ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

HENRY GACHET

# Sur les surfaces et les courbes déformables

*Annales de l'université de Grenoble*, tome 23 (1947-1948), p. 145-154
<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1947-1948__23__145_0>

© Annales de l'université de Grenoble, 1947-1948, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'université de Grenoble » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# SUR LES SURFACES ET LES COURBES DÉFORMABLES

par **Henry GACHET** (Grenoble).

---

Les problèmes sur les surfaces et les courbes mobiles ne sont guère abordés géométriquement que si elles sont indéformables.

Dans ce cas l'utilisation de mouvements d'entraînement est souvent commode ; cependant la considération de plusieurs solides, certains pouvant demeurer en coïncidence (cas fréquent des surfaces et courbes qui peuvent glisser sur elles-mêmes : droites, plans, etc.), cause souvent des lourdeurs et obscurités.

Le but de cette note est d'attirer l'attention sur une notion très simple : la « vitesse normale » d'une surface ou d'une courbe mobile en l'un de ses points. L'emploi systématique de cette notion permet de remédier aux inconvénients signalés et de traiter géométriquement des problèmes avec surfaces et courbes déformables.

Nous utiliserons un système d'axes de coordonnées trirectangle. Nous appellerons surface mobile l'ensemble des points qui pour chaque valeur du temps $t$, vérifient une même égalité $f(x, y, z, t) = 0$ où $f$ est une fonction admettant, au voisinage de chaque système de valeurs $(x_0, y_0, z_0, t_0)$ (1) qui l'annule, quatre dérivées partielles du premier ordre continues, l'une au moins des trois premières étant différente de zéro.

Nous appellerons courbe mobile l'ensemble des points communs à deux surfaces mobiles où celles-ci ne sont pas tangentes.

Nous appellerons point mobile M tout point défini pour chaque valeur de $t$ d'un intervalle ouvert contenant $t_0$, et ayant un vecteur vitesse (ou plus brièvement une vitesse) pour $t = t_0$.

(1) C'est-à-dire chaque variable demeurant dans un intervalle ouvert contenant la valeur correspondante.

**Remarque fondamentale.** — Soit une surface mobile S (ou courbe mobile C) et un point P de sa position $S_0$ (ou $C_0$) à l'instant $t_0$. Les vecteurs vitesses à l'instant $t_0$ des points mobiles M demeurant sur S (ou C) qui passent en P à cet instant [2], ont même projection orthogonale sur la normale en P à $S_0$ (ou le plan normal en P à $C_0$).

Le cas de la surface se déduit immédiatement de la règle de dérivation d'une fonction composée ; la valeur de $f$ en M demeurant nulle, on a à $t_0$

$$\frac{df(x, y, z, t)}{dt} = x' f'_{x_0} + y' f'_{y_0} + z' f'_{z_0} + f'_{t_0} = 0,$$

$x_0, y_0, z_0$, étant les cordonnées de P. En écrivant

$$x' \frac{f'_{x_0}}{\sqrt{f'^2_{x_0} + f'^2_{y_0} + f'^2_{z_0}}} + y' \frac{f'_{y_0}}{\sqrt{f'^2_{x_0} + f'^2_{y_0} + f'^2_{z_0}}} + z' \frac{f'_{z_0}}{\sqrt{f'^2_{x_0} + f'^2_{y_0} + f'^2_{z_0}}} = \frac{-f'_{t_0}}{\sqrt{f'^2_{x_0} + f'^2_{y_0} + f'^2_{z_0}}}$$

le premier membre, produit scalaire, est la mesure algébrique de la projection orthogonale de la vitesse de M à $t_0$, sur la normale orientée à la surface $S_0$ en P ; le second membre montre qu'elle est bien indépendante du mobile M.

Dans le cas de la courbe, la projection orthogonale des vitesses des mobiles M considérés, sur le plan normal en P à $C_0$ est bien déterminée par ses deux projections orthogonales sur les normales en P aux surfaces qui déterminent $C_0$ ; elle est par suite indépendante de M.

