Annales de l'université de Grenoble

Jean Dieudonné

Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym (III)

Annales de l'université de Grenoble, tome 23 (1947-1948), p. 25-53
<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1947-1948__23__25_0>

SUR LE THÉORÈME DE LEBESGUE-NIKODYM (III)

par **Jean DIEUDONNÉ** (Nancy et São-Paulo).

1. Introduction (¹).

Le sujet de ce travail diffère quelque peu de celui des deux articles antérieurs que nous avons publiés sous le même titre (²). Nous y considérions exclusivement des fonctions à valeurs *réelles*, ou des éléments d'espaces vectoriels réticulés (« espaces de Riesz ») qui les généralisaient ; au contraire, nous nous occupons dans ce travail de fonctions prenant leurs valeurs dans un *espace vectoriel topologique* F, et « intégrables » en un certain sens. On peut alors chercher à généraliser le théorème de Lebesgue-Nikodym classique de deux manières différentes. Ce dernier montre en effet essentiellement que toute fonction linéaire continue dans un espace L^1, à valeurs réelles, est de la forme $f \rightarrow \int gf\,d\mu$, où g est une fonction à valeurs réelles, mesurable et bornée. Lorsqu'il s'agit de fonctions à valeurs vectorielles, le produit gf d'une telle fonction f et d'une fonction réelle g est intégrable lorsque f est intégrable, g mesurable et bornée, ou lorsque g est intégrable, et f « bornée » en un certain sens que nous préciserons ; dans le premier cas, $\int gf\,d\mu$ est fonction linéaire de la fonction intégrable f à valeurs vectorielles, dans le second, fonction linéaire de la fonction intégrable g à valeurs réelles (les valeurs de l'intégrale étant toujours dans F) ; nous sommes donc conduits à étudier les fonctions linéaires continues, à valeurs dans F, et définies, soit dans un espace L^1 de fonctions à valeurs réelles, soit dans un espace de fonctions intégrables à valeurs dans F. Dans le premier

(¹) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.
(²) Voir [5] et [6].

cas, nous obtiendrons une généralisation du théorème de Lebesgue-Nikodym pour la notion d'intégrale la plus étendue de toutes celles données jusqu'ici, celle de Gelfand-Dunford (3) (cette généralisation a d'ailleurs déjà été donnée, avec des hypothèses plus restrictives sur F et sur la mesure considérée, par Gelfand (4) et Dunford-Pettis (5)) ; pour la généralisation du second type (qui, à ce que nous croyons, est nouvelle), nous sommes obligés, au contraire, de nous restreindre à l'intégrale de Bochner (6).

Le théorème de Lebesgue-Nikodym pour l'intégrale de Gelfand-Dunford nous permettra enfin d'aborder d'une autre manière le problème de la « *décomposition des mesures* », ou, comme nous dirons plutôt, le problème des « *mesures quotients* », abordé récemment par P. Halmos (7) par une méthode directe ; malheureusement, le résultat fondamental de Halmos, basé sur un lemme erroné de Doob, est lui-même inexact, tout au moins si on ne restreint pas davantage les conditions de son énoncé ; nous verrons comment on peut modifier cet énoncé de façon qu'il devienne correct et puisse même s'étendre à des cas plus généraux ; d'autre part, en restant au même point de vue que P. Halmos, nous donnerons des conditions suffisantes qui assurent aussi l'exactitude de son résultat.

2. L'espace de Kakutani.

L'instrument essentiel dont nous allons nous servir est la représentation très commode d'un espace L^1 de fonctions sommables, imaginée par S. Kakutani (8) ; rappelons brièvement en quoi elle consiste. Soit E un ensemble quelconque, μ une mesure définie sur une tribu $\mathfrak{T}$ de parties de E, telle que E soit mesurable et de mesure finie (9) ; alors les ensembles mesurables, pris modulo les ensembles

(3) Voir [10] et [8].
(4) Voir [10].
(5) Voir [9], p. 344, theorem 2. 1. 1.
(6) Pour la définition et les propriétés de cette intégrale, voir [3].
(7) Voir [11] et [12].
(8) Voir [13], p. 532-534.
(9) Il serait facile, en suivant Kakutani, d'associer un espace *localement compact* et totalement discontinu à un ensemble E muni d'une mesure pour laquelle E est mesurable mais de mesure *infinie* ; nous laissons au lecteur le soin d'étendre à ce cas les résultats démontrés ci-dessous.

Pour les notions de la théorie de l'Intégration dont nous faisons usage dans ce travail, voir [16], chap. II.

de mesure nulle (ou, ce qui revient au même, les classes de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables, où deux fonctions appartiennent à une même classe lorsqu'elles sont égales presque partout et dans ce cas seulement) forment une *algèbre booléienne* $\mathfrak{A}$; à cette algèbre, un théorème de Stone fait correspondre d'une façon bien déterminée un espace $\tilde{E}$ compact et totalement discontinu, tel que $\mathfrak{A}$ soit isomorphe à l'algèbre booléienne des ensembles *à la fois ouverts et fermés* de $\tilde{E}$; nous dirons que l'espace compact $\tilde{E}$ est l'*espace de Kakutani* attaché à l'ensemble E et à la mesure μ sur E. A toute classe de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables dans E correspond ainsi *une* fonction caractéristique d'un ensemble à la fois ouvert et fermé dans $\tilde{E}$; on étend aussitôt cette correspondance aux combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables (fonctions *étagées* sur la tribu $\mathfrak{T}$ où est définie μ), et on obtient ainsi un *isomorphisme* $u \to \tilde{u}$ de l'anneau des classes de fonctions étagées sur $\mathfrak{T}$, sur l'anneau des fonctions numériques continues dans $\tilde{E}$ et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ; en outre, on a $\|u\|_\infty = \|\tilde{u}\|$, le second membre désignant comme d'ordinaire la borne supérieure dans $\tilde{E}$ des valeurs de $|\tilde{u}|$. Cette dernière relation permet de prolonger par continuité l'isomorphisme $u \to \tilde{u}$ en un isomorphisme de l'anneau $L^\infty(E, \mu)$ de *toutes* les classes de fonctions mesurables et bornées sur E, sur l'anneau $C(\tilde{E})$ des fonctions *continues* dans $\tilde{E}$; on notera que cet isomorphisme conserve l'ordre (autrement dit, si $u \geqslant 0$ presque partout, on a $\tilde{u} \geqslant 0$ partout dans $\tilde{E}$).

Si on pose alors $\int \tilde{u}\, d\tilde{\mu} = \int u\, d\mu$, on définit une mesure de Radon $\tilde{\mu}$ sur $\tilde{E}$, et chaque espace $L^p(E, \mu)$ est isomorphe à l'espace correspondant $L^p(\tilde{E}, \tilde{\mu})$ ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$). Mais en outre, pour tout ensemble A mesurable dans $\tilde{E}$, il existe un ensemble B à la fois ouvert et fermé et dont la « différence symétrique » avec A (ensemble des points appartenant à l'un des deux ensembles A, B, sans appartenir à l'autre) est de mesure nulle ([10]). Tout ensemble ouvert non vide dans $\tilde{E}$ est de mesure > 0 ; on en déduit que si un ensemble *fermé* dans $\tilde{E}$ est de mesure nulle, son complémentaire est un ensemble ouvert *partout dense* et réciproquement. Pour toute fonction f mesurable dans $\tilde{E}$ et « essentiellement bornée » (c'est-à-dire dont le maximum et le minimum en mesure sont finis) il existe une fonc-

([10]) [13], p. 533, note 12.

tion continue dans $\tilde{E}$, égale à f presque partout. On en déduit aisément que si f est une fonction mesurable finie presque partout dans $\tilde{E}$, il existe une fonction bien déterminée, égale presque partout à f, et continue dans un ensemble ouvert partout dense, dont le complémentaire est de mesure nulle (11).

Tant qu'on ne fait pas de distinction entre des fonctions égales presque partout, on peut donc aussi bien raisonner sur la mesure $\tilde{\mu}$ que sur la mesure μ initiale donnée dans E. Par exemple, l'espace de Kakutani permet de donner une interprétation simple de l'espace *dual* de $L^\infty(E, \mu)$; ce dernier étant isomorphe à l'espace $C(E)$ des fonctions continues sur $\tilde{E}$, on voit que son dual est isomorphe à l'espace de toutes les *mesures de Radon* sur l'espace compact $\tilde{E}$, qui est dual de $C(\tilde{E})$; cela fait aussitôt apparaître que, si $\tilde{E}$ n'est pas dénombrable, l'espace $L^1(E, \mu)$ n'est pas réflexif.

3. Fonctions vectorielles faiblement sommables.

Les hypothèses sur E et μ étant les mêmes que ci-dessus, soient F et F′ deux espaces vectoriels sur le corps **R** des nombres réels, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle$ une forme bilinéaire sur $F \times F'$ qui définisse sur chacun d'eux une topologie faible séparée, de sorte que F et F′ soient en dualité faible (12). On dira qu'une fonction $\mathbf{f}$ définie dans E, à valeurs dans F, est *faiblement sommable* si, pour tout élément $\mathbf{a}' \in F'$, la fonction numérique $t \to \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{a}' \rangle$ (que nous désignerons simplement par $\langle \mathbf{f}, \mathbf{a}' \rangle$) est sommable ; l'application $\mathbf{x}' \to \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{x}' \rangle d\mu$ de F′ dans **R** est alors une forme linéaire, mais qui n'est pas nécessairement continue pour la topologie faible sur F′ ; elle est donc de la forme $\mathbf{x}' \to \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}' \rangle$, mais on peut seulement dire en général que $\mathbf{c}$ appartient au dual algébrique de F′, qui n'est autre que le *complété* $\widehat{F}$ de F : on pose $\mathbf{c} = \int \mathbf{f} d\mu$, et on dit que cet élément de $\widehat{F}$ est l'*intégrale* de $\mathbf{f}$ dans E ; on a donc identiquement $\int \langle \mathbf{f}, \mathbf{a}' \rangle d\mu = \left\langle \int \mathbf{f} d\mu, \mathbf{a}' \right\rangle$ pour tout $\mathbf{a}' \in F'$ (13).

Cette définition entraîne immédiatement que pour toute fonction

(11) Il suffit de considérer f comme l'enveloppe supérieure des fonctions $\sup(f, n)$ (lorsque $f \geqslant 0$).

(12) Pour les notions dont nous faisons usage ici, voir par exemple [4].

(13) Cette notion d'intégrale est identique à celles de Gelfand [10] et de Dunford [8] lorsque F est un espace normé, F′ un sous-espace du *dual fort* F^* de F.

numérique g mesurable et bornée, le produit gf est faiblement sommable ; en particulier, pour tout ensemble mesurable A, $\varphi_A f$ est faiblement sommable ; on pose $\int \varphi_A f\, d\mu = \int_A f\, d\mu$ (intégrale *étendue à* A). Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 1. — *Soit* Φ *un filtre sur l'ensemble des fonctions faiblement sommables dans* E, *qui* (pour la topologie faible sur F) *converge uniformément vers une fonction* f ; *alors* f *est faiblement sommable et on a* $\int f\, d\mu = \lim_\Phi \int g\, d\mu$.

