ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

MARCEL BRELOT

Sur le principe des singularités positives et la topologie de R. S. Martin

Annales de l'université de Grenoble, tome 23 (1947-1948), p. 113-138
<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1947-1948__23__113_0>

SUR LE PRINCIPE DES SINGULARITÉS POSITIVES ET LA TOPOLOGIE DE R. S. MARTIN (*)

par **M. BRELOT** (Grenoble).

I. — INTRODUCTION

La topologie générale, depuis quelques années, joue un rôle décisif pour développer et renouveler la théorie des fonctions harmoniques et du potentiel : citons *la théorie du potentiel en espaces abstraits* (surtout d'après H. Cartan), la *topologie « fine »* de H. Cartan (rendant continues les fonctions sous-harmoniques ou potentiels ordinaires et dont les voisinages d'un point sont, à ce point près, les complémentaires des ensembles *effilés en ce point*) et l'usage de la limite correspondante dite aussi *pseudo-limite*, la *métrique « naturelle » de Mazurkiewicz* sur un domaine, utilisée pour le *problème de Dirichlet « ramifié », les topologies diverses* de H. Cartan *sur l'ensemble des distributions de masses* avec usage de l'espace de Hilbert (1), enfin, et c'est notre présent sujet, la *métrique* de R. S. Martin qui permit à son auteur, dans un mémoire capital (2), d'étendre, grâce à la frontière spéciale correspondante, la formule de Poisson-Stieltjes,

(*) Ce travail a été résumé dans une Note des C. R., t. 226 (5 janvier 1948), p. 49 et exposé dans une conférence à Paris le 23 février 1948.

(1) On trouvera les références essentielles sur ces divers sujets dans les articles de H. Cartan et M. Brelot publiés dans le tome précédent (t. 22) des présentes Annales. Signalons aussi les recherches sur le potentiel de J. Deny, à peine publiées encore (Voir C. R., mai 1946), utilisant les « distributions » de L. Schwartz, introduites dans ces Annales, t. 21.

Le problème ramifié correspond à une décomposition des points-frontière accessibles selon les chemins d'accès (groupés en classe d'équivalence), ou encore à la frontière obtenue par complétion du domaine muni de la structure uniforme (dite « ramifiée ») de la métrique de Mazurkiewicz. Voir ces Annales, t. 22, p. 169-172.

(2) R. S. Martin. Minimal positive harmonic fonctions. Trans. Am. Math. Soc., t. 49 (1941), p. 137-172.

pour une représentation intégrale des fonctions harmoniques > 0 dans un domaine quelconque.

Cette représentation est étroitement liée au *principe des singularités positives* de Bouligand, fort important en soi, mais dont la validité trop restreinte demandait des transformations ; et si la question générale [3] est difficile et délicate, elle paraît actuellement l'une des plus importantes, des plus urgentes à approfondir et à exploiter en théorie des fonctions harmoniques.

Je commencerai par rappeler les résultats essentiels de Martin pour les commenter un peu, les compléter et en déduire des *formes nouvelles et générales du principe des singularités* > 0 où de nouveaux points-frontière remplacent les anciens ordinaires ou même ramifiés. Mais tout cela est un peu tautologique et pour s'en servir, on désirerait mieux connaître géométriquement la topologie de Martin dont la définition est trop voisine du résultat qu'il en tirait et dont les points-frontière correspondent biunivoquement aux fonctions harmoniques en P, limites du rapport des fonctions de Green $G(M, P)/G(M, P_0)$ quand M approche la frontière.

Lorsque la frontière est assez régulière, en particulier pour le cercle ou la sphère, on retrouve la structure uniforme euclidienne, les points-frontière ordinaires et le principe de Bouligand ; dans les domaines plans qui se représentent conformément sur le cercle, la structure uniforme de Martin est celle des bouts premiers (qui est moins fine que la structure ramifiée et non comparable à la structure euclidienne) et le cas plan de la connexion finie est encore simple ; mais le cas général semble complexe et des exemples jusqu'à maintenant trop peu nombreux seraient utiles pour s'orienter. Je donnerai ici des *exemples nouveaux* (en particulier dans le plan qu'on aurait pu croire privilégié) où la *topologie de Martin « décompose » un point-frontière même ramifié,* et aussi, ce qui est nouveau, *peut en « accoler » deux distincts,* ce qui est d'ailleurs voisin d'exemples de non-validité du principe de Bouligand et signifie que la structure ramifiée est comme la structure euclidienne non comparable à celle de Martin.

