Donc les ensembles ouverts pour $\mathfrak{p}$ sont les ensembles ouverts d'une *topologie* qui est dite *associée* à $\mathfrak{p}$.

Par exemple, la pseudo-topologie induite par une topologie donnée sur E a pour topologie associée la topologie donnée.

On peut caractériser la topologie associée à $\mathfrak{p}$ comme la plus fine de toutes les topologies dont les pseudo-topologies induites sont moins fines que $\mathfrak{p}$.

Il est immédiat que si $\mathfrak{p}'$ désigne la pré-topologie associée à $\mathfrak{p}$, la topologie associée à $\mathfrak{p}'$ est identique à celle associée à $\mathfrak{p}$.

Nous énoncerons le théorème suivant, aisé à démontrer :

THÉORÈME 3. — *Soit $\mathfrak{p}$ une pseudo-topologie sur* E, *$\mathfrak{p}'$ la pré-topologie associée à $\mathfrak{p}$, et $\mathfrak{p}''$ la topologie associée à $\mathfrak{p}$. Si* R *est une relation d'équivalence dans* E, *il y a isomorphie canonique entre les deux structures suivantes :*

1) *La pré-topologie (resp. topologie) associée à la pseudo-topologie $\mathfrak{p}/R$.*

2) *La pré-topologie (resp. topologie) associée à la pseudo-topologie $\mathfrak{p}'/R$ (resp. $\mathfrak{p}''/R$).*

Remarquons que la topologie associée à la pseudo-topologie $\mathfrak{p}''/R$ est isomorphe au quotient topologique ordinaire de $\mathfrak{p}''$ par R.

Condition pour qu'une pré-topologie soit une topologie.

Soit $\mathfrak{p}$ une pré-topologie sur E, définie par une opération $\widetilde{X}$ de pré-adhérence.

Pour que $\mathfrak{p}$ soit identique à la structure de pré-adhérence induite par la topologie associée à $\mathfrak{p}$, il faut et il suffit que soit vérifiée la condition :

A_3 : *Pour tout* $X \subset E$, *on a* $\widetilde{X} = \widetilde{(\widetilde{X})}$.

Les axiomes A_1, A_2, A_3 [20] forment un système d'axiomes équivalent au système des axiomes topologiques ordinaires (à partir des ouverts, des fermés, ou des voisinages).

On obtiendrait encore un système d'axiomes équivalents en prenant les axiomes U_1, U_2 (ou U_2') et U_3, où U_3 désigne l'axiome suivant :

U_3 : *Pour tout $m \in E$, le filtre $\mathcal{F}_m$ des pseudo-voisinages de m possède*

[20] Les axiomes A_1, A_2, A_3 diffèrent de ceux adoptés par M. Kuratowski (*loc. cit.*). Celui-ci remplace en effet l'axiome A_1 par l'axiome suivant :

Pour tout $m \in E$, on a $\widetilde{\{m\}} = \{m\}$ et $\widetilde{\{\emptyset\}} = \emptyset$.

Cet axiome est plus restrictif que A_2. Il entraîne que tout ensemble contenant un seul point est un ensemble fermé.

une base dont tout élément est pseudo-voisinage de chacun de ses points.

Remarque : On peut dire, en termes vagues, que la notion de pseudo-convergence est plus fine que celle de pré-adhérence puisqu'elle permet de définir des structures plus fines que les structures de pré-adhérence.

De même la notion de pré-adhérence est plus fine que la notion d'ensemble fermé (ou ouvert).

C'est là une justification de l'étude des pseudo-topologies ; nous allons d'ailleurs voir que c'est un outil indispensable à l'étude de l'espace des sous-ensembles fermés d'un espace topologique.

7. — Pseudo-topologie et topologie sur l'ensemble des sous-ensembles fermés d'un espace topologique.

Soit E un espace topologique, et 2^E l'ensemble des sous-ensembles fermés de E. Pour tout élément $a \in 2^E$, nous désignerons par X_a le sous-ensemble fermé de E que représente a.

Définition. — *Pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur 2^E, et tout $e \in 2^E$, nous dirons que* R($\mathcal{F}$, e) *est vraie si l'on a :*

$$X_e = \inf. (X_i)_{\mathcal{F}} = \sup. (X_i)_{\mathcal{F}}.$$

Cette relation satisfait aux axiomes F_1, F_2, F_3, d'après les résultats que nous avons démontrés au paragraphe 3. Elle définit donc sur 2^E une pseudo-topologie $\mathfrak{p}$ dans laquelle tout filtre possède au plus un point pseudo-limite.

En général, cette pseudo-topologie n'est pas une pré-topologie : c'est le cas par exemple si E est la réunion d'un disque ouvert et d'un point de la circonférence du disque.

Définition. — *Nous dirons qu'un espace topologique* E *est compactoïde si tout filtre sur* E *possède un point adhérent.*

Nous dirons que E *est localement compactoïde si tout point de* E *possède un voisinage compactoïde.*

Théorème 1. — *Pour que la pseudo-topologie $\mathfrak{p}$ de 2^E soit une pré-topologie, il est nécessaire que* E *soit localement compactoïde.*

Lorsque E *n'est pas localement compactoïde, il existe sur 2^E des ultrafiltres qui, dans la pré-topologie associée à $\mathfrak{p}$ pré-convergent vers* *plus d'un point. La topologie associée à $\mathfrak{p}$ est alors non séparée* ([21]).

Démonstration : Soit m_0 un point de E ne possédant aucun voisinage compactoïde. Le point m_0 possède au moins un voisinage ouvert ω distinct de E, sinon m_0 serait adhérent à tout filtre sur E, et E serait alors compactoïde.

Soit F l'ensemble fermé complémentaire de ω.

Pour tout voisinage ouvert V de m_0, il y a par hypothèse des ultrafiltres $\mathcal{U}$ ayant une base sur V et n'ayant aucun point adhérent sur E ; ceci peut se traduire par :

$$\text{sup.}\,\{m\}_{\mathcal{U}} = \emptyset, \qquad \text{d'où} \qquad \text{sup.}\,\overline{\{m\}}_{\mathcal{U}} = \emptyset.$$

On a donc aussi :

$$\text{inf.}\,\left(F \cup \overline{\{m\}}\right)_{\mathcal{U}} = \text{sup.}\,\left(F \cup \overline{\{m\}}\right)_{\mathcal{U}} = F.$$

L'intersection des ultrafiltres $\mathcal{U}$ est un filtre $\mathcal{F}$ tel que m_0 soit adhérent à $\mathcal{F}$, d'où $m_0 \in \text{sup.}\,\left(F \cup \overline{\{m\}}\right)_{\mathcal{F}}$.

Il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}'$ plus fin que $\mathcal{F}$ et tel que

$$m_0 \in \text{sup.}\,\left(F \cup \overline{\{m\}}\right)_{\mathcal{U}'} = \text{inf.}\,\left(F \cup \overline{\{m\}}\right)_{\mathcal{U}'}.$$

L'ensemble limite des $\left(F \cup \overline{\{m\}}\right)$ suivant l'ultrafiltre $\mathcal{U}'$ est donc distinct de F. L'axiome U'_2 n'est pas vérifié, donc $\mathfrak{p}$ n'est pas une pré-topologie.

Dans la pré-topologie associée à $\mathfrak{p}$, l'ultrafiltre sur 2^E associé à $\mathcal{U}'$ pré-converge vers tout point de pseudo-convergence des ultrafiltres associés aux $\mathcal{U}$; donc il pré-converge vers l'élément représentant F ; comme il pré-converge aussi d'après ce qu'on vient de voir, vers un autre élément, il a au moins deux points pré-limite.

A fortiori, dans la topologie associée à $\mathfrak{p}$, il y a des ultrafiltres qui ont plus d'un point limite ; cette topologie n'est donc pas séparée.

THÉORÈME 2. — *Si* E *est séparé, la condition nécessaire et suffisante pour que la topologie sur* 2^E *soit séparée, est que* E *soit localement compact.*

La pseudo-topologie $\mathfrak{p}$ *sur* 2^E *est alors identique à la topologie associée à* $\mathfrak{p}$; *c'est une topologie d'espace localement compact. Pour que ce soit une topologie d'espace compact, il faut et il suffit que* E *soit compact.*

Démonstration : 1) La condition est nécessaire ; car si la topologie

([21]) Notons ici que, quel que soit E, la topologie associée à $\mathfrak{p}$ est telle que tout sous-ensemble de 2^E contenant un seul élément soit un ensemble fermé.

de 2^E est séparée, le théorème précédent montre que E est localement compactoïde ; comme E est séparé, il est localement compact.

(2 La condition est suffisante :

Comme E est localement compact, il résulte des formules 3 et 5, pages 62 et 63, que dans la pseudo-topologie $\mathfrak{p}$ de 2^E, pour tout $m \in 2^E$, le filtre $\mathcal{F}_m$ des pseudo-voisinages de m pseudo-converge vers m. Donc $\mathfrak{p}$ est une pré-topologie.