En effet, l'hypothèse signifie que pour tout $a' \in F'$, l'image de Φ par l'application $g \to \langle g, a' \rangle$ est une base de filtre dans l'ensemble des fonctions numériques sommables, qui converge uniformément dans E vers la fonction $\langle f, a' \rangle$; comme μE est finie, la fonction $\langle f, a' \rangle$ est sommable et $\int \langle f, a' \rangle d\mu = \lim_\Phi \int \langle g, a' \rangle d\mu$, ce qui montre que f est faiblement sommable, et que $\int g\, d\mu$ converge (pour la topologie faible sur $\widehat{F}$) vers $\int f\, d\mu$ suivant le filtre Φ.

On dit qu'une fonction faiblement sommable f est *équivalente à* 0 si pour tout $a' \in F'$, $\langle f, a' \rangle$ est nulle presque partout. Il est bien connu [14] que f peut être équivalente à 0 sans être nulle en aucun point de E ; toutefois, s'il existe dans F' une famille dénombrable (a'_n) telle que les relations $\langle x, a'_n \rangle = 0$ pour tout n entraînent $x = 0$ dans F, alors les seules fonctions faiblement sommables équivalentes à 0 sont les fonctions nulles presque partout, car chacune des relations $\int |\langle f(t), a'_n \rangle| d\mu = 0$ entraîne que $\langle f(t), a'_n \rangle$ est nulle sauf dans un ensemble H_n de mesure nulle ; ces relations ont donc lieu simultanément dans le complémentaire de la réunion H des H_n, ce qui prouve qu'on a $f(t) = 0$ dans le complémentaire de l'ensemble de mesure nulle H.

4. Première généralisation du théorème de Lebesgue-Nikodym.

Étant donnée une fonction faiblement sommable f, définie dans E et à valeurs dans F, nous dirons que f est *faiblement bornée* si pour

([14]) Voir un exemple de ce fait dans [2], p. 376, exemple 3.

tout $\boldsymbol{a}'\in F'$, la fonction numérique $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{a}'\rangle$ est essentiellement bornée. Pour une telle fonction, et pour toute fonction numérique sommable g dans E, il est immédiat que $g\boldsymbol{f}$ est faiblement sommable, et que pour tout $\boldsymbol{a}'\in F'$, il existe un nombre $m(\boldsymbol{a}') > 0$ tel que

$$\left|\left\langle \int g\boldsymbol{f}\,d\mu, \boldsymbol{a}'\right\rangle\right| \leqslant m(\boldsymbol{a}') \int |g|\,d\mu.$$

On peut dire encore que $g \rightarrow \int g\boldsymbol{f}\,d\mu$ est une application linéaire *continue* de l'espace $L^1(E, \mu)$ dans l'espace topologique $\widehat{F}$ (muni de la topologie faible définie par F') ; si E est l'espace de Kakutani (n° 2) attaché à E, nous avons vu qu'on peut identifier les espaces $L^1(E, \mu)$ et $L^1(\tilde{E}, \tilde{\mu})$; on peut donc aussi considérer $g \rightarrow \int g\boldsymbol{f}\,d\mu$ comme une application linéaire continue de $L^1(\tilde{E}, \tilde{\mu})$ dans $\widehat{F}$. C'est la caractérisation de toutes les applications de cette nature qui va constituer la première généralisation du théorème de Lebesgue-Nikodym :

THÉORÈME 1. — *Toute application linéaire continue de* $L^1(\tilde{E}, \tilde{\mu})$ *dans* $\widehat{F}$ *est de la forme* $g \rightarrow \int g\boldsymbol{f}\,d\tilde{\mu}$, *où* $\boldsymbol{f}$ *est une fonction faiblement sommable et faiblement bornée, définie dans* $\tilde{E}$ *et à valeurs dans* $\widehat{F}$.

Nous désignerons par $\mathfrak{L}$ l'ensemble des *partitions* $\varpi = (A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\tilde{E}$ en un nombre fini d'ensembles à la fois ouverts et fermés, et nous *ordonnerons* cet ensemble en convenant, comme d'ordinaire, qu'une partition ϖ est *moins fine* qu'une partition ϖ' lorsque tout ensemble de ϖ' est contenu dans un ensemble de ϖ ; pour cette relation d'ordre, l'ensemble $\mathfrak{L}$ est *filtrant*, car si $\varpi = (A_i)$ et $\varpi' = (B_j)$ sont deux partitions quelconques appartenant à $\mathfrak{L}$, ceux des ensembles $A_i \cap B_j$ qui ne sont pas vides sont à la fois ouverts et fermés et forment une partition ϖ'' plus fine que ϖ et ϖ'. Soit alors $g \rightarrow U(g)$ une application continue de L^1 dans $\widehat{F}$. Pour toute partition $\varpi = (A_i)$ de $\mathfrak{L}$, prenons $\boldsymbol{f}_\varpi(t) = \frac{1}{\tilde{\mu}A_i} U(\varphi_{A_i})$ pour tout point $t\in A_i$; nous allons montrer que, suivant l'ensemble filtrant $\mathfrak{L}$, les fonctions $\boldsymbol{f}_\varpi$ convergent *uniformément* dans $\tilde{E}$ vers une fonction faiblement sommable $\boldsymbol{f}$ (à valeurs dans $\widehat{F}$), et qu'on a $U(g) = \int g\boldsymbol{f}\,d\tilde{\mu}$ pour toute fonction numérique sommable g. En effet, soient a'_i ($1 \leqslant i \leqslant p$) un nombre fini quelconque d'éléments de F' ; pour chaque indice i, on a par hypothèse $|\langle U(g), a'_i \rangle| \leqslant m(a'_i) \int |g|\, d\mu$; d'après le théorème de Lebesgue-Nikodym, il existe une fonction numérique h_i, sommable et *bornée* dans $\tilde{E}$, telle que $\langle U(g), a'_i \rangle = \int g h_i d\tilde{\mu}$ pour toute fonction $g \in L^1$ et pour $1 \leqslant i \leqslant p$; en outre, comme h_i n'est définie qu'à une équivalence près, on peut supposer que h_i est *continue* dans $\tilde{E}$. Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$ arbitraire, il existe donc une partition $\varpi = (B_j)$ appartenant à $\mathfrak{T}$, telle que, dans chacun des B_j, l'oscillation de chacune des h_i soit $\leqslant \varepsilon$. Soit alors $\varpi' = (C_k)$ une partition appartenant à $\mathfrak{T}$, plus fine que ϖ ; tout C_k est donc contenu dans un B_j ; soit λ_{ij} une des valeurs de h_i dans B_j ; pour tout $t \in C_k$, on a d'une part

$$\langle U(\varphi_{C_k}), a'_i \rangle = \int_{C_k} h_i d\tilde{\mu} = (\lambda_{ij} + \theta\varepsilon)\tilde{\mu} C_k$$

avec $-2 \leqslant \theta \leqslant 2$; d'autre part, on a de même

$$\langle U(\varphi_{B_j}), a'_i \rangle = \int_{B_j} h_i d\tilde{\mu} = (\lambda_{ij} + \theta'\varepsilon)\tilde{\mu} B_j$$

avec encore $-2 \leqslant \theta' \leqslant 2$; d'où résulte aussitôt que, pour tout $t \in \tilde{E}$ et pour tout indice i, on a

$$|\langle f_\varpi(t) - f_{\varpi'}(t), a'_i \rangle| \leqslant 4\varepsilon.$$

Comme $\widehat{F}$ est complet, on déduit aussitôt de ce résultat que les f_ϖ convergent uniformément dans $\tilde{E}$ vers une fonction f, et le lemme 1 montre que f est faiblement sommable. Démontrons enfin que $U(g) = \int g f d\tilde{\mu}$ pour toute fonction $g \in L^1$; comme les fonctions étagées sont partout denses dans L^1, il suffit de démontrer la proposition pour une telle fonction, et par suite pour une fonction caractéristique φ_A d'un ensemble ouvert et fermé dans E. Or, pour toute partition $\varpi = (A_i)$ plus fine que la partition $(A, \complement A)$, on a

$$U(\varphi_A) = \sum_i U(\varphi_{A_i}),$$

la somme étant étendue aux indices i tels que $A_i \subset A$; or, on a

$U(\varphi_{A_i}) = \int_{A_i} f_\varpi d\tilde{\mu}$, donc $U(\varphi_A) = \int_A f_\varpi d\tilde{\mu}$. Comme f_ϖ tend uniformément vers f dans A, il résulte du lemme 1 que

$$U(\varphi_A) = \int_A f d\tilde{\mu} = \int \varphi_A f d\tilde{\mu},$$

ce qui achève la démonstration. La fonction f est déterminée *à une équivalence près*. En effet, si h est une fonction faiblement sommable et faiblement bornée telle que $\int g h d\tilde{\mu} = 0$ pour toute fonction numérique sommable g, on a nécessairement $\int |\langle h, a'\rangle| d\tilde{\mu} = 0$, pour tout $a' \in F'$: car cette relation peut s'écrire $\left\langle \int g h d\tilde{\mu}, a' \right\rangle = 0$, avec $g = sgn\langle h, a'\rangle$, et g est sommable par hypothèse.

5. — Relations entre fonctions faiblement sommables définies dans E, et fonctions faiblement sommables définies dans $\tilde{E}$.

Le théorème 1 permet tout d'abord d'étendre aux fonctions faiblement sommables et *faiblement bornées* définies dans E (et à valeurs dans $\widehat{F}$) la correspondance définie au n° 2 entre fonctions sommables *numériques* définies dans E et fonctions sommables numériques définies dans l'espace de Kakutani $\tilde{E}$ attaché à E. En effet, si f est une fonction faiblement sommable et faiblement bornée, définie dans E et à valeurs dans $\widehat{F}$, l'application $g \to \int g f d\mu$ est une application linéaire continue de $L^1(E, \mu)$ dans $\widehat{F}$; il existe donc une fonction faiblement sommable $\tilde{f}$, définie dans $\tilde{E}$, à valeurs dans $\widehat{F}$, et définie à une équivalence près, telle qu'on ait identiquement

$$\int g f d\mu = \int \tilde{g} \tilde{f} d\tilde{\mu}$$

pour toute fonction sommable numérique g définie dans E. La démonstration du th. 1 montre en outre que l'on peut supposer $\tilde{f}$ *continue* dans $\tilde{E}$ (pour la topologie faible sur $\widehat{F}$) ; avec cette condition supplémentaire, $\tilde{f}$ est alors *bien déterminée* par la donnée de f à une équivalence près ; en effet, comme $\langle \tilde{f}, a'\rangle$ est alors une fonction numérique continue dans $\tilde{E}$ pour tout $a' \in F'$, cette fonction ne peut être nulle presque partout que si elle est identiquement nulle, et comme cela a lieu pour tout a', $\tilde{f}$ doit être identiquement nulle.