Définition. — La projection orthogonale commune de la remarque précédente sera appelée **vitesse normale** de S (ou de C) en P à l'instant $t_0$ ou plus brièvement **vitesse de la surface** (**ou courbe**) **en** P à $t_0$ [3].

Dans les applications, on utilisera systématiquement la remarque fondamentale et les remarques suivantes qui s'en déduisent.

(2) La théorie classique des fonctions implicites montre qu'il y a de tels mobiles et que la projection orthogonale de leur vecteur vitesse sur le plan tangent en P à $S_0$ (ou tangente en P à $C_0$) peut être quelconque.

(3) Dans le cas où la figure est indéformable il ne faut pas confondre sa vitesse en P et la vitesse d'entraînement de P.

## RELATIONS ENTRE LES DIVERSES VITESSES

*a*) Nous avons vu comment construire la vitesse en P à $t_0$ de la courbe intersection de deux surfaces mobiles passant par P, mais non tangentes en ce point, à $t_0$, connaissant la vitesse de celles-ci en P à $t_0$.

*b*) De façon analogue S et C étant une surface et une courbe mobiles passant en P à $t_0$ mais non tangentes en ce point, on sait que le point d'intersection de S et C qui tend vers P quand $t$ tend vers $t_0$ est un mobile M demeurant sur S et C, nous aurons donc sa vitesse par les projections orthogonales de celle-ci sur la normale à $S_0$ et le plan normal à $C_0$ en P, si nous connaissons les vitesses de S et C en P à $t_0$.

*c*) Si une surface mobile S et une courbe mobile C demeurent tangentes en un point mobile Q, défini pour les valeurs de $t$ d'un intervalle ouvert contenant $t_0$, qui tend vers P quand $t$ tend vers $t_0$ la vitesse de S en P à $t_0$ est la projection orthogonale de celle de C sur la normale en P à $S_0$ (4). En particulier ces conditions demeurent réalisées si C demeure sur S.

*d*) Si deux surfaces (ou courbes) mobiles demeurent tangentes en un point mobile Q, défini pour les valeurs de $t$ d'un intervalle ouvert contenant $t_0$, qui tend vers P quand $t$ tend vers $t_0$, alors elles ont même vitesse normale en P à $t_0$ (4). En particulier si l'une des surfaces est fixe et si le contact a lieu tout le long d'une courbe mobile C, la surface mobile a une vitesse normale nulle aux points de C. Si le point de contact d'une courbe fixe et d'une courbe mobile C varie continûment avec $t$ la vitesse de C au point de contact est nulle.

Réciproquement : s'il existe sur une courbe mobile C un point mobile Q où C a une vitesse nulle, défini et muni d'un vecteur vitesse non nul dans un intervalle de temps ouvert, C demeure tangente en Q au lieu de ce point ; s'il existe sur une surface mobile S une courbe mobile C où sa vitesse demeure nulle, S demeure tangente le long de C à la surface engendrée par C exception faite pour les points où C a une vitesse nulle ; si un tel point Q

(4) Immédiat si Q est remplacé par M, sinon on peut étendre les méthodes classiques relatives aux enveloppes.

a une vitesse non nulle dans un intervalle de temps ouvert C demeurera tangente en Q au lieu de ce point.

Signalons rapidement un résultat facile à démontrer où la vitesse normale intervient. Soit un volume variable limité en tout ou partie par une portion $\Sigma$ d'une surface mobile S le reste de la surface limitante étant fixe ou engendré par le contour limitant $\Sigma$, si cette surface limitante est assez régulière la mesure du volume est une fonction V de $t$ ayant une dérivée donnée par $V'_t = \int_\Sigma V_n dS$ où $dS$ est l'élément d'aire et $V_n$ la mesure algébrique sur la normale extérieure de la vitesse normale à S en un point décrivant $\Sigma$.

Résultat analogue pour l'aire A limitée en tout ou partie par un arc $ab$ de courbe mobile $A'_t = \int_{ab} V_n ds$, $ds$ étant l'élément d'arc.