On montre ensuite que $\mathcal{F}_m$ possède une base $\mathcal{B}_m$ dont les éléments sont pseudo-voisinages de chacun de leurs points. On obtient les éléments de $\mathcal{B}_m$ à partir des recouvrements ouverts étudiés page 65 (c), de la façon suivante : Pour un tel recouvrement ouvert $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, on appelle $a(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ l'ensemble des sous-ensembles fermés de E dont chacun est inclus dans $\bigcup\limits_i \omega_i$ et rencontre tout ω_i. La famille de ces $a(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ constitue la base $\mathcal{B}_m$ cherchée.

Ceci montre que $\mathfrak{p}$ est une topologie (axiome U_3) ; on montre ensuite aisément que $\mathfrak{p}$ est une topologie séparée, et de plus localement compacte.

Si E n'est pas compact, il y a évidemment des filtres sur 2^E n'ayant aucun point adhérent ; si E est compact, tout ultrafiltre sur 2^E a un point pseudo-limite, donc la topologie de 2^E est compacte.

THÉORÈME 3. — *Soit* E *un espace topologique et* ω *un sous-ensemble ouvert de* E. *La pseudo-topologie sur l'ensemble* 2^ω *des sous-ensembles fermés de l'espace* ω *s'obtient de la façon suivante :*

Soit, dans 2^E *la relation d'équivalence* R *suivante : On dira que* $R(e, e')$ *est vraie si, dans* E *on a* : $X_e \cap \omega = X_{e'} \cap \omega$.

L'espace pseudo-topologique 2^ω *est alors isomorphe à l'espace pseudo-topologique quotient par* R *de l'espace pseudo-topologique* 2^E, *diminué du point o représentant la classe des* X_e *tels que* $X_e \cap \omega = \emptyset$.

Le théorème de la page 86 *montre alors que la topologie de* 2^ω *s'obtient à partir de la topologie de* 2^E *par le même procédé.*

Démonstration : Soit un filtre $\mathcal{F}$ sur 2^E, qui pseudo-converge vers $e \in 2^E$. L'image canonique de $\mathcal{F}$ sur $(2^\omega \cup \{o\})$ pseudo-converge évidemment vers l'image canonique de e (prendre les traces des X_{e_i} et X_e sur ω).

Inversement, si un filtre $\mathcal{F}$ sur 2^ω pseudo-converge vers $e \in 2^\omega$, la base de filtre sur 2^E obtenue à partir de $\mathcal{F}$ en remplaçant tout sous-ensemble X_{e_i} fermé dans ω par $[X_{e_i} \cup (E - \omega)]$ pseudo-converge dans 2^E vers l'élément correspondant à e.

La démonstration s'achève ensuite aisément.

Application : Soit ω un espace localement compact, et E l'espace compact obtenu en ajoutant à ω un point à l'infini.

L'espace 2^E est alors compact. Il est immédiat que la relation d'équivalence R introduite dans l'énoncé du théorème est une relation fermée. Donc $2^E/R$ est compact. L'espace 2^ω est homéomorphe à 2^E diminué du point o.

Nous énoncerons sans démonstration les théorèmes suivants :

THÉORÈME 4. — *Si* E *est un espace topologique et si* F *désigne un sous-ensemble fermé de* E, *l'ensemble des sous-ensembles fermés de* E *a pour image dans* 2^E *un ensemble* A *qui est fermé pour la topologie de* 2^E.

La pseudo-topologie (resp. la topologie) de 2^F *est isomorphe à la trace sur* A *de la pseudo-topologie (resp. la topologie) de* 2^E.

THÉORÈME 5. — *Soient* E *un espace topologique,* ω *un sous-ensemble de* 2^E, *et* Ω *l'ensemble réunion, dans* E, *des ensembles fermés dont les images sont dans* ω.

1) *Si* ω *est fermé,* Ω *est fermé dans* E.

2) *Si* ω *est ouvert, l'ensemble* Ω *est ouvert dans* E *lorsque* E *est séparé* (22).

Si E *est compact, lorsque* ω *parcourt l'ensemble des voisinages ouverts d'un point* $e \in 2^E$, *les* Ω *correspondants constituent une base fondamentale de voisinages de l'ensemble fermé* X_e.

Pseudo-topologie forte sur 2^E.

La pseudo-topologie que nous venons d'étudier sur l'ensemble 2^E n'est pas la seule que l'on puisse introduire naturellement. Définissons par exemple une *pseudo-topologie forte* sur 2^E.

Nous conservons les notations du début de ce paragraphe.

DÉFINITION. — *Pour tout filtre* $\mathcal{F}$ *sur* 2^E, *et tout* $e \in 2^E$, *nous dirons que* $R(\mathcal{F}, e)$ *est vraie si :*

1) $X_e \subset \inf. (X_i)_{\mathcal{F}}$.

2) *Pour tout voisinage* $\mathcal{V}$ *de* X_e, *il existe* $a \in \mathcal{F}$ *tel que* $X_i \subset \mathcal{V}$ *pour tout* $i \in a$.

On vérifie aisément que la relation $R(\mathcal{F}, e)$ est une relation de pseudo-convergence sur 2^E.

On dira que cette relation définit la *pseudo-topologie forte* de 2^E.

(22) Il existe des espaces E non séparés pour lesquels cet énoncé serait en défaut

Lorsque E est un espace régulier, la pseudo-topologie forte est plus fine que la pseudo-topologie ordinaire définie au début de ce paragraphe.

On peut mettre sous la forme suivante la définition de $R(\mathcal{F}, e)$:

On dira que $R(\mathcal{F}, e)$ *est vraie si, pour tout recouvrement ouvert fini* $(\omega_j)_{j\in J}$ *de* X_e, *il existe* $a\in\mathcal{F}$ *tel que*

1) $\omega_j \cap X_i \neq \emptyset$ *pour tout* $j\in J$ *et tout* $i\in a$.

2) $X_i \subset \bigcup_{j\in J} \omega_j$ *pour tout* $i\in a$.

Sous cette forme on peut voir aisément que *la pseudo-topologie forte est une topologie*. Cette topologie est séparée lorsque E est un espace normal.

Remarque. — Désignons par F l'ensemble de *tous* les sous-ensembles d'un espace topologique E. On peut conserver la définition ci-dessus pour définir sur F une pseudo-topologie forte. Ici encore, cette pseudo-topologie est une topologie, mais celle-ci n'est pas en général séparée.

8. — Rapports entre les espaces E et 2^E lorsque E est un espace compact.

Nous allons ici énoncer sans démonstration une série de propositions dont certaines ne font que généraliser des propriétés déjà connues dans le cas où E est métrique.

Soit E un espace compact et 2^E l'espace de ses sous-ensembles fermés. L'espace 2^E est compact.

1) L'homéomorphie de deux espaces 2^E, $2^{E'}$ n'entraîne pas l'homéomorphie de E et E'. Par exemple, pour tout espace E dénombrable et infini, 2^E est homéomorphe à l'ensemble réunion de l'ensemble parfait triadique de Cantor et des milieux de ses intervalles contigus.

2) Si E est connexe, 2^E l'est aussi, et réciproquement. Plus généralement, si E est une somme topologique finie : $E = \sum_{i\in I} E_i$, où I est un ensemble fini d'indices, et où $E_i \neq \emptyset$ pour tout i, on a :

$$2^E = \sum_{a\subset I} \left(\prod_{i\in a} 2^{E_i}\right).$$

Il en résulte que si E possède n composantes connexes, 2^E en possède $(2^n - 1)$; si E possède $\aleph$ composantes connexes, 2^E en possède $2^{\aleph}$.

Si E est totalement discontinu (resp. parfait), 2^E l'est aussi, et réciproquement.

Si E est localement connexe, 2^E l'est aussi, et réciproquement.

Si E est métrisable, 2^E l'est aussi, et réciproquement.

Si E est connexe et métrisable, deux points quelconques de 2^E peuvent être joints par un arc simple. Ceci résulte de l'énoncé suivant : Pour tout fermé $F \subset E$, il existe une famille $F(t)$ de sous-ensembles fermés de $E \, (0 \leqslant t \leqslant 1)$, avec $F(0) = F$ et $F(1) = E$, $F(t)$ étant croissant et continu lorsque t varie.

3) Relation multivoque entre E et 2^E :

Soit $x \in E$ et $y \in 2^E$. On dira que $R(x, y)$ est vraie si l'on a $x \in X_y$. Cette relation est une relation fermée.

Reprenons les notations du paragraphe 1.

L'ensemble $\mathcal{X}(y)$ $\big($resp. $\mathcal{Y}(x)\big)$ varie continûment avec y (resp. x). Pour tout fermé (resp. ouvert) $A \subset 2^E$, $\mathcal{X}(A)$ est fermé (resp. ouvert) dans E. Mêmes résultats pour $\mathcal{Y}(B)$, où $B \subset E$.