Il n'est pas évident que l'application $f \to \tilde{f}$ ainsi définie pour les fonctions f faiblement bornées, puisse s'étendre aux fonctions faiblement sommables quelconques : c'est là un point qui reste à élucider dans le cas général. D'autre part, on est naturellement amené à se demander si (comme pour les fonctions numériques), à *toute* fonction continue h définie dans $\tilde{E}$, à valeurs dans $\widehat{F}$ (nécessairement faiblement bornée) correspond une fonction faiblement sommable f définie dans E, et telle que $\tilde{f} = h$. Nous allons voir seulement que les réponses à ces deux questions sont affirmatives dans le cas particulier considéré par Dunford-Pettis ([5]), ce qui nous donnera entre autres une nouvelle démonstration du théorème de ces auteurs cité plus haut.

Ce cas est celui où F' est un *espace de Banach* « séparable » (c'est-à-dire contenant une partie dénombrable partout dense pour la topologie *forte*), et où F est le *dual fort* ([12]) de F'. Alors, on a le lemme fondamental suivant, dû à N. Dunford ([15]) :

Lemme 2. — *Si f est faiblement sommable et à valeurs dans* F, *l'intégrale $\int f d\mu$ prend ses valeurs dans* F (et non plus seulement dans $\widehat{F}$).

Cela étant, soit d'abord f une fonction faiblement sommable et *fortement bornée* dans E (c'est-à-dire telle que $\|f(t)\| \leqslant m$ pour tout $t \in E$) ; pour tout $a' \in F'$ et toute partie mesurable A de E, on a alors $\left|\int_A \langle f, a' \rangle d\mu\right| \leqslant m \|a'\| \mu A$, et par suite $\left\|\int_A f d\mu\right\| \leqslant m \cdot \mu A$. La démonstration du th. 1, jointe au fait que dans F la boule $\|x\| \leqslant m$ est faiblement complète ([16]), prouve que la fonction $\tilde{f}$ continue dans $\tilde{E}$, qui correspond à f, prend elle aussi ses valeurs dans F, et est telle que $\|\tilde{f}(t)\| \leqslant m$ dans $\tilde{E}$.

En second lieu, soit f une fonction faiblement sommable quelconque définie dans E, à valeurs dans F. Pour tout $t \in E$, on a $\|f(t)\| = \sup |\langle f(t), a'_n \rangle|$, où a'_n parcourt un ensemble dénombrable de points dense dans la boule $\|x'\| \leqslant 1$ dans F' ; les fonctions numériques $\langle f, a'_n \rangle$ étant sommables, la fonction $\|f(t)\|$ est mesurable dans E. Comme elle est partout finie, on voit que, si H_n est l'ensemble des $t \in E$ où $\|f(t)\| \geqslant n$, les H_n forment une suite décroissante d'ensembles mesurables dont l'intersection est vide ; leur mesure tend donc vers 0 avec $1/n$.

([15]) [8], p. 334, theorem 43.
([16]) Voir [4], p. 128, th. 22.

Au complémentaire de H_n correspond dans $\tilde{E}$ un ensemble ouvert et fermé A_n, la réunion de la suite croissante (A_n) étant un ensemble ouvert A partout dense dans $\tilde{E}$ (et dont le complémentaire est donc de mesure nulle). Comme la restriction $\boldsymbol{f}_n$ de $\boldsymbol{f}$ au complémentaire de H_n est fortement bornée, il lui correspond, par le th. 1, une fonction $\tilde{\boldsymbol{f}}_n$ continue et fortement bornée dans A_n, et il est clair que pour $m \leqslant n$, $\tilde{\boldsymbol{f}}_n$ est le prolongement de $\tilde{\boldsymbol{f}}_m$ à A_n ; toutes ces fonctions sont donc les restrictions d'une fonction $\tilde{\boldsymbol{f}}$ continue (mais non fortement bornée) dans l'ensemble ouvert A. Reste à voir que pour toute fonction numérique mesurable et bornée g on a $\int g\boldsymbol{f}d\mu = \int \tilde{g}\tilde{\boldsymbol{f}}d\tilde{\mu}$; or, on a $\int g\boldsymbol{f}_n d\mu = \int \tilde{g}\tilde{\boldsymbol{f}}_n d\tilde{\mu}$ pour tout n ; $g\boldsymbol{f}_n$ tend presque partout vers $g\boldsymbol{f}$, et pour tout $\boldsymbol{a}' \in F'$, on a $|\langle g\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{a}'\rangle| \leqslant |\langle g\boldsymbol{f}, \boldsymbol{a}'\rangle|$ (en convenant de prendre $\boldsymbol{f}_n$ nulle aux points de H_n) ; le théorème de Lebesgue montre donc que $\int \langle g\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{a}'\rangle d\mu$ tend vers $\int \langle g\boldsymbol{f}, \boldsymbol{a}'\rangle d\mu$; en raisonnant de même dans $\tilde{E}$, on voit que $\int \langle g\boldsymbol{f}, \boldsymbol{a}'\rangle\, d\mu = \int \langle \tilde{g}\tilde{\boldsymbol{f}}, \boldsymbol{a}'\rangle\, d\tilde{\mu}$ pour tout $\boldsymbol{a}' \in F'$, ce qui achève notre démonstration.

Passons au problème inverse, et considérons d'abord une fonction continue et fortement bornée $\boldsymbol{h}$ définie dans E. Par hypothèse, il existe dans F' une suite $(\boldsymbol{a}'_n)$ de points linéairement indépendants, tel que le sous-espace engendré par cette suite soit *partout dense* dans F' (pour la topologie forte). Posons $h_n = \langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{a}'_n\rangle$; h_n est une fonction numérique continue dans E, donc il existe une fonction mesurable et bornée f_n définie dans E, telle que $\tilde{f}_n = h_n$. Pour toute combinaison linéaire $\boldsymbol{a}' = \sum_k r_k \boldsymbol{a}'_k$ des $\boldsymbol{a}'_k$ à coefficients rationnels, la fonction numérique $f(t, \boldsymbol{a}') = \sum_k r_k f_k(t)$ est telle que

$$\tilde{f} = \sum_k r_k h_k = \langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{a}'\rangle ;$$

on a donc $\|f\|_\infty = \|\langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{a}'\rangle\|$, et par suite il existe un ensemble $H(\boldsymbol{a}')$, de mesure nulle dans E, tel que dans le complémentaire de $H(\boldsymbol{a}')$, on ait $|f(t, \boldsymbol{a}')| \leqslant \sup_{x \in \tilde{E}} |\langle \boldsymbol{h}(x), \boldsymbol{a}'\rangle| \leqslant m \|\boldsymbol{a}'\|$, en désignant par m la borne supérieure de $\|\boldsymbol{h}(x)\|$ dans $\tilde{E}$. Or les combinaisons linéaires des $\boldsymbol{a}'_k$ à coefficients rationnels forment un ensemble dénombrable D, partout dense dans F' ; il existe donc un ensemble de mesure nulle H dans E tel que, dans le complémentaire de H, on ait en tout point t, $|f(t, \boldsymbol{a}')| \leqslant m \| \boldsymbol{a}' \|$ pour tout $\boldsymbol{a}' \in \mathrm{D}$. Pour tout t fixe dans le complémentaire de H, la fonction $\boldsymbol{a}' \rightarrow f(t, \boldsymbol{a}')$ est donc uniformément continue dans D, et se prolonge par suite en une forme linéaire continue dans F′, qu'on peut donc noter $\langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{a}' \rangle$, où $\boldsymbol{f}(t)$ est un élément bien déterminé du dual F de F′. En outre, pour tout $\boldsymbol{a}' \in \mathrm{F}'$, il existe une suite $(\boldsymbol{b}'_n)$ d'éléments de D qui converge fortement vers $\boldsymbol{a}'$, donc $\langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{b}'_n \rangle$ converge *uniformément* vers $\langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{a}' \rangle$ dans le complémentaire de H, ce qui prouve que $\langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{a}' \rangle$ est sommable, et correspond à la fonction continue $\langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{a}' \rangle$ dans $\tilde{\mathrm{E}}$; il en résulte que pour toute fonction numérique sommable et bornée g, $g\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{a}' \rangle$ correspond à $\tilde{g}\langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{a}' \rangle$, et par suite $\boldsymbol{f}$ est faiblement sommable et $\tilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{h}$.

En raisonnant comme dans le premier problème, il serait facile de voir qu'à toute fonction $\boldsymbol{h}$ faiblement sommable définie dans $\tilde{\mathrm{E}}$, à valeurs dans F, correspond une fonction $\boldsymbol{f}$ faiblement sommable définie dans E (à une équivalence près) et telle que $\tilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{h}$; mais nous n'utiliserons pas ce résultat.

Cela étant, le théorème de Dunford-Pettis précité correspond au cas où F satisfait aux hypothèses précédentes, et où on cherche les applications linéaires continues de $\mathrm{L}^1(\mathrm{E}, \mu)$ dans F, ce dernier espace étant muni de sa topologie *forte* ; une telle application U satisfait donc à la relation $\| \mathrm{U}(g) \| \leqslant m \int |g| d\mu$. Le th. I montre donc que $\mathrm{U}(g) = \int \tilde{g} \boldsymbol{f} d\mu$, où $\boldsymbol{f}$ est faiblement sommable dans $\tilde{\mathrm{E}}$; mais en outre ici $\boldsymbol{f}$ *prend ses valeurs dans la boule* $\mathrm{S} : \| \boldsymbol{x} \| \leqslant m$ de F, et non plus seulement dans $\widehat{\mathrm{F}}$: en effet, la démonstration du th. I montre que $\boldsymbol{f}$ est limite uniforme (pour la topologie faible $\sigma(\mathrm{F}, \mathrm{F}')$) d'un filtre de fonctions prenant leurs valeurs dans S ; comme S est *faiblement complète* ([16]) la propriété énoncée en résulte, et $\boldsymbol{f}$ est fortement bornée. On peut alors, comme on l'a vu plus haut, identifier $\boldsymbol{f}$ à une fonction faiblement sommable et fortement bornée *définie dans* E, et écrire $\mathrm{U}(g) = \int g \boldsymbol{f} d\mu$: c'est le théorème de Dunford-Pettis.

6. — Seconde généralisation du théorème de Lebesgue-Nikodym.

Nous allons nous placer dans les mêmes hypothèses que dans le n° 5, en supposant de plus que le dual F de F′ est lui-même un espace *séparable* (ce qui suffit d'ailleurs pour impliquer que F′ l'est aussi ([17]). Alors, comme E est de mesure finie, un résultat de Pettis ([18]) montre que toute fonction faiblement sommable dans E (à valeurs dans F) et *fortement bornée*, est aussi *fortement sommable* (c'est-à-dire limite presque partout pour la topologie forte d'une suite de fonctions étagées f_n, la suite $\int \|f - f_n\| d\mu$ tendant vers o, et la fonction numérique $\|f(t)\|$ étant sommable ([19])). Nous désignerons par $\mathfrak{L}^1(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ l'espace vectoriel des fonctions fortement sommables, définies dans E et à valeurs dans F, cet espace étant muni de la norme $\|f\|_1 = \int \|f(t)\| d\mu$. On sait que $\mathfrak{L}^1(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est *complet* et qu'on a $\left\|\int f d\mu\right\| \leqslant \|f\|_1$ pour toute fonction fortement sommable f; en outre, si g est une fonction numérique mesurable et bornée, gf est aussi fortement sommable ([20]). Le sous-ensemble $\mathfrak{L}^\infty(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ des fonctions fortement sommables et fortement bornées dans E est un espace vectoriel ; si on désigne par $\|f\|_\infty$ le maximum en mesure de $\|f(t)\|$ dans E, $\|f\|_\infty$ est une norme sur $\mathfrak{L}^\infty(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, et muni de cette norme, $\mathfrak{L}^\infty(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est encore un espace *complet*.

