GEORGES DE RHAM

Remarque au sujet de la théorie des formes différentielles harmoniques

Annales de l'université de Grenoble, tome 23 (1947-1948), p. 55-56
<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1947-1948__23__55_0>

REMARQUE AU SUJET DE LA THÉORIE DES FORMES DIFFÉRENTIELLES HARMONIQUES

par **Georges de RHAM** (Lausanne et Genève).

A la fin de mon article « Sur la théorie des formes différentielles harmoniques » (1), j'ai énoncé, en en esquissant une démonstration, le théorème suivant : *Une variété close et analytique, sur laquelle il est possible de définir un ds^2 analytique, peut être représentée analytiquement et topologiquement sur une variété analytique plongée dans un espace euclidien.* Ce théorème apporte un complément, que je croyais nouveau, à un théorème bien connu de M. Whitney. Or, il a été énoncé et démontré d'une manière complète, en 1937 déjà, par *M. Salomon Bochner,* dans un mémoire fort intéressant (2) qui m'avait malheureusement échappé et qui sera lu avec grand profit par tous ceux qui s'intéressent à la théorie des formes différentielles harmoniques. L'étude qui y est faite de l'équation $\Delta\varphi = \lambda\varphi$ sur un espace de Riemann clos recouvre en partie l'étude de l'équation analogue et de l'équation $\Delta\mu = \beta$ faite dans (1) et dans (3) et permettrait de l'améliorer ou de la simplifier sur plusieurs points.

Dans ce Mémoire, M. Bochner étudie non seulement l'équation scalaire $\Delta\varphi = \lambda\varphi$, où Δ est l'opérateur de Laplace Beltrami, mais aussi l'équation tensorielle obtenue en remplaçant φ par un tenseur, $\varphi = (\varphi_{abc})$ par exemple, et Δ par l'opérateur que je désignerai ici par *lap,* défini en posant $lap\, \varphi_{abc} = g^{pq}\varphi_{abc,\,p,\,q}$, produit contracté de la

(1) Ces *Annales*, tome XXII, année 1946, p. 135-152. Je profite de la présente note pour indiquer une petite rectification à faire dans cet article : page 136, lignes 3 et 4 de la note (3), il faut lire « $\frac{1}{k}\,\omega_p(x, y)$ et $\frac{1}{k}\,\Omega\alpha$ » en supprimant les signes — qui figurent devant ces expressions.

(2) *S. Bochner*. Analytic mapping of compact riemann spaces into euclidean space (Duke Mathematical Journal III (1937), p. 339-354).

dérivée covariante seconde de φ avec le tenseur métrique fondamental.

Cet opérateur *lap* est-il équivalent, pour les tenseurs antisymétriques ou p-vecteurs, c'est-à-dire pour les formes différentielles extérieures, à l'opérateur Δ défini dans (1) et dans (3) ? La réponse est négative, sauf dans le cas où l'espace est euclidien. En désignant par $\Delta A_{i_1 \dots i_p}$ et $lap\, A_{i_1 \dots i_p} = g^{ab} A_{i_1 \dots i_p, a, b}$ les p-vecteurs qui se déduisent du p-vecteur $A_{i_1 \dots i_p}$ par les opérations Δ et *lap*, on a :

$$\Delta A_{i_1 \dots i_p} + lap\, A_{i_1 \dots i_p} = -\frac{1}{p!} \delta^{aj_1 \dots j_p}_{ci_1 \dots i_p} g^{cb} \sum_{\mu=1}^{p} A_{j_1 \dots j_{\mu-1} h j_{\mu+1} \dots j_p} R^h_{j_\mu ab}$$

où $\delta^{ab \dots c}_{ij \dots k}$ est le symbole de Kronecker généralisé et R^h_{jab} le tenseur de courbure. L'opérateur Δ est celui défini dans (1), $\Delta = d\delta + \delta d$ (qui correspond à $-\Delta$ dans (3)).

La formule ci-dessus, aux notations près, a été établie par *M. Roland Weitzenböck* (4). Dans le cas d'un espace euclidien, la courbure étant nulle, elle se réduit à la relation

$$-\Delta A_{i_1 \dots i_p} = lap\, A_{i_1 \dots i_p}$$

établie antérieurement par *M. L. E. J. Brouwer* (5), et retrouvée dans (3), où les opérateurs δ et Δ sont introduits sans mention des travaux précédents où ils interviennent déjà, travaux que j'ignorais. Je suis heureux de pouvoir ici réparer aussi cette seconde omission.

(Parvenu aux Annales le 30 décembre 1947.)

(3) *P. Bidal et G. de Rham.* Les formes différentielles harmoniques (Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 19, p. 1-49).

(4) *Dr Roland Weitzenböch.* Invariantentheorie (P. Noordhoff, 1923, Groningen), p. 393-397.

(5) *L. E. J. Brouwer.* Polydimensional Vectordistributions (Proceedings of the Royal Academy of Sciences, Amsterdam, tome 9 (1906), p. 66-78). — Remark on Multiple Integrals (Ibid., tome 22 (1920), p. 155-154).