A tout point $y \in 2^E$, associons l'ensemble des sous-ensembles fermés de E inclus dans X_y ; c'est un sous-ensemble fermé de 2^E contenant y. Cette relation définit une application de 2^E dans $(2)^{2^E}$; cette application est continue.

4) Soit K l'ensemble des sous-continus de E : c'est un sous-ensemble fermé de 2^E.

Si E est connexe, K l'est aussi, et réciproquement.

Si E est localement connexe, K l'est aussi ; mais la réciproque est fausse ([23]). En général K a un nombre de dimensions infini ; si ce nombre est fini, E est de dimension 1 et possède (si E est connexe) une structure analogue à celle d'un réseau linéaire fini.

Si E est connexe et métrisable, deux points quelconques de K peuvent être joints par un arc simple de K ; on peut d'ailleurs préciser cet énoncé comme ci-dessus, au (2).

5) Pour tout $y \in K$, désignons par $k(y)$ l'ensemble des sous-continus de X_y. L'ensemble $k(y)$ est un sous-continu de K. On peut montrer que $k(y)$ possède, en fonction de y, la semi-continuité supérieure ; mais en général $k(y)$ ne varie pas continûment.

([23]) Par exemple, si E est le continu obtenu comme fermeture de la courbe plane d'équation $y = \sin \frac{1}{x} \, (0 < x \leqslant 1)$.

Lorsque E est métrisable, il existe un résiduel A de points de K en lesquels $k(y)$ varie continûment.

Il est intéressant d'étudier la structure du continu X_y et du continu $k(y)$ lorsque $y \in A$. On peut le faire assez aisément lorsque E est connexe et localement euclidien, par exemple lorsque E est une sphère à deux dimensions ; dans ce cas les continus X_y sont ceux que nous avons appelés « continus linéaires » dans une étude antérieure (24) ; ils sont homéomorphes à des continus plans obtenus comme intersection d'une suite décroissante de domaines de Jordan d'allure « serpentine ».

Les continus $k(y)$ correspondants sont à deux dimensions.

Il serait intéressant aussi d'étudier quels sont les continus E tels que $A \equiv K$.

9. — Notions de pseudo-convergence sur l'ensemble des applications d'un espace X dans un espace Y.

Soient X et Y deux espaces topologiques et Y^X l'ensemble des applications f de X dans Y.

Il existe sur Y^X plusieurs relations intéressantes de pseudo-convergence.

1) Pseudo-convergence uniforme.

Si Y est un espace uniforme, on dira que la famille $(f_i)_{i\in I}$ d'applications de X dans Y pseudo-converge uniformément vers f suivant un filtre $\mathcal{F}$ sur I si, pour tout entourage $\mathcal{V}$ de la structure uniforme de Y, il existe un $a \in \mathcal{F}$ tel que, pour tout $i \in a$, et tout $x \in X$, $f(x)$ et $f_i(x)$ soient voisins d'ordre $\mathcal{V}$.

Supposons désormais que Y est un espace topologique quelconque.

2) Pseudo-convergence simple.

On dira que la famille $(f_i)_{i\in I}$ pseudo-converge vers f suivant le filtre $\mathcal{F}$ sur I si pour tout x, et tout voisinage $\mathcal{V}$ de $f(x)$ dans Y, il existe un $a \in \mathcal{F}$ tel que, pour tout $i \in a$, on ait $f_i(x) \in \mathcal{V}$.

3) Pseudo-convergence des ensembles représentatifs.

On dira que la famille $(f_i)_{i\in I}$ pseudo-converge vers f suivant le filtre $\mathcal{F}$ sur I si :

a) Pour tout $x \in X$, pour tout voisinage $\mathcal{V}_{(x)}$ de x dans X et tout

(24) Choquet, Points invariants et structure des continus, *C. R. Acad. Sc.*, 10 mars 1941, pp. 376-379.

voisinage $\mathcal{V}_{(y)}$ de $y=f(x)$ dans Y, il existe un $a \in \mathcal{F}$ tel que pour tout $i \in a$ on ait $\mathcal{V}_{(y)} \cap f_i(\mathcal{V}_{(x)}) \neq \emptyset$.

b) Pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$ tel que $y \neq f(x)$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{(x)}$ de x, un voisinage $\mathcal{V}_{(y)}$ de y et un $a \in \mathcal{F}$ tels que pour tout $i \in a$ on ait :

$$\mathcal{V}_{(y)} \cap f_i(\mathcal{V}_{(x)}) = \emptyset.$$

Cette définition entraîne en particulier que l'ensemble représentatif, dans l'espace $X \times Y$, de l'application f soit fermé.

Si toutes les f_i ont des ensembles représentatifs fermés, il est immédiat que cette notion de pseudo-convergence est équivalente à la notion de pseudo-convergence des ensembles fermés représentatifs des applications f_i.

C'est en particulier le cas si Y est séparé et si les applications étudiées sont les applications continues de X dans Y. Lorsque X et Y sont localement compacts, cette pseudo-convergence définit une topologie sur l'ensemble des applications continues de X dans Y.

4) Pseudo-convergence uniforme locale.

On dira que la famille $(f_i)_{i \in I}$ pseudo-converge vers f, suivant le filtre $\mathcal{F}$ sur I si, pour tout $x \in X$ et tout voisinage $\mathcal{V}_{(y)}$ de $y=f(x)$ dans Y, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{(x)}$ de x et un élément $a \in \mathcal{F}$ tels que, pour tout $i \in a$ et tout $x' \in \mathcal{V}_{(x)}$, on ait $f_i(x') \in \mathcal{V}_{(y)}$.

Cette définition entraîne évidemment que la pseudo-limite f soit une application continue ; lorsque X est compact et que Y est un espace uniforme, cette pseudo-convergence uniforme locale est la pseudo-convergence uniforme ; lorsque X est localement compact et Y uniforme, on obtient la pseudo-convergence uniforme sur tout compact.

Discussion : Pour justifier le nom de « pseudo-convergences » donné aux notions que nous venons de définir, il faut vérifier que les axiomes F_1, F_2, F_3 sont satisfaits. On vérifie aisément qu'ils le sont à condition de se borner, dans la définition (3) aux applications à ensemble représentatif fermé, et dans la définition (4), aux applications continues.

On peut alors parler des topologies associées à ces pseudo-topologies.

TROISIÈME PARTIE

Rapports entre contingents et paratingents.

Après avoir rappelé un théorème connu sur les relations multivoques semi-continues, et indiqué dans quel sens on peut le généraliser, nous appliquerons ce théorème à la recherche des rapports qui existent entre les contingents et paratingents abstraits.

Voici dans un cas simple comment on peut traduire ces rapports : « En tous les points d'un résiduel d'un ensemble fermé cartésien E, le contingent de E est identique au paratingent de E. ». En fait, on est amené, même dans ce cas particulier, à donner un énoncé faisant intervenir à la fois E et un sous-ensemble fermé P de E ; pour donner cet énoncé, on doit définir un nouveau paratingent qui précise les rapports entre E et P.

Nous formulerons les résultats de cette étude générale sous deux formes, en vue d'extensions dans des sens différents.

10. — Semi-continuité supérieure et inférieure.

THÉORÈME I. — *Soit* R *une relation multivoque entre un espace métrique quelconque* X *et un espace métrique compact* Y.

Si, pour tout $x \in \mathrm{X}$, *l'ensemble* $\mathcal{Y}(x)$ *est fermé et possède la semi-continuité supérieure (resp. inférieure) en fonction de* x, *l'ensemble des points* x *en lesquels* $\mathcal{Y}(x)$ *varie continûment* [24] *a pour complémentaire un* F_σ *de première catégorie sur* X.

En particulier, si X *est complet,* $\mathcal{Y}(x)$ *varie continûment en tous les points d'un résiduel de* X.

Ce théorème est bien connu [25]. Sa démonstration suppose essentiellement Y compact ; on peut cependant en donner une extension

[24] On entend par là que $\mathcal{Y}(x)$ possède les semi-continuités supérieure et inférieure.

[25] Voir Kuratowski I ; voir aussi Choquet I, § 2.

valable pour tout espace topologique Y homéomorphe à un espace métrique séparable au sens de Fréchet, et pour les relations R, soit semi-continues inférieurement sur X, soit semi-continues supérieurement au sens fort sur X.

La démonstration de cette extension est basée sur le fait que tout espace métrique séparable Y est homéomorphe à un sous-ensemble Y_1 d'un espace métrique compact Y_2. La relation R entre X et Y induit une relation R_1 entre X et Y_1. On en déduit une relation R_2 entre X et Y_2 en remplaçant tout ensemble $\mathcal{Y}_1(x)$ par sa fermeture $\mathcal{Y}_2(x)$ dans Y_2.