Théorème 2. — *Si* F *est dual fort d'un espace de Banach* F', *et est séparable, toute application linéaire continue de* $\mathfrak{L}^1(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *dans* F *est de la forme* $f \to \int \mathrm{T}(f) d\mu$, *où* T *est une application linéaire continue de* $\mathfrak{L}^1(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *dans lui-même, telle que* $\mathrm{T}(gf) = g\mathrm{T}(f)$ *presque partout pour toute fonction numérique sommable et bornée* g.

Par hypothèse, il existe dans F une suite (a_n) de points linéairement indépendants, tels que le sous-espace H de F, formé des combinaisons linéaires des a_n, soit partout dense (pour la topologie forte) dans F. On en déduit aussitôt que l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_j a_j g_j$, où g_j est une fonction numérique sommable quelconque, est un sous-espace *partout dense* $\mathfrak{L}_0$ de $\mathfrak{L}^1(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Soit alors U une application linéaire continue de $\mathfrak{L}^1(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ dans F ; on a donc

$$\|\mathrm{U}(f)\| \leqslant m \cdot \int \|f\| d\mu \tag{1}$$

où m est un nombre > 0. Si $f = \sum_j a_j g_j$ appartient à $\mathfrak{L}_0$, on peut

([17]) [1], p. 189, th. 12.
([18]) Voir [14], p. 278, theorem 1. 1.
([19]) Cette notion d'intégrale est celle de Bochner (voir [3]).
([20]) [3], p. 265.

écrire $U(\boldsymbol{f}) = \sum_j U(\boldsymbol{a}_j g_j)$; lorsque g parcourt l'espace $L^1(E)$, l'application $g \rightarrow U(\boldsymbol{a}_j g) = U_j(g)$ est une application linéaire de $L^1(E)$ dans F, et d'après (1), on a $\|U_j(g)\| \leqslant m \|\boldsymbol{a}_j\| \int |g| d\mu$; autrement dit, U_j est une application linéaire de $L^1(E)$ dans F, quand on munit F de la topologie forte ; le théorème de Dunford-Pettis est donc applicable ici et donne $U_j(g) = \int g \boldsymbol{f}_j d\mu$, $\boldsymbol{f}_j$ étant une fonction faiblement sommable et fortement bornée, à valeurs dans F ; $\boldsymbol{f}_j$ est donc *fortement sommable*. Pour toute fonction $\boldsymbol{f} = \sum_j \boldsymbol{a}_j g_j$ de $\mathfrak{L}_0$, posons $T(\boldsymbol{f}) = \sum_j \boldsymbol{f}_j g_j$; $T(\boldsymbol{f})$ est une fonction fortement sommable dans E, T est une application linéaire de $\mathfrak{L}_0$ dans $\mathfrak{L}^1(E, F)$ et on a évidemment $T(g\boldsymbol{f}) = gT(\boldsymbol{f})$ pour toute fonction $\boldsymbol{f} \in \mathfrak{L}_0$ et toute fonction numérique sommable et bornée g ; enfin, on a par définition $U(\boldsymbol{f}) = \int T(\boldsymbol{f}) d\mu$ pour toute fonction $\boldsymbol{f} \in \mathfrak{L}_0$.

Cela étant, nous allons montrer que T est *continue* dans $\mathfrak{L}_0$. D'après (1), on a $\left\|\int gT(\boldsymbol{f}) d\mu\right\| \leqslant m \cdot \int |g| \cdot \|\boldsymbol{f}\| d\mu$ pour toute fonction $\boldsymbol{f} \in \mathfrak{L}_0$ et toute fonction numérique g sommable et bornée. On en déduit que, pour tout $\boldsymbol{a}' \in F'$ tel que $\|\boldsymbol{a}'\| \leqslant 1$,

$$(2) \qquad \left|\int g\langle T(\boldsymbol{f}), \boldsymbol{a}'\rangle d\mu\right| \\ = \left|\left\langle \int gT(\boldsymbol{f}) d\mu, \boldsymbol{a}'\right\rangle\right| \leqslant \left\|\int gT(\boldsymbol{f}) d\mu\right\| \leqslant m \cdot \int |g| \cdot \|\boldsymbol{f}\| d\mu.$$

Fixons la fonction $\boldsymbol{f} \in \mathfrak{L}_0$, et posons $\boldsymbol{h} = T(\boldsymbol{f})$. Comme F est séparable, pour tout entier $n > 0$, il existe une suite $(\boldsymbol{a}_{kn})_{k \geqslant 1}$ d'éléments de F telle que tout point $\boldsymbol{x} \in F$ soit contenu dans une boule ouverte de centre l'un des $\boldsymbol{a}_{kn}$ et de rayon $1/n$. Soit A_{kn} l'ensemble des $t \in E$ tels que $\|\boldsymbol{h}(t) - \boldsymbol{a}_{kn}\| \leqslant \frac{1}{n}$; A_{kn} est mesurable puisque $\boldsymbol{h}$ est fortement sommable ; si B_{kn} est l'ensemble des points de A_{kn} qui n'appartiennent pas aux A_{in} d'indice $i < k$, B_{kn} est mesurable et les B_{kn} forment une partition de E. Or, pour chaque k, il existe $\boldsymbol{a}'_{kn} \in F'$ tel que $\|\boldsymbol{a}'_{kn}\| = 1$, et $\left|\langle \boldsymbol{a}_{kn}, \boldsymbol{a}'_{kn}\rangle - \|\boldsymbol{a}_{kn}\|\right| \leqslant 1/n$; on en déduit aussitôt que, dans B_{kn}, on $\left|\langle \boldsymbol{h}(t), \boldsymbol{a}'_{kn}\rangle - \|\boldsymbol{h}(t)\|\right| \leqslant 3/n$. Appliquant alors (2) en remplaçant g par la fonction caractéristique de B_{kn}, il vient

$$\int_{B_{kn}} \|T(\boldsymbol{f})\| d\mu \leqslant \frac{3}{n} \mu B_{kn} + m \cdot \int_{B_{kn}} \|\boldsymbol{f}\| d\mu$$

d'où, en sommant par rapport à k

$$\int \|\mathrm{T}(f)\| d\mu \leqslant \frac{3}{n} \mu \mathrm{E} + m \,.\int \|f\| d\mu$$

et comme n est arbitraire, on a bien $\int \|\mathrm{T}(f)\| d\mu \leqslant m\,.\int \|f\| d\mu$, ce qui démontre la continuité de T dans $\mathfrak{L}_0$. Comme $\mathfrak{L}_0$ est partout dense dans l'espace complet $\mathfrak{L}^1(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, T se prolonge en une application linéaire continue de $\mathfrak{L}^1(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ dans lui-même qui satisfait à $\mathrm{U}(f) = \int \mathrm{T}(f) d\mu$ (par prolongement des identités) ; pour la même raison, on a $\mathrm{T}(gf) = g\mathrm{T}(f)$ presque partout pour toute fonction numérique g sommable et bornée, d'où le théorème.

Par des méthodes analogues à celles du théorème 2, nous allons démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — *Si* F *est un espace de Banach dont le dual fort* F* *est séparable, le dual fort de l'espace de Banach* $\mathfrak{L}^1(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est isomorphe à l'espace* $\mathfrak{L}^\infty(\mathrm{E}, \mathrm{F}^*)$; *de façon précise, toute forme linéaire continue sur* $\mathfrak{L}^1(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *peut s'écrire* $\mathbf{u} \rightarrow \int \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle d\mu$, *où* $\mathbf{u}'$ *est une fonction à valeurs dans* F*, *fortement sommable et fortement bornée, et la norme de cette forme linéaire est égale à* $\|\mathbf{u}'\|_\infty$.

Soit θ une forme linéaire continue sur $\mathfrak{L}^1(\mathrm{E}, \mathrm{F})$; on a donc $|\theta(\mathbf{u})| \leqslant m\,.\int \|\mathbf{u}\| d\mu$, avec $m > 0$; pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathrm{F}$, $\theta(g\mathbf{x})$, où g est une fonction numérique sommable quelconque, est une forme linéaire sur $\mathrm{L}^1(\mathrm{E}, \mu)$, donc, d'après le théorème de Lebesgue-Nikodym, il existe une fonction sommable et bornée $\omega(\mathbf{x})$, dépendant linéairement de $\mathbf{x}$, telle que $\theta(g\mathbf{x}) = \int g\omega(\mathbf{x}) d\mu$; on a en outre $\left|\int g\omega(\mathbf{x}) d\mu\right| \leqslant m \|\mathbf{x}\| \int |g| d\mu$; l'application $\mathbf{x} \rightarrow \int g\omega(\mathbf{x}) d\mu$ est donc une forme linéaire continue sur F, autrement dit un élément de F*, que nous désignerons par $\mathrm{V}(g)$.

On peut donc écrire $\int g\omega(\mathbf{x}) d\mu = \langle \mathbf{x}, \mathrm{V}(g) \rangle$, et on a l'inégalité $\|\mathrm{V}(g)\| \leqslant m\,.\int |g| d\mu$; V est donc une application linéaire continue de $\mathrm{L}^1(\mathrm{E})$ dans F*, et comme F* est un espace séparable, le th. de Dunford-Pettis est applicable et donne $\mathrm{V}(g) = \int g\mathbf{u}' d\mu$, où $\mathbf{u}'$, étant faiblement sommable et fortement bornée, est fortement sommable ; en outre, on a

$$\theta(g\mathbf{x}) = \left\langle \mathbf{x}, \int g\mathbf{u}' d\mu \right\rangle = \int \langle \mathbf{x}, g\mathbf{u}' \rangle d\mu = \int \langle g\mathbf{x}, \mathbf{u}' \rangle d\mu,$$

d'où aussitôt $\theta(\boldsymbol{u}) = \int \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \rangle d\mu$ pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathcal{L}_0$; comme $\mathcal{L}_0$ est partout dense dans $\mathcal{L}^1(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, la relation précédente est vraie par prolongement continu dans tout $\mathcal{L}^1(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Il est clair que la norme de θ est au plus égale à $\|\boldsymbol{u}'\|_\infty = c$; d'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point $\boldsymbol{a}'' \in \mathrm{F}^*$ et un ensemble mesurable A de mesure > 0, tels que pour tout $t \in \mathrm{A}$, on ait $\|\boldsymbol{u}'(t) - \boldsymbol{a}''\| \leqslant \varepsilon$, et $\|\boldsymbol{a}''\| = c$. Alors, il existe $\boldsymbol{a} \in \mathrm{F}$ tel que $\|\boldsymbol{a}\| = 1$ et $|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'' \rangle - c| \leqslant \varepsilon$, d'où

$$|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}'(t) \rangle - c| \leqslant 2\varepsilon$$

pour tout $t \in \mathrm{A}$; en prenant $\boldsymbol{u} = \varphi_{\mathrm{A}} \boldsymbol{a}$, on a $\|\boldsymbol{u}\|_1 = \mu \mathrm{A}$, et

$$\theta(\boldsymbol{u}) = \int_{\mathrm{A}} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}'(t) \rangle \, d\mu \geqslant (c - 2\varepsilon)\mu\mathrm{A} ;$$

la norme de θ est donc $\geqslant c - 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui prouve qu'elle est égale à c.

