ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

JEAN KUNTZMANN

Remarques sur le calcul approché des racines d'une équation

Annales de l'université de Grenoble, tome 23 (1947-1948), p. 143-144

<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1947-1948__23__143_0>

REMARQUES SUR LE CALCUL APPROCHÉ DES RACINES D'UNE ÉQUATION

par J. **KUNTZMANN** (Grenoble).

Soit $f(x) = 0$ l'équation proposée. Nous supposerons que dans l'intervalle où l'on a enfermé la racine, la fonction $y = f(x)$ possède une fonction inverse et admet des dérivées jusqu'au 2^e ordre. Nous désignerons par $y'y''$, etc., $x'x''$, etc., les dérivées des divers ordres de y par rapport à x et de x par rapport à y. Les quantités relatives à un même point de la courbe représentative seront toutes affectées du même indice inférieur.

Nous désignerons par ε une borne supérieure de $\dfrac{y'_1 - y'_2}{y'_1}$ dans l'intervalle considéré (1, 2 quelconques dans l'intervalle).

C'est aussi une borne supérieure de $\dfrac{x'_1 - x'_2}{x'_1}$ car

$$\frac{x'_1 - x'_2}{x'_1} = \frac{\dfrac{1}{y'_1} - \dfrac{1}{y'_2}}{\dfrac{1}{y'_1}} = \frac{y'_2 - y'_1}{y'_2}$$

ε est invariant par tout changement d'échelles et pour une même échelle est en gros proportionnel à la longueur de l'intervalle car

$$\frac{y'_1 - y'_2}{y'_1} = \frac{y''_3}{y'_1}(x_1 - x_2).$$

Tant que ε n'est pas très petit, l'arc a une courbure appréciable sur les tracés à grande échelle, et le tracé graphique donne de meilleurs résultats que l'approximation par la corde ou la tangente.

Au contraire lorsque ε est très petit :

1° la corde, la tangente et l'arc sont graphiquement confondus ;

2° le point sur la corde ou sur la tangente donne des valeurs très approchées qu'il ne suffirait pas de déterminer graphiquement.

Pratiquement, on commencera à opérer par le calcul lorsque $\varepsilon \neq \frac{1}{100}$.

Calcul de l'erreur par les méthodes de Newton et des parties proportionnelles.

Ces deux méthodes se ramènent à une seule. On a deux points 1, 2 (distincts ou confondus). On remplace la courbe par la droite qui les joint. Prenons y comme variable, x comme fonction. Cela revient à trouver x_0 correspondant à $y_0 = 0$.

On a

$$x_1 - x_0 = (y_1 - 0)x'_\theta \qquad \theta \text{ entre } 0 \text{ et } 1,$$
$$x_2 - x_1 = (y_2 - y_1)x'_{\theta'} \qquad \theta' \text{ entre } 1 \text{ et } 2.$$

On remplace θ par θ'.

On commet ainsi sur le terme correctif une erreur relative inférieure à $\frac{x'_\theta - x'_{\theta'}}{x'_\theta}$, donc inférieure à ε (ε étant relatif à l'intervalle 0, 1, 2).

Il peut être intéressant d'avoir une expression de l'erreur au moyen des dérivées de y.

On écrit :

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(y - y_1) + K(y_2 - y)(y_1 - y)$$

et on choisit K pour que ceci soit vrai pour $y = 0$. On a alors en dérivant deux fois la quantité $x(y) - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(y_2 - y)K(y_1 - y)$ qui s'annule pour $y = y_1$, $y = y_2$, $y = 0$, $x''_{\theta'} = 2K$ (θ' sur 0, 1, 2).

L'erreur commise en interpolant linéairement, c'est-à-dire en négligeant le dernier terme est donc

$$\frac{x''_{\theta'}}{2} y_1 y_2 = \frac{y''_{\theta'}}{2y'^3_{\theta'}} y_1 y_2.$$

Cette formule est valable, même si y_1 et y_2 sont de même signe (Par exemple, dans le cas de la méthode de Newton $y_1 = y_2$).

La borne supérieure de l'erreur ainsi trouvée est meilleure que celle donnée habituellement.

(Parvenu aux Annales le 1er décembre 1947.)