Si R est semi-continue inférieurement sur X, il en est de même de R_1, donc aussi de R_2. On applique alors le théorème 1, puis on remarque que tout point de continuité de $Y_2(x)$ est un point de continuité de $Y_1(x)$, donc aussi de $Y(x)$.

Si R est semi-continue supérieurement au sens fort sur X, il en est de même de R_1. On voit alors aisément que R_2 est semi-continue supérieurement au sens fort, c'est-à-dire ici au sens ordinaire puisque Y_2 est compact. La démonstration s'achève ensuite comme ci-dessus.

Remarque: L'extension que nous venons de donner au théorème 1 est en un certain sens la plus large possible. En effet:

1) X étant le segment numérique (0 — 1) et Y un espace métrique séparable quelconque non compact, on peut aisément construire entre X et Y une relation R fermée (donc semi-continue supérieurement sur X) telle que $\mathcal{Y}(x)$ ne possède aucun point de continuité sur X.

Par exemple, si Y est la droite numérique, on prendra:

$$\mathcal{Y}(x) = \emptyset \text{ si } x \text{ est irrationnel,}$$
$$\mathcal{Y}(x) = \{q\} \text{ si } x = p/q \ (p/q \text{ irréductible}).$$

2) Soit Y un espace métrique non séparable ; on montre aisément qu'il existe un nombre $d > 0$ et un sous-ensemble $E \subset Y$ tels que E soit non-dénombrable et que les distances mutuelles de ses points soient $> d$. Supposons que E ait la puissance du continu ; et soit alors f une application biunivoque de $X(\equiv$ segment $(0 — 1))$ sur E. Pour tout $x \in X$, posons :

$$\mathcal{Y}(x) = E - f(x).$$

On vérifie aisément que l'ensemble fermé $\mathcal{Y}(x)$ possède la semi-continuité inférieure en fonction de x, et que $\mathcal{Y}(x)$ ne possède aucun point de continuité.

11. — Première forme du théorème topologique général.

Définitions : Soient U un espace métrique et E, P, deux sous-ensembles de U.

Soit d'autre part Δ un espace métrique séparable.

Pour tout couple ordonné (m, m') de points *distincts* de U tels que $m \in P$ et $m' \in E$, soit $\delta(m, m')$ un sous-ensemble fermé de Δ (éventuellement vide) qui, pour tout m' fixe, possède la semi-continuité inférieure en fonction de m ([26]).

1) Pour tout point $m \in P$ et pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de m dans U, posons

$$\mathcal{C}_{E}(\mathcal{V}) = \overline{\left[\bigcup_{m' \in \mathcal{V} \cap E} \delta(m, m')\right]}$$

puis $\mathcal{C}_{E}(m) = \bigcap_{\mathcal{V}} \mathcal{C}_{E}(\mathcal{V})$, cette intersection étant étendue à tous les voisinages $\mathcal{V}$ de m.

Nous dirons que le sous-ensemble fermé $\mathcal{C}^{1}_{E}(m)$ de Δ est le contingent de E en m, associé à la fonction δ.

2) Pour tout point $m \in P$ et pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de m dans U, posons

$$\mathscr{P}_{E,\,P}(\mathcal{V}) = \overline{\left[\bigcup_{\substack{m' \in \mathcal{V} \cap P \\ m \in \mathcal{V} \cap E}} \delta(m, m')\right]}$$

puis $\mathscr{P}_{E,\,P}(m) = \bigcap_{\mathcal{V}} \mathscr{P}_{E,\,P}(m)$, cette intersection étant étendue à tous les voisinages $\mathcal{V}$ de m.

On a $\mathcal{C}_{E}(m) \subset \mathscr{P}_{E,\,P}(m)$ ([27]), et d'autre part le sous-ensemble fermé $\mathscr{P}_{E,\,P}(m)$ de Δ possède évidemment la semi-continuité supérieure en fonction de m.

([26]) On se souviendra mieux du sens de ces notations en remarquant que U est l'Univers contenant les êtres à étudier, que E est l'Ensemble à étudier, que P est surtout intéressant lorsqu'il est Parfait; enfin les notations Δ, δ rappellent que Δ peut être, dans l'étude des contingents et paratingents des ensembles cartésiens, l'espace des directions δ de droites ou demi-droites de R_n.

Il pourra se faire qu'incidemment, ou pour certaines fonctions δ, on ait sur $(E \cap P)$:

$$\delta(m, m') = \delta(m', m) ;$$

c'est ce qui se produit lorsque $U = R_n$, $\delta(m, m')$ désignant la direction de la droite (mm').

([27]) On peut remarquer que l'on pourrait déduire la définition du contingent $\mathcal{C}_{E}(m)$ de celle du paratingent $\mathscr{P}_{E,\,P}(m)$. En effet, on a :

$$\mathcal{C}_{E}(m) \equiv \mathscr{P}_{E,\,A}(m), \qquad \text{en posant} \qquad A = \left\{ m \right\}.$$

Nous dirons que $\mathcal{L}_{E,P}(m)$ est le paratingent de E en m, relatif à l'ensemble P, et associé à la fonction δ.

Théorème 2. — *Avec les notations précédentes, en tous les points m d'un sous-ensemble* $A \subset P$ *dont le complémentaire* $(P - A)$ *est un* F_σ *de* 1re *catégorie sur* P, *on a :*

$$\mathcal{L}_{E,P}(m) = \mathcal{C}_E(m).$$

Démonstration : Pour $m \in P$ et $\rho > 0$, désignons par $\Sigma(m, \rho)$ la sphère ouverte de U, de centre m et de rayon ρ.

L'ensemble $\bigcup_{m' \in \Sigma(m,\rho) \cap E} \delta(m, m')$ possède la semi-continuité inférieure en fonction de m. Il en est donc de même de sa fermeture $\mathcal{C}_E[\Sigma(m, \rho)]$.

Posons $$\mathcal{L}_{E,P,\rho}(m) = \sup . \, \mathcal{C}_E[\Sigma(m', \rho)]_{\mathcal{F}},$$

$\mathcal{F}$ désignant le filtre des voisinages de m sur P.

On montre aisément que

$$\mathcal{L}_{E,P}(m) = \bigcap_{\rho > 0} \mathcal{L}_{E,P,\rho}(m) \tag{1}$$

et on a d'autre part

$$\mathcal{C}_E(m) = \bigcap_{\rho > 0} \mathcal{C}_E[\Sigma(m, \rho)]. \tag{2}$$

Pour tout ρ, en tous les points d'un sous-ensemble A_ρ de P, dont le complémentaire $(P - A_\rho)$ est un F_σ de 1re catégorie sur P, $\mathcal{C}_E[\Sigma(m, \rho)]$ est, d'après l'extension du théorème 1, une fonction continue de m. Donc en tous les points de A_ρ, on a :

$$\mathcal{C}_E[\Sigma(m, \rho)] = \mathcal{L}_{E,P,\rho}(m). \tag{3}$$

Comme $\mathcal{C}_E[\Sigma m, \rho)]$ et $\mathcal{L}_{E,P,\rho}(m)$ sont des fonctions croissantes de ρ, on peut, dans les seconds membres des formules (1) et (2), prendre l'intersection relativement à une suite discrète de valeurs de ρ, par exemple $\rho = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

Soit A l'intersection des A_ρ correspondants.

En tous les points de A, les formules (1), (2) et (3) montrent que l'on a [28] :

$$\mathcal{C}_E(m) = \mathcal{L}_{E,P}(m).$$

[28] A est seulement une partie de l'ensemble des points de P en lesquels cette égalité a lieu. Mais on peut montrer aisément que l'ensemble des points de P en lesquels cette égalité a lieu est cependant bien aussi, comme A, un G_δ.

Soit A' l'ensemble des points de continuité de $\mathcal{L}_{E,P}(m)$, et posons : $A'' = A' \cap A$.

D'après le théorème 1 et la définition de A, l'ensemble $(P - A'')$ est un F_σ de 1^re catégorie sur P lorsque Δ est compact. En particulier, si P est complet, A'' est un résiduel de P. Donc lorsque Δ est compact et que P est complet, en tous les points d'un résiduel de P le paratingent varie continûment et est identique au contingent.

Remarque : Il résulte de l'énoncé du théorème 2 et de l'inégalité $\mathcal{C}_E(m) \subset \mathcal{L}_{E,P}(m)$, qu'en tous les points de A le contingent $\mathcal{C}_E(m)$ possède la semi-continuité supérieure. Ceci est à rapprocher de l'énoncé classique de Baire.

Extensions du théorème 2.