7. — Mesures quotients.

Soit E un ensemble, μ une mesure sur E ; nous supposerons d'abord que E soit de mesure *finie*, et désignerons par $\tilde{\mathrm{E}}$ l'espace de Kakutani et par $\tilde{\mu}$ la mesure sur $\tilde{\mathrm{E}}$, corrrespondant à E et μ. Soit $\mathfrak{A}$ une sous-tribu (contenant E) de la tribu $\mathfrak{T}$ des ensembles mesurables dans E ; il lui correspond dans $\tilde{\mathrm{E}}$ une famille $\tilde{\mathfrak{A}}$ d'ensembles à la fois ouverts et fermés, telle que la réunion de deux ensembles quelconques de la famille $\tilde{\mathfrak{A}}$, et le complémentaire d'un ensemble de $\tilde{\mathfrak{A}}$ appartiennent encore à $\mathfrak{A}$. La famille d'ensembles $\tilde{\mathfrak{A}}$ définit dans $\tilde{\mathrm{E}}$ une *relation d'équivalence* $\tilde{\mathrm{R}}$ de la façon suivante : pour tout $x \in \tilde{\mathrm{E}}$, soit $\mathrm{G}(x)$ l'intersection de tous les ensembles appartenant à $\tilde{\mathfrak{A}}$ et contenant x ; si $y \notin \mathrm{G}(x)$, il existe un ensemble ouvert et fermé $\tilde{\mathrm{A}} \in \tilde{\mathfrak{A}}$ tel que $x \in \tilde{\mathrm{A}}$, $y \notin \tilde{\mathrm{A}}$; comme le complémentaire de $\tilde{\mathrm{A}}$ est ouvert et fermé et appartient à $\tilde{\mathfrak{A}}$, on voit que $x \notin \mathrm{G}(y)$, et par suite, les $\mathrm{G}(x)$ distincts forment une *partition* de $\tilde{\mathrm{E}}$ en ensembles fermés, à laquelle correspond une relation d'équivalence $\tilde{\mathrm{R}}$ dont les $\mathrm{G}(x)$ sont les classes. En outre, le raisonnement précédent montre que deux classes distinctes sont contenues respectivement dans un ensemble de $\tilde{\mathfrak{A}}$ et dans son complémentaire ; cela prouve que l'espace quotient $\tilde{\mathrm{E}}/\tilde{\mathrm{R}}$ est un espace compact *totalement discontinu*. Nous allons en déduire que $\tilde{\mathrm{E}}/\tilde{\mathrm{R}}$ n'est autre que l'*espace de Kakutani* associé à la mesure μ, considérée comme définie seulement sur la tribu $\mathfrak{A}$: en effet, à tout ensemble $\tilde{A}\in\tilde{\mathfrak{A}}$ correspond par l'application canonique φ, un ensemble ouvert et fermé dans $\tilde{E}/\tilde{R}$; l'intersection des $\varphi(\tilde{A})$ contenant un même point $\varphi(x)$ se réduit à ce point, d'où on voit aussitôt, par la compacité, que les $\varphi(\tilde{A})$ contenant $\varphi(x)$ forment un système fondamental de voisinages de $\varphi(x)$, et par suite que les $\varphi(\tilde{A})$ forment une *base* de la topologie de $\tilde{E}/\tilde{R}$; par compacité, tout ensemble ouvert et fermé dans $\tilde{E}/\tilde{R}$ est alors réunion d'un nombre fini d'ensembles $\varphi(\tilde{A})$, donc est lui-même un $\varphi(\tilde{A})$; autrement dit, les $\varphi(\tilde{A})$ sont identiques aux ensembles à la fois ouverts et fermés dans $\tilde{E}/\tilde{R}$, ce qui établit notre assertion. La mesure λ définie sur $\tilde{E}/\tilde{R}$ est telle que pour tout ensemble A de la tribu $\mathfrak{A}$, on ait $\lambda\big(\varphi(\tilde{A})\big)=\mu A$; nous dirons que c'est la *mesure quotient* de $\tilde{\mu}$ par la relation d'équivalence $\tilde{R}$.

Cela étant, on a le théorème suivant :

Théorème 4. — *Sur toute classe d'équivalence* $H(z)=\overset{-1}{\varphi}(z)$ $(z\in\tilde{E}/\tilde{R})$ *il existe une mesure de Radon* ν_z *telle que, pour toute fonction continue numérique* $\tilde{g}$ *sur* $\tilde{E}$, *la fonction* $z\rightarrow\int_{H(z)}\tilde{g}d\nu_z$ *soit continue dans* $\tilde{E}/\tilde{R}$, *et que, pour tout ensemble* $\tilde{A}\in\tilde{\mathfrak{A}}$, *on ait*

$$\int_{\tilde{A}}\tilde{g}d\tilde{\mu}=\int_{\varphi(\tilde{A})}\left(\int_{H(z)}\tilde{g}d\nu_z\right)d\lambda. \tag{3}$$

Ce théorème va résulter directement du th. 1, et des remarques finales du n° 5. L'espace de Banach F′ sera ici l'espace $C(\tilde{E})$ des fonctions continues numériques sur $\tilde{E}$, et l'espace F sera son *dual*, c'est-à-dire l'espace des *intégrales de Radon* sur $\tilde{E}$. A toute fonction h sommable sur $\tilde{E}/\tilde{R}$ (pour la mesure λ) correspond la fonction $h_1=h\circ\varphi$ définie dans $\tilde{E}$, sommable pour $\tilde{\mu}$ et telle que

$$\int h_1 d\tilde{\mu}=\int hd\lambda\ ;$$

l'application $\tilde{g}\rightarrow\int h_1\tilde{g}d\tilde{\mu}$ est une intégrale de Radon sur $\tilde{E}$, car $\left|\int h_1\tilde{g}d\tilde{\mu}\right|\leqslant\|\tilde{g}\|\int|h|d\lambda$; désignons-la par $V(h)$, de sorte que pour toute fonction continue $\tilde{g}\in F'=C(\tilde{E})$, on peut écrire

$$\int h_1\tilde{g}d\tilde{\mu}=\langle V(h),\tilde{g}\rangle,\qquad \text{et}\qquad |\langle V(h),\tilde{g}\rangle|\leqslant\|\tilde{g}\|\int|h|d\lambda.$$

Cela signifie que V est une application linéaire continue de $L^1(\tilde{E}/\tilde{R}, \lambda)$ dans F (ce dernier espace étant muni de la topologie faible $\sigma(F, F')$) ; le th. 1 et les remarques finales du n° 5 montrent donc qu'il existe une application *continue* bien déterminée f de $\tilde{E}/\tilde{R}$ dans F telle que $V(h) = \int hfd\lambda$, ou, ce qui revient au même, pour toute fonction $\tilde{g}$ continue dans $\tilde{E}$, $\int h_1\tilde{g}d\tilde{\mu} = \int_{\tilde{E}/\tilde{R}} h(z)\langle f(z), \tilde{g}\rangle d\lambda$. Pour chaque $z \in \tilde{E}/\tilde{R}$, l'application $\tilde{g} \rightarrow \langle f(z), \tilde{g}\rangle$ est une intégrale de Radon bien déterminée sur $\tilde{E}$; reste à montrer qu'on peut la considérer comme intégrale de Radon sur l'ensemble H(z), autrement dit que la mesure qui lui correspond a pour *noyau* ([21]) l'ensemble fermé H(z). Il suffit pour cela de montrer que si $\tilde{g}(x) = 0$ dans H(z), on a $\langle f(z), \tilde{g}\rangle = 0$. Or, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\tilde{A}$ de H(z) qui appartient à $\tilde{\mathcal{A}}$ et est tel que pour $x \in \tilde{A}$, $|\tilde{g}(x)| \leqslant \varepsilon$; en prenant pour h la fonction caractéristique d'un voisinage ouvert et fermé de z aussi petit qu'on veut et contenu dans $\varphi(\tilde{A})$, on voit aussitôt, en tenant compte de ce que $\langle f(z), \tilde{g}\rangle$ est fonction continue de z, que $|\langle f(z), \tilde{g}\rangle| \leqslant \varepsilon$; comme ε est arbitraire, on a bien $\langle f(z), \tilde{g}\rangle = 0$. Pour tout $z \in \tilde{E}/\tilde{R}$, il existe donc une mesure de Radon bien déterminée ν_z sur l'ensemble compact H(z), telle que $\langle f(z), \tilde{g}\rangle = \int_{H(z)} \tilde{g}d\nu_z$; d'où le théorème.

Comme pour le théorème de Dunford-Pettis, il se pose naturellement la question de savoir si, moyennant certaines restrictions de « séparabilité », on peut obtenir un théorème analogue au th. 4, mais relatif à l'ensemble E lui-même, et non plus à l'espace de Kakutani associé. M. P. Halmos a cru pouvoir énoncer une propriété générale de cette nature, dans les hypothèses suivantes : la tribu $\mathcal{T}$ et sa sous-tribu $\mathcal{A}$ sont supposées chacune engendrée par une famille *dénombrable* d'ensembles. On peut alors définir *dans* E lui-même une relation d'équivalence R par le même procédé que ci-dessus ($\mathcal{A}$ remplaçant $\tilde{\mathcal{A}}$). On prend comme ensembles mesurables dans E/R les images canoniques $\varphi(A)$ des ensembles $A \in \mathcal{A}$ (autrement dit, la tribu des ensembles mesurables dans E/R est isomorphe à $\mathcal{A}$), et on définit évidemment une mesure sur cette tribu d'ensembles en posant $\lambda(\varphi(A)) = \mu A$. Cela étant, le théorème fondamental de P. Halmos ([22])

([21]) Pour toute mesure de Radon μ sur un espace compact E, la réunion des ensembles ouverts de mesure-μ nulle est un ensemble ouvert de mesure-μ nulle, dont le complémentaire (fermé) est appelé le *noyau* de la mesure μ.