Cas particuliers. — Nous étudierons la répartition des vitesses normales à un instant $t_0$ dans le cas du plan $\Pi$ mobile et de la droite D mobile. Pour cela nous porterons en chaque point P de $\Pi_0$ (ou $D_0$) le vecteur $\overrightarrow{PP'}$ représentant la vitesse normale en P.

*Plan*. — Tout mobile M demeurant dans le plan mobile vérifie $\overrightarrow{OM} \,.\, \vec{u} = a$, $\vec{u}$ étant un vecteur unitaire ayant des dérivées partielles continues [5] en dérivant l'égalité précédente par rapport à $t$, à $t_0$,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \overrightarrow{OP} + \vec{u} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{da}{dt},$$

en remarquant que $\dfrac{d\vec{u}}{dt}$ est orthogonal à $\vec{u}$ on a les égalités

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \overrightarrow{OP} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{PP'} = \frac{da}{dt},$$

$$\vec{u} \,.\, \overrightarrow{OP} = a,$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \overrightarrow{PP'} = 0.$$

En les ajoutant membre à membre on en déduit

$$\overrightarrow{OP'}\left(\vec{u} + \frac{d\vec{u}}{dt}\right) = a + \frac{da}{dt}$$

qui montre que P' décrit un plan $\Pi'$ quand P décrit $\Pi_0$.

[5] On le verrait par exemple en remarquant que les points de rencontre du plan mobile et d'un trièdre fixe à choisir admettent des vitesses continues.

*Droite.* — On peut trouver sur cette droite mobile un point mobile $M_0$ muni d'une vitesse continue et un vecteur unitaire de dérivé continu (6). Soit $\overrightarrow{P_0P_0'}$ la vitesse normale de la droite en $P_0$ position de $M_0$ à $t_0$. Si $\lambda$ est une fonction de $t$ admettant une dérivée pour $t_0$ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_0 + \lambda\vec{u}$ définit un mobile M, et à $t_0$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}_0}{dt} + \lambda\frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u}\frac{d\lambda}{dt}$$

d'où en P

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_0 + \lambda\vec{u},$$

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{P_0P_0'} + \lambda\frac{d\vec{u}}{dt}$$

et en ajoutant

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP_0'} + \lambda\left(\vec{u} + \frac{d\vec{u}}{dt}\right)$$

qui montre que P' décrit une droite D' quand P décrit $D_0$.

Définition. — Les plan Π' et droite D' seront respectivement appelés plan des vitesses de Π et droite des vitesses de D à $t_0$.

On utilisera constamment la droite des vitesses dans les applications et si D reste dans un plan fixe orienté

$$\operatorname{tg}(D, D') = \operatorname{tg}\left(\vec{u}, \vec{u} + \frac{d\vec{u}}{dt}\right)$$

est la vitesse angulaire de D, par suite si deux droites $D_1$ et $D_2$ mobiles dans un plan fixe font un angle constant leurs droites des vitesses $D_1'$ et $D_2'$ font le même angle.

*Sphère.* — Le théorème d'Huyghens donnant la dérivée de la longueur d'un segment fournit la répartition des vitesses normales, à $t_0$, à l'aide de la vitesse du centre et de la dérivée du rayon par rapport au temps. Il en est de même pour le cercle mobile dans un plan fixe.

## APPLICATIONS

Ce qui précède est utile pour le problème général suivant : construire le vecteur vitesse à l'instant $t_0$ d'un point M d'une figure,

(6) On pourra pour le voir, d'abord couper par un plan fixe à choisir, puis par la sphère mobile, de rayon un, centrée en ce point.

sachant qu'un certain nombre de points qui déterminent cette figure ont des vecteurs vitesses continus au voisinage de $t_0$ et connaissant à l'instant $t_0$ les positions et les vecteurs vitesses de ces points.

Si l'on connaît une construction de M à la règle et au compas à partir de $M_1, M_2, \dots, M_p$ valable dans un intervalle de temps on pourra en général construire à la règle et au compas la vitesse de M à $t_0$ connaissant à $t_0$ les points $M_1, M_2, \dots, M_p$ et leurs vecteurs vitesse [7].