1. Les points m' de $(E - P)$ ne jouent qu'un rôle passif de paramètres. Cette remarque permet d'étendre le théorème précédent en ne supposant plus E doué d'une métrique :

Prenons pour U un ensemble abstrait quelconque ; P sera un sous-ensemble de U doué d'une métrique définie par une distance $d(m_1, m_2)$. On se donne d'autre part, pour tout couple de points distincts (m, m') où $m \in P$ et $m' \in E$, un nombre $\varepsilon(m, m') > 0$ assujetti seulement à varier continuement en fonction de m pour tout m' fixe, et à être égal à $d(m, m')$ lorsque éventuellement on a $m' \in P$.

Cette quasi-métrique entre E et P suffit pour définir les sphères $\Sigma(m, \rho)$; les autres définitions s'en déduisent. Les conclusions restent les mêmes.

2. En vue de l'étude de la courbure, de l'osculation, etc., on peut envisager des fonctions δ définies, non plus pour des couples de points, mais pour des triplets, des quadruplets, etc., de points.

Plus précisément, n étant un entier positif donné, on suppose que, pour tout ensemble ordonné $m, m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots, m^{(n)}$ de points distincts de U, où $m \in P$ et $m^{(i)} \in E$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, l'expression

$$\delta(m, m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots, m^{(n)})$$

désigne un sous-ensemble fermé de Δ qui, lorsque les $m^{(i)}{}_{(i=1,2,\ldots,n)}$ sont fixes, possède la semi-continuité inférieure en fonction de m.

Il en résulte des contingent et paratingent associés à δ, pour lesquels le théorème 2 est encore valable.

Tout ceci resterait d'ailleurs encore valable si on remplaçait la métrique sur E par une quasi-métrique, comme dans la 1^re extension ci-dessus.

3. On a besoin, dans certains problèmes concernant la paramétrisation des courbes et variétés, de considérer E et P comme des ensembles paramétrés.

Par exemple, soit U' un espace métrique auxiliaire et deux sous-ensembles E' et P' de U'.

Soit f une application de U' dans U, continue en tout point de P' et telle que $f(E') \subset E$ et $f(P') \subset P$.

La fonction $\delta(m, m')$ étant définie dans U, on en déduit de la façon suivante une fonction $\delta'(\mu, \mu')$ définie dans U' :

Pour tout couple (μ, μ') de points distincts de U', où $\mu \in P'$ et $\mu' \in E'$, posons :

$$\delta'(\mu, \mu') = \delta[f(\mu), f(\mu')] \quad \text{si} \quad f(\mu) \neq f(\mu')$$

et $$\delta'(\mu, \mu') = \emptyset \quad \text{si} \quad f(\mu) = f(\mu').$$

Il en résulte des contingent et paratingent associés à δ' dans U', pour lesquels le théorème 2 est encore valable.

12. — Seconde forme du théorème topologique général.

Les définitions des ensembles $\mathcal{C}_E(m)$ et $\mathcal{P}_{E,P}(m)$ sont purement topologiques et pourraient être données dans un espace topologique U quelconque. Par contre la démonstration que nous avons donnée du théorème 2 a un caractère métrique puisqu'elle fait intervenir des voisinages $\mathcal{V}$ qui sont des sphères $\Sigma(m, \rho)$.

Le théorème 3 que nous allons énoncer permettrait de donner une démonstration purement topologique du théorème 2 : Il suffirait pour cela de remarquer que $\delta(m, m')$ peut être considérée comme une fonction définie sur le sous-ensemble $P \times E$ de l'espace produit $U \times U$.

Ce théorème 3 va d'autre part permettre une extension du théorème 2 au cas où $\delta(m, m')$ est définie seulement pour certains couples (m, m') ; ceci permettra plus tard d'aborder certains problèmes comme ceux qui concernent les paratingents de rang supérieur [29].

Définitions : Soient X et Y deux espaces métriques, $(X \times Y)$ leur produit topologique, et Q l'ensemble représentatif dans $(X \times Y)$ d'une application continue f de X dans Y.

Soit d'autre part $F \subset [(X \times Y) - Q]$.

Pour tout $a \in F$, soit $\delta(a)$ un sous-ensemble fermé, éventuellement vide, d'un espace métrique séparable Δ.

[29] Cf. Bouligand I, page 127.

Pour tout $m \in X \times Y$, désignons par $[m]_X$ (resp. $[m]_Y$) l'ensemble des points de $(X \times Y)$ qui ont même première (resp. seconde) coordonnée que m.

Pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de m dans $(X \times Y)$, posons :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}}(m) = \overline{\left[\bigcup_{a \in F \cap \mathcal{V} \cap [m]_X} \delta(a)\right]}\,; \qquad \mathcal{P}_{\mathcal{V}}(m) = \overline{\left[\bigcup_{a \in F \cap \mathcal{V}} \delta(a)\right]}.$$

Puis posons : $\mathcal{C}(m) = \bigcap\limits_{\mathcal{V}} \mathcal{C}_{\mathcal{V}}(m)\,; \qquad \mathcal{P}(m) = \bigcap\limits_{\mathcal{V}} \mathcal{P}_{\mathcal{V}}(m),$

les intersections étant étendues à tous les voisinages de m.

On a évidemment $\mathcal{C}(m) \subset \mathcal{P}(m)$, et $\mathcal{P}(m)$ possède la semi-continuité supérieure en fonction de m.

Nous dirons que $\mathcal{C}(m)$ et $\mathcal{P}(m)$ sont respectivement les contingent et paratingent relatifs à X, Y, Q, F, δ au point m.

Théorème 3. — *Avec les notations précédentes, s'il existe une base dénombrable* $(\mathcal{V}_i)_{i=1,2,\ldots}$ *de voisinages de* Q *dans* $(X \times Y)$ *telle que, pour tout i,* $\mathcal{C}_{\mathcal{V}_i}(m)$ *possède la semi-continuité inférieure en fonction de* m $(m \in Q)$, *en tous les points* m *d'un sous-ensemble* $B \subset Q$ *dont le complémentaire* $(Q - B)$ *est un* F_σ *de* 1^{re} *catégorie sur* Q, *on a :*

$$\mathcal{P}(m) = \mathcal{C}(m).$$

Démonstration : Pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de Q, posons

$$\mathcal{P}'_{\mathcal{V}}(m) = \sup.\, \mathcal{C}_{\mathcal{V}}(m')_{\mathcal{F}}\,,$$

$\mathcal{F}$ désignant le filtre des voisinages de m sur Q.

Il résulte aisément de la définition de $\mathcal{P}(m)$ que l'on a :

$$(1) \qquad \mathcal{P}(m) = \bigcap_{\mathcal{V}} \mathcal{P}'_{\mathcal{V}}(m) = \bigcap_{i=1,2,\ldots} \mathcal{P}'_{\mathcal{V}_i}(m).$$

On a d'autre part :

$$(2) \qquad \mathcal{C}(m) = \bigcap_{i=1,2,\ldots} \mathcal{C}_{\mathcal{V}_i}(m).$$

D'après le théorème 1, $\mathcal{C}_{\mathcal{V}_i}(m)$ varie continûment en tous les points d'un sous-ensemble $B_i \subset Q$ dont le complémentaire $(Q - B_i)$ est un F_σ de 1^{re} catégorie sur Q.

En tout point m de B_i, on a donc : $\mathcal{P}'_{\mathcal{V}_i}(m) = \mathcal{C}_{\mathcal{V}_i}(m)$. Donc, d'après les relations (1) et (2), en tout point m de $B_\omega = \bigcap\limits_i B_i$, on a

$$\mathcal{C}(m) = \mathcal{P}(m).$$

On peut faire les mêmes remarques qu'à propos du théorème 2.

Deux cas généraux d'application du théorème 3.

1. *L'ensemble* $\mathcal{S}(a)$ *varie continûment avec a* $(a \in \mathrm{F})$, *et il existe un sous-ensemble* $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ *tel que* F' *soit partout dense sur* F *et que les sections* $(\mathrm{F}' \cap [m]_{\mathrm{X}})$ *possèdent la semi-continuité inférieure en fonction de m* $(m \in \mathrm{Q})$.

Désignons en effet par $c(m)$ et $p(m)$ les contingent et paratingent relatifs à X, Y, Q, F', $\mathcal{S}$, au point m $(m \in \mathrm{Q})$.

On montre aisément que, pour tout voisinage *ouvert* $\mathcal{V}$ de Q, l'ensemble $c_{\mathcal{V}}(m)$ possède la semi-continuité inférieure en fonction de m. Donc le théorème 3 s'applique à $c(m)$ et $p(m)$.

Soit B l'ensemble des points de Q en lesquels $c(m) = p(m)$. On a en tout point $m \in \mathrm{Q}$:

$$c(m) \subset \mathcal{C}(m)$$

et $p(m) = \mathcal{P}(m)$ à cause de la continuité de $\mathcal{S}(a)$ et de l'identité $\overline{\mathrm{F}'} = \overline{\mathrm{F}}$.