([22]) [11], p. 390, theorem 1.

affirme qu'il existe dans E/R un ensemble K tel que $\lambda K = 0$, que pour tout $z \in K$ il existe sur la classe d'équivalence $H(z) = \overset{-1}{\varphi}(z)$ une mesure ν_z définie sur la tribu des $B \cap H(z)$, où $B \in \mathcal{T}$, telle que, pour tout ensemble B de la tribu $\mathcal{T}$, l'application $z \rightarrow \nu_z(B \cap H(z))$ soit sommable dans E/R et qu'on ait

$$(4) \qquad \mu B = \int_{E/R} \nu_z(B \cap H(z))\, d\lambda.$$

Or, nous allons montrer que sans autres hypothèses plus restrictives sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{T}$, le théorème de P. Halmos est *inexact*. En effet, prenons pour E l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$, pour $\mathcal{A}$ la tribu des ensembles boréliens contenus dans E, pour μ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{A}$. Soit N un ensemble non mesurable (au sens de Lebesgue) dans E, ayant une mesure intérieure nulle, une mesure extérieure > 0. Soit $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par N et par les ensembles de $\mathcal{A}$; si N' est le complémentaire de N dans E, on voit aussitôt que les ensembles de $\mathcal{T}$ sont les ensembles de la forme $(A \cap N) \cup (A' \cap N')$, où A et A' sont quelconques dans $\mathcal{A}$; cela étant, on *étend* aussitôt la mesure μ à la tribu $\mathcal{T}$, en prenant $\mu(A \cap N) = 0$, $\mu(A' \cap N') = \mu A'$ quels que soient A et A' dans $\mathcal{A}$; la vérification des axiomes des mesures est immédiate (parce que les seuls ensembles de $\mathcal{A}$ contenus dans N sont de mesure nulle). La relation d'équivalence R est ici $x = y$, et la mesure λ n'est autre que la mesure μ, définie sur $\mathcal{A}$ seulement ; la relation (4) donne $\mu A = \int_A \nu_z(\{z\})\, d\mu$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, ce qui prouve que $\nu_z(\{z\}) = 1$ presque partout dans E (au sens de la mesure de Lebesgue) ; en particulier on a $\nu_z(N \cap \{z\}) = 1$ presque partout dans N et $\nu_z(N \cap \{z\}) = 0$ partout dans N' ; cette fonction n'est donc pas sommable pour la mesure de Lebesgue, contrairement à ce qu'affirme le théorème de Halmos ([23]).

8. — Mesures quotients dans les espaces compacts.

Nous allons maintenant montrer que le théorème de Halmos est exact lorsqu'on fait des restrictions convenables sur E, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{A}$. Nous

([23]) La démonstration donnée par P. Halmos de son théorème est correcte, mais s'appuie sur un résultat inexact de J. L. Doob ([7], p. 96, theorem 3. 1). L'erreur dans la démonstration de Doob se trouve à la ligne 3 de la p. 97 de son travail, où il admet que l'application de son ensemble Ω dans l'intervalle $0 < t < 1$ qu'il définit à cet endroit est une application *sur* l'intervalle $0 < t < 1$, ce qui n'est pas vrai en général.

supposerons que E soit un *espace compact métrisable*, R une relation d'équivalence dans E telle que l'espace quotient E/R soit séparé, donc compact et métrisable ; la tribu $\mathcal{T}$ sera la tribu des ensembles *boréliens* dans E, la tribu $\mathfrak{A}$ sera formée de ceux de ces ensembles qui sont *saturés* pour la relation R ; par l'application canonique φ de E sur E/R, ces ensembles correspondent biunivoquement aux ensembles boréliens dans l'espace compact E/R ; enfin, nous supposerons que μ est une mesure de Radon sur E (donc définie sur $\mathcal{T}$) ; la mesure λ correspondante sur E/R est par suite aussi une mesure de Radon. Cela étant, on sait que l'espace C(E) des fonctions numériques continues dans E est *séparable* : nous désignerons par (g_n) une suite partout dense dans C(E). D'autre part la topologie de E/R admet une base dénombrable (V_n) ; nous désignerons par V'_n l'ensemble fermé complémentaire de V_n.

Pour toute fonction h sur E/R, sommable pour la mesure λ, désignons par h_1 la fonction $h\circ\varphi$, sommable sur E pour la mesure μ. Pour chacune des fonctions continues g_p, l'application

$$h \rightarrow \int h_1 g_p d\mu$$

est une forme linéaire continue sur $L^1(E/R, \lambda)$, car on a

$$\left|\int h_1 g_p d\mu\right| \leqslant \|g_p\| \cdot \int |h| d\lambda$$

par définition de la mesure λ ; le théorème de Lebesgue-Nikodym montre donc qu'il existe une fonction u_p sommable et bornée dans E/R, telle que $\int h_1 g_p d\mu = \int h u_p d\lambda$ pour tout $h \in L^1(E/R, \lambda)$. D'après le théorème de Lusin (24), il existe un ensemble fermé M_p dans E/R, dont le complémentaire a une mesure $\leqslant 1/2^{p+1}$, et tel que les u_q d'indice $q \leqslant p$ soient toutes *continues* dans M_p ; si N_p est l'intersection des M_r d'indice $r \geqslant p$, N_p est un ensemble fermé dont le complémentaire est de mesure $\leqslant 1/2^p$, et dans lequel *toutes* les fonctions u_m sont continues ; la suite des N_p est d'ailleurs croissante et le complémentaire H de la réunion des N_p est de mesure nulle. Considérons alors la famille de toutes les intersections *finies* d'un nombre quelconque d'ensembles pris parmi les V_n, les V'_n, les N_p et les complémentaires des N_p ; c'est une famille *dénombrable* ; donc, si K est la réunion de ceux des ensembles de cette famille qui

(24) Voir S. Saks, *Theory of the integral*, New-York (1937), p. 72.

sont de mesure-λ nulle, K est de mesure-λ nulle. Soit G le complémentaire, dans E/R, de l'ensemble de mesure nulle $H \cup K$, et soit $\mathcal{F}$ la famille des intersections non vides de G et d'un nombre fini quelconque d'ensembles pris parmi les V_n, les V'_n, les N_p et les complémentaires des N_p ; par définition, les ensembles de $\mathcal{F}$ sont tous de mesure > 0, et l'intersection d'un nombre fini d'ensembles de $\mathcal{F}$, ainsi que le complémentaire par rapport à G d'un ensemble quelconque de $\mathcal{F}$, appartiennent à $\mathcal{F}$. Soit $\mathfrak{L}$ l'ensemble des *partitions finies* de G formées d'ensembles appartenant à $\mathcal{F}$; $\mathfrak{L}$ est encore un ensemble *dénombrable* ; nous supposerons les partitions de $\mathfrak{L}$ rangées en une suite (ϖ_n),

Nous allons maintenant suivre une marche analogue à celle du th. 1. Soit F l'espace *dual* de C(E), c'est-à-dire l'espace des intégrales de Radon sur E. Pour toute partition $\varpi_n = (A_i)$ de G appartenant à $\mathfrak{L}$, nous définirons dans G une fonction f_n à valeurs dans F, de la façon suivante : si $t \in A_i$, $f_n(t)$ sera l'intégrale de Radon sur E telle que $\langle g, f_n(t) \rangle = \frac{1}{\lambda A_i} \int_{\overset{-1}{\varphi}(A_i)} g\, d\mu$; il est clair, d'après la définition de la mesure λ, qu'on a $|\langle g, f_n(t)\rangle| \leqslant \|g\|$ pour toute fonction continue $g \in C(E)$ et pour tout $t \in G$, autrement dit, $\|f_n(t)\| \leqslant 1$ pour $t \in G$. Nous allons alors définir une suite croissante $(\varpi_{n(p)})$ de partitions de $\mathfrak{L}$, telle que : 1° pour toute partition ϖ_m de $\mathfrak{L}$, il existe un indice p tel que $\varpi_{n(p)}$ soit plus fine que ϖ_m : 2° la suite $\big(f_{n(p)}(t)\big)$ converge en tout point de G, pour la topologie faible sur F. Nous procéderons par récurrence sur p. Par hypothèse, les u_q d'indice $q \leqslant p$ sont continus dans N_p ; on peut donc recouvrir N_p par un nombre fini ρ de voisinages V_{n_j} de sorte que, dans chacun des ensembles $N_p \cap V_{n_j}$, l'oscillation de *chacune* des fonctions u_q d'indice $\leqslant p$ soit $\leqslant 1/p$. Soit ϖ'_p la partition de $\mathfrak{L}$ formée par les traces non vides sur G de toutes les intersections de $\rho + 1$ ensembles pris parmi les V_{n_j}, V'_{n_j}, N_p et le complémentaire de N_p ; nous prendrons pour $\varpi_{n(p)}$ une partition de $\mathfrak{L}$ plus fine que ϖ'_p, que ϖ_p et que $\varpi_{n(p-1)}$. Ce choix satisfait évidemment à la première des conditions ci-dessus ; montrons qu'il satisfait aussi à la seconde. Pour cela, si t est quelconque dans G, il existe un indice p tel que $t \in N_p$, et par suite $t \in N_r$ pour tout $r \geqslant p$. Nous allons montrer que pour tout indice k, la suite des $\langle g_k, f_{n(r)}(t)\rangle$ tend vers une limite ; comme les g_k forment un ensemble fortement dense dans C(E), et que la boule unité $\|x\| \leqslant 1$ dans F est faiblement complète, cela établira que la suite $(f_{n(r)}(t))$ est faiblement convergente [25]. Or, si A_i est l'ensemble de la partition $\varpi_{n(r)}$ auquel appartient t, on a $\langle g_k, f_{n(r)}(t)\rangle = \frac{1}{\lambda A_i}\int_{\overset{-1}{\varphi}(A_i)} g_k d\mu = \frac{1}{\lambda A_i}\int_{A_i} u_k d\lambda$; pour tout entier $m \geqslant k$, l'oscillation de u_k dans A_i est par hypothèse $\leqslant 1/m$ dès que $r \geqslant m$; le même raisonnement que dans le th. 1 prouve alors que pour $m \leqslant r < s$, on a

$$|\langle g_k, f_{n(r)}(t) - f_{n(s)}(t)\rangle| \leqslant 4/m ;$$

m étant un entier arbitraire, la convergence faible de la suite des $f_{n(p)}(t)$ en tout point de G est démontrée. Nous désignerons par $f(t)$ la limite de cette suite, qui, pour tout $t \in G$, est donc une intégrale de Radon sur E.