Le paramètre $t$ pourra bien entendu désigner autre chose que le temps. Le lecteur a sans doute remarqué les applications possibles à la géométrie, construction de tangentes, plans tangents, points caractéristiques, etc.

Retrouvons par exemple les résultats élémentaires pour les surfaces réglées : la droite des vitesses D′ de D à $t$ fournissant la vitesse normale en tout point de D à $t$ fournit le plan tangent en tout point de D non sur D′. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit le même tout le long de la génératrice est donc que D et D′ soient coplanaires. S'il en est ainsi, il existe en général un point I de D où sa vitesse est nulle ; si ce point admet un vecteur vitesse non nul dans un intervalle de temps, D demeure tangente au lieu de I et inversement si D reste tangente à une courbe en I variant continûment avec $t$, D′ passe par I (cas particulier où I conserve une vitesse nulle, et celui où D′ demeure parallèle à D ; dans ce dernier cas $\vec{u} + \frac{d\vec{u}}{dt}$ parallèle à $\vec{u}$ entraîne $\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$, $\vec{u}$ fixe).

Dans le cas où D′ et D ne sont pas coplanaires le support de la vitesse normale en un point variable de D ($t$ fixe) s'appuie sur deux droites fixes en restant parallèle à un plan fixe et par suite engendre un paraboloïde hyperbolique ; il en est donc de même de la normale à S. On voit encore que le point central est le pied de la perpendiculaire commune à D et à D′ ce qui est lié à un résultat bien connu.

Passons maintenant à un exemple cinématique.

Jet variable. — Un engin permet de lancer à chaque instant d'un point fixe O une particule avec une vitesse $\vec{V}_0$, qui demeure dans un

(7) On construira les vecteurs vitesse des points intermédiaires de la construction à l'aide des droites des vitesses et du théorème d'Huygens. Il y aura exception si un point intermédiaire est obtenu comme commun à deux courbes accidentellement tangentes.

plan fixe avec une longueur $V_0$ constante et admet en outre un vecteur dérivé continu. La particule est ensuite soumise à une force qui lui imprime une accélération $\vec{g}$ constante, dite verticale, de longueur $g$, située dans le plan fixe. Dans ces conditions il est classique que chaque particule décrit une portion de parabole (ou exceptionnellement de droite si $\vec{g}$ et $\vec{V_0}$ sont parallèles) ; les directrices de ces paraboles sont confondues en la droite horizontale passant par le point H défini $\overrightarrow{HO} = \frac{V_0^2}{2g}\, g$.

Le mobile parti de O à l'instant $t$ a une trajectoire T qui dépend de $t$, courbe mobile avec $t$. Cherchons sa vitesse normale en un de ses points P à l'instant $t$ ; pour cela nous allons construire la vitesse en P de la tangente à T au point d'intersection R de la trajectoire avec la parallèle à $\vec{g}$ menée par P.

Soit K la projection orthogonale de P sur la directrice, le point R se trouve sur la médiatrice $\Delta_1$ du segment FK, F étant le foyer de la parabole qui est symétrique de H par rapport au support $\Delta$ de $\vec{V_0}$.

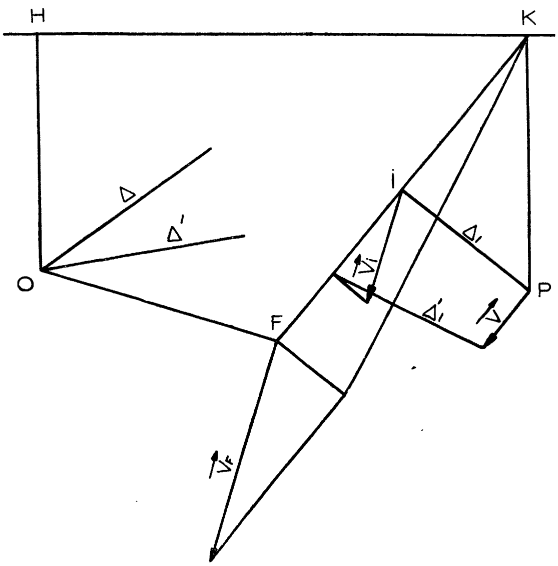

Fig. 1.