Donc en tout point de B, on a :

$$\mathcal{P}(m) = p(m) = c(m) \subset \mathcal{C}(m).$$

Comme $\mathcal{C}(m) \subset \mathcal{P}(m)$, on a bien $\mathcal{C}(m) = \mathcal{P}(m)$.

Remarque 1. — Parmi les sous-ensembles $\mathrm{F}'' \subset \mathrm{F}$ tels que les sections $(\mathrm{F}'' \cap [m]_{\mathrm{X}})$ possèdent la semi-continuité inférieure en fonction de m, il en existe un contenant tous les autres, à savoir leur réunion (30). Si ce dernier est partout dense sur F, nous le prendrons pour ensemble F' ; sinon il n'existe aucun ensemble F' répondant à la question.

Remarque 2. — Plus généralement, le même raisonnement peut se répéter toutes les fois qu'il existe un sous-ensemble $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ pour lequel le théorème 3 s'applique, et pour lequel on a $p(m) = \mathcal{P}(m)$ en tous les points du sous-ensemble $\mathrm{B} \subset \mathrm{Q}$ sur lequel $c(m) = p(m)$.

2. *Pour tout* $m \in \mathrm{F}$ *l'ensemble* $(\mathrm{E} \cap [m]_{\mathrm{Y}})$ *est ouvert sur* $[m]_{\mathrm{Y}}$ *et la restriction de* $\mathcal{S}(a)$ *à* $(\mathrm{E} \cap [m]_{\mathrm{Y}})$ *possède la semi-continuité inférieure en fonction de a.*

On vérifie en effet aisément que, pour tout $\mathcal{V}$ ouvert, $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}(m)$ possède la semi-continuité inférieure en fonction de m.

Ce cas important permet de donner une démonstration purement topologique du théorème 2. Il suffit de prendre, avec les notations

(30) Voir ci-dessus, § 4, page 72.

déjà utilisées :

$X = P$; $Y = U$; $f =$ application canonique de P dans U.

$F = (P \times E) - Q$, Q étant déjà défini par f.

et enfin $\delta(a) = \delta(m, m')$, avec $a = (m, m')$.

13. — Applications. Contingents et paratingents abstraits.

1. *Théorèmes de M. Denjoy.* — Soit Π un espace métrique complet, Δ un espace métrique séparable et $\big(\delta_i(\mu)\big)_{i \in I}$ une famille de fonctions telle que, pour tout $i \in I$, $\delta_i(\mu)$ désigne un sous-ensemble fermé de Δ qui possède la semi-continuité inférieure en fonction de μ $(\mu \in \Pi)$.

Soit d'autre part $\eta(i)$ une fonction numérique > 0 définie sur I. (Par exemple, si $\big(\delta_i(\mu)\big)_{i \in I}$ désigne une suite de fonctions

$$\big(\delta_n(\mu)\big)_{n = 1, 2, \ldots},$$

on pourra prendre $\eta(n) = \dfrac{1}{n}$; si l'on étudie la convergence suivant un filtre $\mathcal{F}$ sur I à base dénombrable, on prendra $\eta(i)$ telle que $\lim. \eta(i)_{\mathcal{F}} = 0$.)

Soit U l'ensemble produit $\big(\Pi \times \widehat{I}\big)$, où $\widehat{I} = I \cup i_\omega$, en désignant par i_ω un nouvel élément que l'on ajoute à I.

Tout point m de U est défini par ses coordonnées (μ, i), où $\mu \in \Pi$ et $i \in \widehat{I}$.

Posons $P = \Pi \times \{i_\omega\}$; $E = (U - P)$.

Pour $m = (\mu, i_\omega)$, $m' = (\mu', i)$, où $i \in I$, nous poserons :

$$\varepsilon(m, m') = \eta(i) \quad \text{et} \quad \delta(m, m') = \delta_i(\mu).$$

Nous pouvons alors définir dans U les contingent et paratingent relatifs à P, E, δ. En particulier, le contingent $\mathcal{C}_E(m)$ au point $m = (\mu, i_0)$ de P est identique à l'ensemble limite supérieure de $\delta_i(\mu)$ lorsque $\eta(i) \to 0$.

Nous sommes dans les conditions de la 1^re extension du théorème 2.

Nous retrouvons ainsi sous une forme géométrique condensée les trois théorèmes topologiques fondamentaux de M. Denjoy [31].

Par exemple, si Π désigne un ensemble fermé cartésien, et $\big(\delta_i(\mu)\big)_{i \in I}$ une suite $\big(f_n(\mu)\big)$ de fonctions numériques continues sur Π et convergeant vers une fonction limite, nous retrouvons ce résultat

[31] Denjoy I, pp. 175, 199 et 208.

de Baire, qu'en tous les points d'un résiduel de Π la convergence de la suite est uniforme et la fonction limite continue.

2. *Courbure sur un ensemble cartésien.*

Nous allons, sur l'exemple de la courbure, montrer comment on peut adapter des définitions connues pour se mettre dans les conditions d'applicabilité des théorèmes généraux 2 et 3.

Soit E un ensemble fermé de l'espace R_n. Pour tout triplet de points distincts (m_1, m_2, m_3) de E, posons :

$$\delta(m_1, m_2, m_3) = \text{courbure du cercle passant par ces points.}$$

Nous sommes dans les conditions de la 2^e extension du théorème 2, en convenant de poser :

$$P = E\,(^{32})\,; \qquad U = R_n\,; \qquad \Delta = \text{segment } 0 \leqslant \delta \leqslant +\infty.$$

Les contingent et paratingent associés à ces définitions seront dits contingent et paratingent de courbure au sens large.

Mais on peut remarquer que ce contingent au sens large n'est pas identique au contingent de courbure de M. Bouligand (33).

Peut-on appliquer nos théorèmes généraux au contingent de courbure au sens de M. Bouligand ? Il faut d'abord pour cela lui associer une notion de paratingent.

Définitions. — α) *Contingent et paratingent de courbure au sens de M. Bouligand.* — Soient m' et $m'' \in E$ (avec $m' \neq m''$), et $\overrightarrow{m't'}$ un rayon du contingent linéaire de E en m'.

Posons $\rho(\overrightarrow{m't'}, m'') = $ courbure du cercle $(\overrightarrow{m't'}, m'')$.

Pour tout $m \in E$, posons :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(m) = \underset{m' = m\,;\; m'' \to m}{\text{ens. lim. sup.}}\ \rho(\overrightarrow{m't'}, m'')$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(m) = \underset{m' \to m\,;\; m'' \to m}{\text{ens. lim. sup.}}\ \rho(\overrightarrow{m't'}, m'').$$

Il serait d'ailleurs aisé de donner des définitions de $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ ne faisant pas intervenir les éléments de contact linéaires de E, et qui soient ainsi directement transposables dans les espaces métriques généraux.

β) *Contingent et paratingent de courbure d'ordre* λ. — Soit un

(32) Cette restriction n'est pas essentielle et a pour seul but de simplifier l'exposé de cet exemple.

(33) Voir Bouligand I, p. 115. En fait M. Bouligand introduit là un contingent circulaire composé de cercles. Mais il est clair que nos remarques s'appliquent aussi à ces contingents circulaires.

nombre fixe $\lambda > 0$. Si (m_1, m_2, m_3) est un triplet ordonné de points distincts de E tel que $\frac{m_1m_2}{m_1m_3} < \lambda$, nous dirons que c'est un triplet d'ordre λ.

Pour tout $m \in E$, les contingent et paratingent de courbure d'ordre λ, de E en m sont définis par :

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{C}_\lambda(m) = \underset{m_1 = m\ ;\ m_2 \text{ et } m_3 \to m}{\text{ens. lim. sup.}}\ \delta(m_1, m_2, m_3) \\ \mathcal{P}_\lambda(m) = \underset{m_1,\ m_2 \text{ et } m_3 \to m}{\text{ens. lim. sup.}}\ \delta(m_1, m_2, m_3)\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{les triplets } (m_1, m_2, m_3) \\ \text{étant d'ordre } \lambda.\end{array}$$

$\mathcal{C}_\lambda(m)$ et $\mathcal{P}_\lambda(m)$ sont des fonctions croissantes de λ.

En particulier, il est immédiat que $\mathcal{C}_1(m)$ et $\mathcal{P}_1(m)$ sont identiques aux contingent et paratingent de courbure au sens large définis plus haut.

Pour tout λ, l'ensemble des triplets d'ordre λ est ouvert dans l'espace des triplets de E. Il en résulte aisément que nous sommes dans les conditions d'applicabilité du théorème 3 (2^e^ cas général).