Montrons maintenant que, pour toute fonction $h \in L^1(E/R, \lambda)$, et toute fonction continue g sur E, on a $\int h_1 g\, d\mu = \int_{E/R}\langle g, f(t)\rangle h(t) d\lambda$; le second membre a un sens, car $\langle g, f(t)\rangle$ est limite presque partout dans E/R de la suite de fonctions sommables et bornées $\langle g, f_{n(p)}(t)\rangle$. Les combinaisons linéaires des fonctions caractéristiques d'ensembles appartenant à $\mathcal{F}$ forment un ensemble *partout dense* dans $L^1(E/R, \lambda)$: car pour tout ensemble mesurable A, il existe un ensemble ouvert $U \supset A$ tel que $\lambda(U - A)$ soit arbitrairement petit, et une réunion W d'un nombre fini de V_n telle que $W \subset U$ et que $\lambda(U - W)$ soit arbitrairement petit, et la fonction caractéristique de W est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles de $\mathcal{F}$ (à une équivalence près) ; il suffit donc de démontrer la formule ci-dessus lorsque h est la fonction caractéristique d'un ensemble $A \in \mathcal{F}$; autrement dit, il faut démontrer que $\int_{\overset{-1}{\varphi}(A)} g\, d\mu = \int_A \langle g, f(t)\rangle d\lambda$. Mais il existe un indice p tel que la partition $\varpi_{n(p)} = (A_i)$ soit plus fine que la partition de G formée de A et de son complémentaire par rapport à G ; on a donc $\int_{\overset{-1}{\varphi}(A)} g\, d\mu = \int_A \langle g, f_{n(p)}(t)\rangle d\lambda$ d'après la définition des f_n ; comme $\langle g, f_{n(p)}(t)\rangle$ reste bornée dans A et tend partout vers $\langle g, f(t)\rangle$, le théorème de Lebesgue donne bien à la limite

$$\int_{\overset{-1}{\varphi}(A)} g\, d\mu = \int_A \langle g, f(t)\rangle d\lambda.$$

Enfin, reste à voir que la mesure de Radon correspondant à l'intégrale $f(t)$ a son noyau dans l'ensemble $\overset{-1}{\varphi}(t)$, ou encore que

(25) [1], p. 123, th. 2.

$\langle g, f(t)\rangle = 0$ lorsque la fonction continue g est nulle dans l'ensemble fermé $\overset{-1}{\varphi}(t)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe alors un voisinage V_n de t tel que $|g(x)| \leqslant \varepsilon$ dans $\overset{-1}{\varphi}(V_n)$; il existe une partition $\varpi_{n(p)}$ plus fine que celle formée par les traces de V_n et V'_n sur G ; pour $r \geqslant p$, si A_i est l'ensemble de la partition $\varpi_{n(r)}$ auquel appartient t, on a

$$|\langle g, f_{n(r)}(t)\rangle| \leqslant \varepsilon,$$

d'où à la limite $|\langle g, f(t)\rangle| \leqslant \varepsilon$, et comme ε est arbitraire, $\langle g, f(t)\rangle = 0$.

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant :

Théorème 5. — *Soit* E *un espace compact métrisable,* E/R *un espace quotient séparé de* E, μ *une mesure de Radon dans* E, λ *la mesure quotient de* μ *par* R. *Il existe une partie* G *de* E/R, *dont le complémentaire est de mesure nulle, et pour chaque* $t \in G$, *une mesure de Radon* ν_t *sur la classe d'équivalence* $H(t) = \overset{-1}{\varphi}(t)$ *telle que, pour toute fonction continue numérique* g *sur* E, *la fonction* $t \to \int_{H(t)} g\, d\nu_t$ *soit sommable dans* E/R *et que, pour tout ensemble mesurable* A *dans* E/R, *on ait*

$$\int_{\overset{-1}{\varphi}(A)} g\, d\mu = \int_A \left(\int_{H(t)} g\, d\nu_t\right) d\lambda. \tag{5}$$

Ce résultat appelle diverses remarques. En premier lieu, on peut supposer la mesure de Radon ν_t définie pour *tout* $t \in E/R$, et non seulement dans G : il suffit de prendre ν_t identiquement nulle sur les classes d'équivalence $H(t)$ correspondant aux $t \notin G$; la formule (5) subsiste alors sans modification. D'autre part, par le raisonnement classique du théorème de Lebesgue-Fubini, on étend le th. 5 d'abord au cas où g est semi-continue (supérieurement ou inférieurement) et sommable dans E ; on en déduit que si g est mesurable dans E et nulle presque partout, la restriction de g à $H(t)$ est mesurable et nulle presque partout (pour la mesure ν_t) pour presque tout $t \in E/R$; puis on voit que le th. 5 s'applique à une fonction sommable quelconque g dans E, à condition d'ajouter que la restriction de g à $H(t)$ n'est sommable (pour ν_t) que pour presque tout $t \in E/R$.

Enfin, soit E' un sous-ensemble borélien de E, R' la relation d'équivalence induite sur E' par R (les classes d'équivalence de cette relation étant donc les ensembles $H(t) \cap E'$) ; l'ensemble quotient E'/R' peut être identifié à l'image canonique $\varphi(E')$ de E' dans E/R ; supposons E' pris de sorte que $\varphi(E')$ soit aussi borélien (en général c'est seulement un ensemble analytique). Il suffit alors de remplacer dans (5) la fonction g par sa restriction à E' (qui est sommable) pour voir que le th. 5 s'applique aussi à E' et E'/R' au lieu de E et E/R ; mais il faut observer que la mesure induite par λ sur E'/R' n'est plus une « mesure quotient » au sens strict que nous avons donné plus haut à ces termes ; d'après la formule (5), la « mesure quotient » proprement dite sur E'/R' est donnée par

$$\lambda'A = \int_A \nu_t(H(t) \cap E')d\lambda.$$

9. — Mesures quotients dans les espaces localement compacts.

Soit E un espace localement compact, μ une mesure de Radon sur E (pour laquelle toute fonction continue sur E, nulle hors d'un compact, est donc sommable), R une relation d'équivalence sur E telle que l'espace quotient E/R soit localement compact. Le problème de la définition d'une « mesure quotient » sur E/R et de l'extension à cette mesure du th. 5 se pose d'une tout autre manière que pour les espaces compacts, car si A est un ensemble borélien dans E/R, $\overset{-1}{\varphi}(A)$ est borélien dans E, mais en général *n'est plus de mesure finie*. Nous allons voir qu'ici on peut encore définir sur E/R une mesure de Radon, pour laquelle nous obtiendrons une généralisation du th. 5, mais cette mesure ne sera plus déterminée de façon intrinsèque par μ et R, et c'est plutôt une « classe » de mesures quotients que nous obtiendrons.

Il nous faudra supposer que E est réunion d'une famille dénombrable (E_n) d'ensembles *compacts métrisables* ; alors E/R est réunion dénombrable des ensembles compacts métrisables $E_n/R = \varphi(E_n)$. De la suite (E_n), qu'on peut supposer croissante et même telle que E_n soit contenu dans l'*intérieur* de E_{n+1}, nous déduirons une suite (E'_n) en prenant $E'_1 = E_1$, et pour E'_n $(n \geqslant 2)$ le complémentaire de E_{n-1} par rapport à E_n : E'_n est réunion dénombrable d'ensembles compacts, donc il en est de même de $\varphi(E'_n)$, qui est en particulier borélien dans E/R : les E'_n forment une *partition* de E, et les E'_n/R un recouvrement de E/R. La mesure $\alpha_n = \mu E_n$ est finie par hypothèse ; soit (ρ_n) une suite de nombres > 0 tels que la série de terme général $\rho_n \alpha_n$ soit convergente.

La mesure μ restreinte à E_n donne sur E_n/R une mesure quotient.

qu'on peut aussi considérer comme une mesure de Radon sur E/R ; nous la multiplierons par le facteur ρ_n, et désignerons par λ_n la mesure de Radon ainsi définie sur E/R : pour tout ensemble borélien A dans E/R, on aura donc $\lambda_n A = \rho_n \mu\left(\overset{-1}{\varphi}(A) \cap E_n\right)$. D'après le th. 5, pour chaque indice n, il existe sur chaque ensemble $H(t) \cap E'_n$ une mesure de Radon $\nu_{n,t}$ telle que, pour toute fonction continue g dans E et pour tout ensemble borélien A dans E/R, on ait

$$(6) \qquad \int_{\overset{-1}{\varphi}(A) \cap E'_n} g\, d\mu = \int_A \left(\int_{H(t) \cap E_n} g\, d\nu_{n,t}\right) d\lambda_n.$$

A partir des mesures λ_n, nous allons maintenant définir sur E/R une mesure λ de la façon suivante. D'après le théorème de Lebesgue-Nikodym, pour tout entier $n > 1$, il existe une partition de E/R en deux ensembles M_{1n}, M'_{1n}, qu'on peut supposer boréliens, et une fonction f_{1n}, sommable par rapport à λ_1 et définie dans M_{1n}, tels que $\lambda_1 M'_{1n} = 0$ et, pour tout ensemble borélien A contenu dans M_{1n}, $\lambda_n A = \int_A f_{1n} d\lambda_1$. Soit G_1 l'intersection des M_{1n} pour $n > 1$; le complémentaire G'_1 de G_1 est de mesure-λ_1 nulle, et par suite $\lambda_1 G_1 = \rho_1 \alpha_1$. Pour tout $n > 2$, il existe de même une partition de G'_1 en deux ensembles boréliens M_{2n}, M'_{2n}, et une fonction f_{2n} sommable par rapport à λ_2 et définie dans M_{2n}, tels que $\lambda_2 M'_{2n} = 0$ et, pour tout ensemble borélien A contenu dans M_{2n}, $\lambda_n A = \int_A f_{2n} d\lambda_2$. Soit G_2 l'intersection des M_{2n} pour $n > 2$; le complémentaire G'_2 de $G_1 \cup G_2$ est de mesure-λ_1 et de mesure-λ_2 nulles, et on a $\lambda_2 G_2 \leqslant \rho_2 \alpha_2$. On définit ainsi d'une part une suite (G_n) d'ensembles boréliens deux à deux sans point commun dans E/R, telle que le complémentaire de $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n$ soit de mesure -λ_m nulle pour tout $m \leqslant n$, et d'autre part une suite double (f_{np}) de fonctions $(n < p)$ telle que f_{np} soit définie dans G_n et sommable pour λ_n, et telle que pour tout ensemble borélien A contenu dans G_n, on ait $\lambda_p A = \int_A f_{np} d\lambda_n$; on a en outre $\lambda_n G_n \leqslant \rho_n \alpha_n$. Il en résulte aussitôt qu'on définit une mesure λ dans E/R en prenant pour tout ensemble borélien A, $\lambda A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (A \cap G_n)$; d'après le choix des ρ_n, cette mesure est *finie* pour tout ensemble borélien, et comme elle est définie sur les ensembles boréliens, c'est une mesure de Radon. D'autre part chacune des fonctions f_{np} est sommable pour la mesure λ par définition, et on peut supposer qu'elles sont finies partout (en les modifiant au besoin dans un ensemble de mesure-λ nulle) ; cela étant, pour tout $t \in E/R$, nous définirons sur l'ensemble fermé $H(t) = \overset{-1}{\varphi}(t)$ une mesure ν_t de la manière suivante : si t n'appartient à aucun des G_n, on prendra $\nu_t B = 0$ pour tout ensemble $B \subset H(t)$; si au contraire t appartient à G_n, on prendra, pour tout ensemble borélien B dans $H(t)$,

$$\nu_t B = \nu_{n,t}(B \cap E'_n) + \sum_{p>n} f_{np}(t) \nu_{p,t}(B \cap E'_p) ;$$

ici encore, il est clair qu'on définit une mesure de cette manière sur $H(t)$, mais en général la mesure de $H(t)$ lui-même ne sera pas finie ; toutefois, toute partie *compacte* C de E est contenue dans un E_n, d'après le choix de ces derniers ; en particulier, si $C \subset H(t)$, $C \cap E'_p$ est vide à partir d'un certain indice, et par suite $\nu_t C$ est finie, ν_t est bien une mesure de Radon sur $H(t)$.