La vitesse angulaire de OF, double de celle de $\Delta$, nous permet de construire la vitesse de F et par suite celle du milieu I de FK ainsi que la droite des vitesses de FK. Nous savons que la droite $\Delta_1'$ des vitesses de $\Delta_1$ est orthogonale à celle de FK, et nous en connaissons un point : l'extrémité de la vitesse normale de $\Delta_1$ en I ; on en déduit $\Delta_1'$ qui donne la vitesse normale $\vec{V}$ de $\Delta_1$ en P. $\vec{V}$ est le vecteurvitesse de la trajectoire T en P.

Si une courbe mobile (ou non) avec $t$, passe en P à l'instant $t_0$ et n'y est pas tangente à T, le point de rencontre M qui tend vers P quand $t$ tend vers $t_0$ a un vecteur vitesse à cet instant, que le vecteur $\vec{V}$ permet de construire si l'on connaît à l'instant $t_0$ la tangente à C et le vecteur vitesse de C en P. Ceci donnerait la vitesse

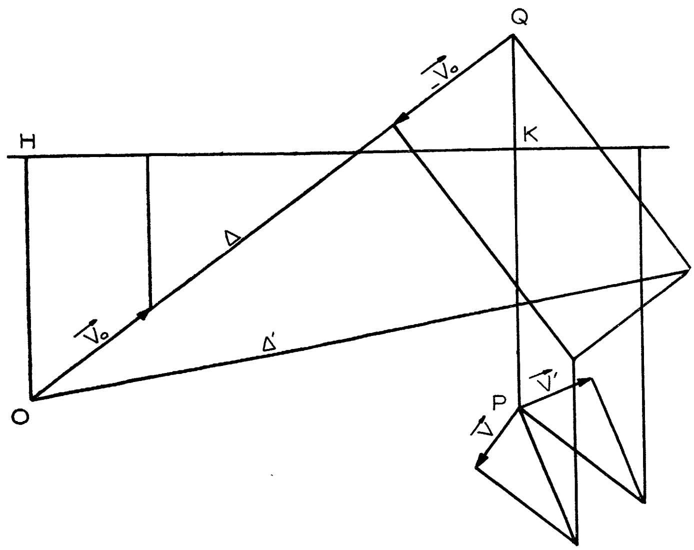


Fig. 2.

du point de chute sur C si le temps mis par le projectile pour aller de O à P était négligeable ($g$ et $V_0$ grands).

A chaque instant $\tau$ les particules lancées de O forment une figure dépendant de $\tau$ que nous appellerons le jet. Nous l'obtiendrons en prenant pour chaque valeur de $t$ inférieure à $\tau$ la position S de la particule lancée à l'instant $t$ qui a voyagé pendant le temps $\tau - t$. Pour cela on remarquera que la projection horizontale de la particule reste la même que si son mouvement était rectiligne uniforme avec même vitesse initiale $\vec{V}$. Le point S se trouve donc au point de rencontre de la trajectoire T et de la verticale menée par le point Q défini par $\overrightarrow{OQ} = \vec{V}_0(\tau - t)$ (en supposant qu'à l'instant $t$, $\vec{V}_0$ n'est pas vertical), le vecteur $\overrightarrow{OQ}$ admet donc un vecteur dérivé par rapport à $t$, continu par rapport à $t$ et à $\tau$. Sa projection orthogonale sur $\Delta$ est $-\vec{V}_0$, sa projection sur la normale à $\Delta$ est fournie par $\Delta'$. La construction de $\dfrac{d\overrightarrow{OS}}{dt}$ en résulte ainsi que sa continuité par rapport à $t$ et $\tau$, ce vecteur ne peut être nul que si $\vec{V}$ est nul et $\frac{d\overrightarrow{OQ}}{dt}$ vertical. En exceptant le cas particulier où ceci se produit en P pour $t = t_0$ et $\tau = \tau_0$ nous pouvons limiter $t$ à un intervalle ouvert contenant $t_0$ le jet J ainsi obtenu étant une courbe mobile avec $\tau$.