Donc en tous les points d'un résiduel A_λ de E, on a :

$$\mathcal{C}_\lambda(m) = \mathcal{P}_\lambda(m).$$

Posons $$\mathcal{C}_0(m) = \bigcap_\lambda \mathcal{C}_\lambda(m)\ ; \qquad \mathcal{P}_0(m) = \bigcap_\lambda \mathcal{P}_\lambda(m).$$

En tous les points du résiduel $A = \bigcap_\lambda A_\lambda = \bigcap_{n = 1, 2, \dots} A\left(\frac{1}{n}\right)$, on a aussi :

$$\mathcal{C}_0(m) = \mathcal{P}_0(m).$$

Or, on voit aisément que $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(m) = \mathcal{C}_0(m)$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(m) \subset \mathcal{P}_0(m)$ pour tout $m \in E$.

La relation $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{P}_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{P}_0$ montre donc qu'en tout point du résiduel A, on a

$$\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(m) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}(m).$$

3. *Étude des contingents et paratingents de rang 2* [34].

Soit E un ensemble fermé de R_n. Désignons par F l'ensemble des triplets ordonnés (m_1, m_2, m_3) de points distincts de E tels que m_1, m_2, m_3 soient alignés, avec m_2 entre m_1 et m_3.

[34] Pour la définition des paratingents de rang n, voir Bouligand I, page 127.

Et posons $\delta(m_1, m_2, m_3) =$ direction de la demi-droite $\overrightarrow{m_1 m_3}$ pour tout $(m_1, m_2, m_3) \in F$[35].

Posons enfin :

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{C}^{(2)}(m) = \underset{m_1 = m\,;\; m_2 \text{ et } m_3 \to m}{\text{ens. lim. sup.}}\, \delta(m_1, m_2, m_3) \\ \mathcal{P}^{(2)}(m) = \underset{m_1,\, m_2 \text{ et } m_3 \to m}{\text{ens. lim. sup.}}\, \delta(m_1, m_2, m_3)\end{array}\right\} \text{ où } (m_1, m_2, m_3) \in F.$$

Si E est quelconque, il se peut qu'en tout point de E, on ait :

$$\mathcal{C}^{(2)}(m) \neq \mathcal{P}^{(2)}(m).$$

Ceci tient à ce que, dans l'espace des triplets de points distincts de E, le sous-ensemble fermé F ne jouit d'aucune propriété permettant l'application du théorème 3.

Mais nous allons voir que, pour certains ensembles E, on peut cependant appliquer le théorème 3.

Définition. Noyau de stabilité de F. — Pour tout m_1 fixe, désignons par $F(m_1)$ l'ensemble des éléments (m_1, m_2, m_3) de F.

On peut toujours trouver, pour tout m_1, un sous-ensemble $\beta(m_1) \subset F(m_1)$ qui possède la semi-continuité inférieure en fonction de m_1. Par exemple $\beta(m_1) = \emptyset$. La réunion $N(m_1)$ de tous les $\beta(m_1)$ possédant cette propriété la possède aussi [30].

Nous appellerons $N = \bigcup_{m_1 \in E} N(m_1)$ le noyau de stabilité de F.

Si dans les définitions de $\mathcal{C}^{(2)}(m)$ et $\mathcal{P}^{(2)}(m)$ données ci-dessus, on remplace F par N, on obtient les ensembles $\mathcal{C}'^{(2)}(m)$ et $\mathcal{P}'^{(2)}(m)$ que nous appellerons contingent et paratingent stables de rang 2.

Le théorème 3 (1er cas général) leur est directement applicable. Donc, en tout point d'un résiduel de E, on a

$$\mathcal{C}'^{(2)}(m) = \mathcal{P}'^{(2)}(m).$$

Or on a évidemment $\mathcal{C}'^{(2)}(m) \subset \mathcal{C}^{(2)}(m)$ et $\mathcal{P}'^{(2)}(m) \subset \mathcal{P}^{(2)}(m)$. Donc, si en tout point m de E, on a $\mathcal{P}'^{(2)} = \mathcal{P}^{(2)}(m)$, on a aussi, en tout point d'un résiduel de E :

$$\mathcal{C}^{(2)}(m) = \mathcal{P}^{(2)}(m).$$

Un raisonnement géométrique direct montre que cette circonstance a lieu si, par exemple, E est un continu plan ou une surface de R_3 d'équation $z = f(x, y)$.

[35] On devrait, dans une théorie complète, envisager aussi l'ensemble F′ des triplets alignés (m_1, m_2, m_3) tels que m_1 soit entre m_2 et m_3, en désignant alors par $\delta(m_1, m_2, m_3)$ la direction de la droite portant ce triplet. Cette façon d'opérer conduit à deux contingents de rang 2, en général distincts, ce qui peut être précieux dans les applications géométriques.

Donc, si E *est un continu plan ou une surface de* R_3 *d'équation* $z = f(x, y)$, *en tous les points d'un résiduel de* E, *on a*

$$\mathcal{C}^{(2)}(m) = \mathfrak{T}^{(2)}(m).$$

Il en résulte par exemple que si en tout point d'un continu plan E le contingent de rang 2 est vide, il existe un sous-ensemble ouvert de E, partout dense sur E, et dont tout point a pour voisinage un arc strictement convexe [36].

De telles méthodes pourraient peut-être aider à la solution de problèmes tels que le suivant :

Montrer que si E désigne une rondelle de surface $z = f(x, y)$ où $(x^2 + y^2) \leqslant 1$, si E n'est pas convexe, il existe certainement un point de E en lequel le paratingent de rang 2 contient au moins deux rayons non colinéaires.

Nous indiquerons maintenant sans démonstration quelques applications du théorème 2, obtenues en faisant dans l'énoncé général $E \equiv P$.

4. *Applications ponctuellement lipschitziennes.*

Soit f une application continue d'un espace métrique complet E_1 (distance d_1) dans un espace métrique E_2 (distance d_2) telle que, pour tout $m \in E$, on ait

$$\underset{m' \to m}{\text{borne sup.}} \frac{d_2[f(m), f(m')]}{d_1[m, m']} < \infty .$$

Il existe alors un ouvert $\omega_1 \subset E_1$, partout dense sur E_1, dont tout point possède un voisinage sur lequel le rapport $\rho(m, m')$ ci-dessus est uniformément borné supérieurement.

5. *Isométries locales.*

Avec les mêmes notations, supposons que pour tout $m \in E$, on ait :

$$\lim_{m' \to m} . \rho(m, m') = 1 .$$

Alors, si E est séparable (au sens de Fréchet), il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une partition de E_1 en ensembles G_δ sur chacun desquels on a :

$$(1 - \varepsilon) < \rho(m, m') < 1 + \varepsilon.$$

Il en résulte par exemple que f conserve les mesures n-dimen-

[36] Ce résultat pourrait d'ailleurs se retrouver directement, par des considérations élémentaires.

sionnelles au sens de Carathéodory et plus généralement toute mesure de Hausdorff assez régulière [37].

6. *Homéomorphies avec rapport des aires borné.*

Soit H une homéomorphie entre deux domaines plans D_1 et D_2. Pour tout ensemble mesurable plan e, désignons par $\mu(e)$ sa mesure lebesguienne, Désignons, d'autre part, par $c(m, r)$ le cercle de centre m et de rayon r.

Supposons que, pour tout $m_1 \in D_1$, on ait :

$$\text{borne sup.}_{r \to 0} \frac{\mu[H(c(m, r))]}{\mu[c(m, r)]} < \infty \qquad (\text{resp.} > 0).$$

Il existe alors un ouvert $\omega_1 \subset D_1$, partout dense sur D_1 tel que, pour tout compact $K_1 \subset \omega_1$, et pour tout sous-ensemble mesurable $e_1 \subset K_1$, le rapport $\frac{\mu[H(e_1)]}{\mu[e_1]}$ soit uniformément borné supérieurement (resp. inférieurement) par une constante $\lambda > 0$ ne dépendant que de K_1.

7. *Arcs équivalents à leur corde.*

Soit E un arc simple rectifiable dans un espace métrique. Supposons que pour tout $m \in E$, on ait :

$$\lim_{m' \to m} \frac{\widehat{mm'}}{mm'} = 1.$$

Il existe alors pour tout $\varepsilon > 0$ un ouvert $\omega \subset E$, partout dense sur E tel que, sur toute composante connexe de ω, on ait :

$$(1 - \varepsilon) < \frac{\widehat{mm'}}{mm'} < (1 + \varepsilon).$$

8. *Épaisseur d'un ensemble parfait totalement discontinu* [34].

Soit E un ensemble parfait linéaire totalement discontinu situé sur une droite orientée xx'.

Pour tout couple ordonné (m_1, m_2) de points de E, si $e(m_1, m_2)$ désigne l'épaisseur moyenne [38] de E sur le segment $(m_1 m_2)$ nous poserons, en désignant par λ un nombre fixe > 0, mais d'ailleurs quelconque.

$$\delta(m_1, m_2) = +[\lambda + e(m_1, m_2)] \qquad \text{ou} \qquad -[\lambda + e(m_1, m_2)],$$

suivant que $\overline{m_1 m_2} > 0$ ou $\overline{m_1 m_2} < 0$.