Il nous reste à voir qu'avec ces notations, *le théorème 5 est vrai pour toute fonction continue g définie dans* E *et nulle en dehors d'un ensemble compact*. En effet, il existe alors un indice n tel que g soit nulle dans tous les E'_p d'indice $p > n$, d'où pour tout ensemble borélien A dans E/R, $\int_{\overset{-1}{\varphi}(A)} g\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{\overset{-1}{\varphi}(A) \cap E'_k} g\, d\mu$. Or, pour toute partie A_p de G_p, $\overset{-1}{\varphi}(A_p) \cap E'_k$ est de mesure-μ nulle pour tout $k < p$, car $\lambda_k A_p = 0$ d'après la définition de G_p ; si on pose $A_p = A \cap G_p$, on a donc

$$\int_{\overset{-1}{\varphi}(A)} g\, d\mu = \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{k=h}^{n} \int_{\overset{-1}{\varphi}(A_h) \cap E'_k} g\, d\mu \right).$$

Mais, d'après la formule (6), on a pour $h < k \leqslant n$,

$$\begin{aligned} \int_{\overset{-1}{\varphi}(A_h) \cap E'_k} g\, d\mu &= \int_{A_h} \left(\int_{H(t) \cap E'_k} g\, d\nu_{k,t} \right) d\lambda_k \\ &= \int_{A_h} f_{hk}(t) \left(\int_{H(t) \cap E'_k} g\, d\nu_{k,t} \right) d\lambda_h, \end{aligned}$$

d'après la définition des f_{np} ; comme g est nulle dans les E'_p d'indice $p > n$, on a d'autre part pour tout $t \in G_h$,

$$\int_{H(t)} g\, d\nu_t = \int_{H(t) \cap E'_h} g\, d\nu_{h,t} + \sum_{k=h+1}^{n} \int_{H(t) \cap E'_k} f_{hk}(t) \cdot g\, d\nu_{k,t},$$

ce qui démontre aussitôt que la fonction $t \to \int_{H(t)} g\, d\nu_t$ est sommable dans E/R et qu'on a la formule (5).

Par le raisonnement classique du théorème de Lebesgue-Fubini rappelé plus haut (n° 8), on étend encore la formule (5) au cas où g est une fonction sommable quelconque pour la mesure μ (toujours en notant que dans ce cas la restriction de g à $H(t)$ n'est sommable pour ν_t que pour presque tout $t \in E/R$).

Il est clair d'autre part que la définition des mesures λ et ν_t que nous venons de donner comporte une très grande part d'arbitraire : on peut préciser cette remarque en montrant comment d'un système de mesures λ, ν_t satisfaisant au th. 5 on peut en déduire *tout autre système* λ', ν'_t ayant la même propriété. En effet, il résulte d'abord de la formule (5) que la relation $\lambda' A = 0$ est *équivalente* à $\mu(\overset{-1}{\varphi}(A)) = 0$; par suite, les relations $\lambda A = 0$ et $\lambda' A = 0$ sont *équivalentes*, autrement dit les mesures λ et λ' sont *absolument continues l'une par rapport à l'autre* ; par suite, il existe une fonction f sommable pour λ, partout finie et > 0, telle que $\lambda' A = \int_A f d\lambda$ pour tout ensemble borélien $A \subset E/R$; on en déduit

$$\int_A \Big(\int_{H(t)} g \cdot f(t) d\nu' \Big) d\lambda = \int_A \Big(\int_{H(t)} g \, d\nu_t \Big) d\lambda$$

pour tout ensemble borélien $A \subset E/R$ et toute fonction continue g dans E, nulle hors d'un ensemble compact. Or, il existe dans l'espace des fonctions continues dans E_n et nulles hors de E_n une suite partout dense (g_{mn}). Pour chaque g_{mn}, il y a donc dans E/R un ensemble K_{mn} de mesure-λ nulle, tel que pour tout $t \notin K_{mn}$, on ait

$$\int_{H(t)} g_{mn} f(t) d\nu'_t = \int_{H(t)} g_{mn} d\nu_t.$$

Si K est la réunion des K_{mn} (qui est de mesure-λ nulle), les relations précédentes ont lieu pour *tout* couple (m, n) d'entiers, en tout point $t \notin K$; d'après le choix des g_{mn}, on a donc aussi

$$\int_{H(t)} g \cdot f(t) d\nu'_t = \int_{H(t)} g \, d\nu_t$$

pour tout $t \notin K$ et *toute* fonction continue g nulle hors d'un ensemble compact ; cela implique naturellement $\nu_t = f(t)\nu'_t$ pour tout $t \notin K$. Réciproquement, il est clair que si on se donne une fonction f dans E/R, sommable pour λ et partout finie et > 0, les mesures

$$\lambda' A = \int_A f d\lambda \qquad \text{et} \qquad \nu'_t = \nu_t / f(t)$$

formeront un système de mesures satisfaisant encore au th. 5.

Comme me l'a fait remarquer A. Weil, ces résultats s'appliquent en particulier au cas où E est un *groupe localement compact* ayant une base dénombrable, E/R un *espace homogène* E/H correspondant à un sous-groupe fermé H de E, et μ la *mesure de Haar* sur le groupe E. On sait alors qu'il n'existe pas toujours de mesure relativement invariante sur l'espace homogène E/H ([26]) ; mais ce qui précède montre qu'il y a toujours sur E/H une *classe de mesures de Radon* (absolument continues l'une par rapport à l'autre) qui est *invariante* par les opérateurs du groupe E ; quant aux mesures ν_t, elles sont évidemment invariantes par toutes les translations du *sous-groupe* H ; chacune d'elles est donc, à un facteur près, la *mesure de Haar* sur la classe modulo H correspondante.

10. — Remarque sur les transformations conservant la mesure.

Revenons au problème général de la mesure quotient examiné au n° 7. Le théorème énoncé par P. Halmos lui servait à l'étude des transformations conservant la mesure μ dans l'ensemble E ; les résultats qu'il énonce à cet égard restent donc non démontrés dans le cas général. Mais nous allons voir que notre th. 4 peut rendre des services analogues, *à condition qu'on se place dans l'espace de Kakutani* $\tilde{E}$ associé à E. Pour cela, il faut qu'à la transformation T définie dans E et conservant la mesure μ, on puisse associer une transformation $\tilde{T}$ définie dans $\tilde{E}$ et conservant la mesure $\tilde{\mu}$. Or, c'est ce qu'il est facile de faire de la manière suivante : la transformation T dans E définit dans l'espace $L^\infty(E, \mu)$ une transformation que nous noterons encore T, par la condition $Tf(x) = f(Tx)$ pour tout $x \in E$ et tout $f \in L^\infty(E, \mu)$; l'hypothèse que T conserve la mesure entraîne que $\|Tf\|_\infty = \|f\|_\infty$, et $\|Tf\|_1 = \|f\|_1$ dans L^∞ et L^1 respectivement. Cela étant, si on pose $\tilde{T}.\tilde{f} = \widetilde{Tf}$ pour toute fonction $f \in L^\infty(E, \mu)$, on définit une *transformation isométrique* de l'espace $C(\tilde{E})$ des *fonctions continues* sur $\tilde{E}$, à la fois pour la norme $\|\tilde{f}\|$ et pour la norme $\|\tilde{f}\|_1$ induite par l'espace $L^1(\tilde{E}, \tilde{\mu})$; en outre, $\tilde{T}$ transforme toute fonction $\geqslant 0$ en une fonction $\geqslant 0$; il résulte alors d'un théorème de Banach-Stone ([27]) qu'il existe un *homéomorphisme*

([26]) Voir [16], p. 42-45.

([27]) Voir [1], p. 170-172, où le théorème est démontré pour les espaces compacts métriques ; pour les espaces compacts quelconques, voir [15].

de $\tilde{E}$ sur lui-même, que nous noterons encore $\tilde{T}$, tel que l'on ait identiquement $\tilde{T}\tilde{f}(z) = \tilde{f}(\tilde{T}z)$ pour $z \in \tilde{E}$ et $\tilde{f} \in C(\tilde{E})$; l'égalité des normes dans l'espace $L^1(\tilde{E}, \tilde{\mu})$ montre en outre que $\tilde{T}$ *conserve la mesure* $\tilde{\mu}$. Ainsi, si on se place dans l'espace de Kakutani, on a encore dans cet espace une transformation bien déterminée T correspondant à T, qui conserve la mesure et est de plus bicontinue, et à laquelle s'appliquent donc les raisonnements de P. Halmos.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.

[2] G. BIRKHOFF, Integration of functions with values in a Banach space, *Transactions of the American Mathematical Society*, t. 38 (1935), p. 357-378.

[3] S. BOCHNER, Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind, *Fundamenta Mathematicae*, t. 20 (1933), p. 262-276.

[4] J. DIEUDONNÉ, La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, t. 59 (1942), p. 107-139.

[5] J. DIEUDONNÉ, Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym, *Annals of Mathematics*, t. 42 (1941), p. 547-555.

[6] J. DIEUDONNÉ, Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym (II), *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 72 (1944), p. 193-239.

[7] J. L. DOOB, Stochastic processes with an integral-valued parameter, *Transactions of the American Mathematical Society*, t. 44 (1938), p. 87-150.

[8] N. DUNFORD, Uniformity in linear spaces, *Transactions of the American Mathematical Society*, t. 44 (1938), p. 305-356.

[9] N. DUNFORD and B. J. PETTIS, Linear operations on summable functions, *Transactions of the American Mathematical Society*, t. 47 (1940), p. 323-392.

[10] I. GELFAND, Abstrakte Funktionen und linearen Operatoren, *Recueil Mathématique de Moscou*, t. 4 (1938), p. 235-284.

[11] P. R. HALMOS, The decomposition of measures, *Duke Mathematical Journal*, t. 8 (1941), p. 386-392.

[12] P. R. HALMOS, W. AMBROSE and S. KAKUTANI, The decomposition of measures (II), *Duke Mathematical Journal*, t. 9 (1942), p. 43-47.

[13] S. KAKUTANI, Concrete representations of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem, *Annals of Mathematics*, t. 42 (1941), p. 523-537.

[14] B. J. PETTIS, On integration in vector spaces, *Transactions of the American Mathematical Society*, t. 44 (1938), p. 277-304.

[15] M. H. STONE, Application of the theory of boolean rings to general topology, *Transactions of the American Mathematical Society*, t. 41 (1937), p. 375-481.

[16] A. WEIL, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, *Act. Scient. et Ind.*, n° 869, Paris (Hermann), 1940.

(Parvenu aux Annales le 10 septembre 1947.)