Le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OS}}{dt}$ donne alors la tangente en P à J et nous aurons la vitesse $\vec{V}'$ de J en P à l'instant $\tau_0$ en prenant comme mobile demeurant sur J la particule lancée de O à l'instant $t_0$ ; la vitesse de ce mobile est déterminée par sa projection horizontale qui est celle de $\vec{V}_0$ et son support qui est la tangente en P à T.

Les points caractéristiques du jet seront obtenus quand $\vec{V}' = 0$, on voit par la construction de $\vec{V}'$ que ceci se produit à la condition nécessaire et suffisante que $\vec{V} = 0$, c'est-à-dire soit si P est sur la parabole de sécurité, soit si $\frac{d\vec{V}_0}{dt} = 0$ ; alors trajectoire et jet sont tangents.

Dans le premier cas le point caractéristique décrit une portion de la parabole de sécurité ; dans le second il décrit la trajectoire de la particule lancée à l'instant où $\frac{d\vec{V}_0}{dt} = 0$.

Si maintenant nous cherchons la vitesse du point de chute M sur une courbe C fixe ou mobile avec $\tau$ passant en P à l'instant $\tau_0$ et non tangente en P à J il nous suffira d'opérer avec $\vec{V}'$, comme précédemment avec $\vec{V}$, le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\tau}$ est continu par rapport à $\tau$.

Dans le cas où $\vec{V} \neq 0$ on a $\vec{V}' \neq 0$ et $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\tau} \neq 0$, il existe un intervalle pour $\tau$ contenant $\tau_0$ tel que M décrive une courbe mobile $\Gamma$. A chaque instant le point de chute sur C est aussi point de chute sur $\Gamma$ ; la valeur de $t$ qui lui correspond est une fonction de $\tau$, continue par construction de $t$, M est un point commun à la trajectoire T correspondante et à $\Gamma$.

D'après ce qui précède, si T et $\Gamma$ ne sont pas tangentes en P à $t_0$, elles ont un point de rencontre et un seul tendant vers P quand $t$

tend vers $t_0$ ; le vecteur dérivé $\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}$ que nous savons construire n'est pas nul pour $t_0$ et l'égalité

$$\frac{\Delta\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\Delta\tau}=\frac{\Delta\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\Delta t}\times\frac{\Delta t}{\Delta\tau}$$

montre que quand $\Delta\tau$ tend vers o, $\dfrac{\Delta t}{\Delta\tau}$ tend vers une limite finie non nulle $r$ définie par $\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{d\tau}=\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}\times r$.

Si le point O lance à l'instant $t_0$ les particules avec un débit $d$ fini ou non, défini comme la limite du rapport $\dfrac{\Delta q}{\Delta t}>0$ quand $\Delta t$ tend vers o, $|\Delta q|$ étant la quantité de particules émises pendant l'intervalle de temps $\Delta t$.

Le débit $d'$ reçu par la courbe C, défini de façon analogue pour le point de chute M qui tend vers P quand $\tau$ tend vers $\tau_0$ est la limite du rapport $\dfrac{\Delta q'}{\Delta\tau}=\left|\dfrac{\Delta q}{\Delta\tau}\right|=\left|\dfrac{\Delta q}{\Delta t}\right|\times\left|\dfrac{\Delta t}{\Delta\tau}\right|$, donc $d'=d\times|r|$.

Le cas de $r$ négatif s'interprète facilement ; on se trouve dans ce cas avec un jet d'eau puissant dirigé vers le haut à l'ouverture du robinet puis rabattu rapidement vers le sol horizontal (cas de la figure).

Nous proposons au lecteur le cas où O est mobile avec une vitesse continue dans le plan fixe contenant les trajectoires. Les mêmes méthodes s'appliquent et s'appliqueraient encore si O et $\overrightarrow{V_0}$ n'étaient pas astreints à demeurer dans un plan fixe.

(Parvenu aux Annales le 15 janvier 1948.)