[37] Voir Choquet, L'isométrie des ensembles, *Mathematica 20*, 1944, page 62.
[38] Voir Denjoy I, pp. 105 et 190.

Relativement à la fonction $\delta(m_1, m_2)$, le paratingent de E en tout point de E contient les nombres λ et $-\lambda$. Lorsque E est épais en soi, ce paratingent est même complet, c'est-à-dire identique à la réunion des segments $[\lambda, \lambda+1]$ et $[-\lambda, -(\lambda+1)]$ (39).

Donc, dans le cas général, en tous les points d'un résiduel de E, l'épaisseur inférieure de E en m est égale à o, à droite et à gauche ; et lorsque E est épais en soi, en tous les points m d'un résiduel de E, à droite et à gauche de m l'ensemble des épaisseurs est identique au segment $(0 - 1)$.

9. *Applications ponctuellement périodiques.*

Soit f une application continue d'un espace métrique complet E dans lui-même, telle que pour tout $m \in E$, il existe un entier $n > 0$ pour lequel on ait

$$f^n(m) = m.$$

Il existe alors un ouvert $\omega \subset E$, partout dense sur E, tel que tout point de ω possède un voisinage sur lequel f est une homéomorphie périodique.

14. — Applications. Contingent et paratingent ordinaires.

Les résultats que nous allons énoncer résultent de l'application du théorème 2 aux contingent et paratingent ordinaires (c.-à-d. linéaires). Nous nous écarterons toutefois, pour le paratingent, de la définition de M. Bouligand. Nous considérons le contingent et le paratingent comme associés à la fonction $\delta(m, m')$ du couple ordonné (m, m'), en désignant par $\delta(m, m')$ la direction de la demi-droite $\overrightarrow{mm'}$ d'origine m.

Un paratingent est donc pour nous, comme le contingent, un ensemble de directions de demi-droites, même lorsque, éventuellement, ce paratingent admet un centre de symétrie (par exemple lorsque, avec les notations du théorème 2, on prend $E \equiv P$).

Cette modification était indispensable puisque nous voulons comparer les contingents et paratingents, ce qui serait impossible si leurs éléments appartenaient à des ensembles différents (directions de demi-droites et directions de droites).

Le succès du théorème 2 pour l'étude tangentielle des ensembles cartésiens résulte de ce que toute hypothèse de raréfaction concer-

(39) Ceci tient à ce que, pour tout θ tel que $0 \leqslant \theta < 1$, il existe un couple de points m_1, m_2 de E vérifiant l'équation $e(m_1, m_2) = \theta$.

nant le contingent entraîne en certains points une raréfaction du paratingent. En outre il peut arriver que la nature du problème donne une indication supplémentaire sur le paratingent, par exemple qu'il possède un centre de symétrie ou qu'il contient seulement une ou deux composantes connexes (ce qui est le cas si l'ensemble $P = E$ est un continu). On profite donc, en certains points de l'ensemble, de deux faisceaux de renseignements sur l'ensemble $\mathcal{C}_E(m) = \mathcal{L}_{E,P}(m)$.

1. Le théorème 2 permet de redémontrer rapidement plusieurs résultats qui nous ont permis, dans notre thèse, de résoudre les problèmes suivants :

a) Recherche de la primitive d'une fonction par rapport à une fonction continue quelconque.

b) Le problème de Fréchet sur la paramétrisation dérivable des courbes, et son extension aux variétés n-dimensionnelles.

2. Structure d'un ensemble fermé E de R_n dont le contingent en tout point de E ou en tout point d'un sous-ensemble fermé P de E est porté par une droite ou par une variété linéaire à p dimensions.

Voir l'énoncé dans (Choquet I). Le théorème 2 en donne une démonstration immédiate.

3. *Si* E *est un ensemble fermé de* R_n *dont le contingent en tout point est situé dans une variété linéaire* $L_p(m)$ *et contient p rayons dont le coefficient d'indépendance linéaire* ([36]) *soit supérieur à une constante* λ_0, *la direction de la variété* $L_p(m)$ *est une fonction de m de 1^re^ classe de Baire.*

4. *Tout continu* E *de* R_3 *qui en tout point est de dimension 2 au sens de Menger-Urysohn, et dont le contingent en tout point est contenu dans un plan horizontal, est lui-même contenu dans un plan horizontal.*

Nous ne démontrerons pas ici ce théorème, sa démonstration assez longue faisant appel à certains résultats de la théorie de la dimension.

Remarquons seulement que c'est l'extension du résultat plus simple suivant :

Tout continu de R_3 dont le contingent en tout point est porté par une droite de direction fixe, est un segment de droite.

5. Soit, dans R_3, un ensemble fermé E dont le contingent en tout

point est situé dans un demi-espace fermé (par exemple si ce contingent est en tout point un demi-cône convexe).

En tous les points d'un résiduel de E, le paratingent, qui possède un centre de symétrie, est identique au contingent; il est donc situé dans un plan.

En particulier, si E est une surface homéomorphe à une sphère, en tous les points d'un résiduel de E, le paratingent, donc aussi le contingent, est un plan complet.

6. Soit dans R_3 une surface de Lipschitz E, d'équation $z=f(x, y)$, dont le contingent en tout point est privé de rayons intérieurs.

Alors, en tout point d'un résiduel de E le paratingent, donc aussi le contingent, est un plan.

Notons ici que des théorèmes métriques connus nous apprennent que *presque partout* sur E le contingent est un plan, mais ne nous apprennent rien sur le paratingent.

7. On sait que la dérivée $f'(x)$ d'une fonction dérivable $f(x)$ possède la propriété de Darboux. Ceci peut se traduire géométriquement par une propriété géométrique de la courbe représentative, dont voici une généralisation :

Si E est un arc simple ouvert plan dont le contingent en tout point se compose de deux rayons portés par une même droite, l'image de E sur le cercle trigonométrique, dans la représentation par tangentes parallèles, est un ensemble connexe.

On a une propriété analogue, mais un peu plus cachée, pour les surfaces dans R_3 :

Si E *est une surface de* R_3 *homéomorphe à un disque ouvert plan, dont le contingent en tout point est un plan complet, l'image sphérique de* E *(définie par l'intermédiaire de la normale, orientée d'un côté invariable de* S*) est un ensemble connexe* ([40]).

Sous les mêmes hypothèses, il est faux en général que l'image sphérique d'un sous-continu de E, et même d'un arc simple de E, soit un ensemble connexe.

(Parvenu aux Annales en avril et mai 1948.)

([40]) Voir Interm. Rech. Math. Tome 2, 1946, fasc. 6, réponse 0514.

BIBLIOGRAPHIE

BLANC E. — I. Sur une propriété différentielle des continus de Jordan. *C. R.*, 196, 1933, p. 600.

II. Sur la structure de certaines lois générales régissant des correspondances multiformes. *C. R.*, 196, 1933, p. 1769.

BOULIGAND. — I. *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*. Paris, 1932.

II. Propriétés générales des correspondances multiformes. *C. R.*, 196, 1933, p. 1767.

BOURBAKI. — *Topologie générale*, chap. 1 et 2, Act. Sci. Hermann, Paris, 1940.

BRISAC. — I. Sur les fonctions multiformes. *C. R.*, 224, 1947, p. 92.

II. Les classes de Baire des fonctions multiformes. *C. R.*, 224, 1947, p. 757 et p. 257.

CHARPENTIER M. — Sur la semi-continuité d'inclusion des trajectoires de la mécanique. *C. R.*, 196, 1933, p. 1771.

CHOQUET. — Application des propriétés descriptives de la fonction « contingent ». *Thèse*, Paris, 1946 ; *Journal de Math.*, 1947.

DENJOY. — *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique*, IIe partie : Métrique et topologie d'ensembles parfaits et de fonctions. Paris, 1941.

KURATOWSKI. — I. Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts. *Fund. Math.* 11, 1928, pp. 169-186.

II. Sur la théorie des fonctions dans les espaces métriques. *Fund Math.* 17, 1931, pp. 275-283.

III. Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés. *Fund. Math.* 18, 1932, p. 148-160.

IV. Topologie I, in *Monografje Matematyczne*, 1933.

MENGER. — Calcul des variations dans les espaces distanciés généraux. *C. R.*, 202, 1936, p. 1007.

PAUC. — I. De quelques propriétés locales des continus euclidiens. *C. R.*, 203, 1936, p. 153.

II. Semi-continuité d'inclusion dans les espaces généraux de M. Fréchet. *C. R.*, 206, 1938, p. 565.

III. Unification des processus générateurs des divers contingents et paratingents. *C. R.*, 206, 1938, p. 1242.

PAUC, HAUPT, NÖBELING. — Uber Abhängigkeitsraüme, *J. f. die r. und ang. Math.*, 181, 1939, pp. 193-207.