[3] Voir essentiellement un aperçu par J. Deny dans la *Revue Scientifique* (août 1947). Sous sa forme initiale (Voir Bouligand, fasc. XI du Mémorial des Sciences Math., 1927) le principe, lorsqu'il est valable, consiste dans l'existence et unicité à un facteur près, des fonctions harmoniques $u > 0$ venant s'annuler à la frontière, sauf en un point Q. On peut l'assouplir en supposant u s'annulant aux points-frontière réguliers $\neq Q$ et seulement bornée au voisinage des points irréguliers $\neq Q$, et en décomposant les points accessibles, mais cela n'écarte pas les exemples simples de non-validité (par multiplicité ou non-existence) donnés par Bouligand et Martin, d'ailleurs seulement dans l'espace.

D'autre part, je montrerai que la topologie de Martin a encore d'autres usages. Imaginée pour remplacer auxiliairement l'emploi de la dérivée normale de la fonction de Green (fonction qui, comme on sait, se comporte comme la distance à la frontière quand celle-ci est assez régulière), elle va permettre *de généraliser à des frontières quelconques des résultats classiques où interviennent des dérivées normales* : tel est le théorème d'existence et unicité de Cauchy pour les fonctions harmoniques dont on impose la valeur et celle de la dérivée normale le long d'un arc ou d'une portion de surface. Pour une limite nulle, en gros, de la fonction sur une partie de la frontière d'un domaine, on remplacera la dérivée normale par le quotient-limite par la fonction de Green. On obtiendra ainsi, avec une frontière à peu près quelconque, des *résultats d'unicité et aussi d'existence à ε près*. Comme dans le problème classique de Cauchy selon M. Hadamard [4], il n'y a d'ailleurs pas « stabilité », c'est-à-dire que pour des données voisines, les solutions ne sont pas nécessairement voisines.

Sauf indication contraire, les notions topologiques seront prises dans l'espace compact $\overline{R}_\tau$ [5] obtenu à partir de l'espace euclidien R_τ (à $\tau \geqslant 2$ dim.) par adjonction du point $\mathcal{R}_\tau$ à l'infini. On notera $\overline{E}$, $\overset{*}{E}$ l'adhérence et la frontière de l'ensemble E de cet espace. Il sera parfois commode de se servir d'une métrique fixée $\mathfrak{D}$ du compact $\overline{R}_\tau$.

II. — MÉTHODE ET RÉSULTATS ESSENTIELS DE MARTIN

2. — Plaçons-nous, par généralité, selon notre habitude récente, dans l'espace compact $\overline{R}_\tau$ et prenons-y un domaine Ω de complémentaire non polaire (ce sera le cas de Ω borné).

Soit dans Ω, u harmonique > 0 ; α étant un compact (c'est-à-dire un ensemble fermé de $\overline{R}_\tau$) quelconque dans Ω, remplaçons sur $\Omega - \alpha$, u par la solution du problème de Dirichlet $H_\varphi^{\Omega-\alpha}$ où φ vaut u dans Ω et 0 ailleurs.

On voit facilement que la nouvelle fonction v se régularise selon $\widehat{v}$ surharmonique par abaissement convenable aux points d'effilement

[4] Voir Hadamard, Le problème de Cauchy (Hermann, Paris, 1932), p. 40.

[5] Voir l'extension à $\overline{R}_\tau$ des notions sur les fonctions harmoniques dans un article des Annales de l'Ecole N. S., t. 61 (1944). Noter aussi que les notions de croissance, décroissance, majorante, minorante, structure plus fine ou moins fine, seront toujours prises au sens large (égalités incluses).

de α. D'ailleurs $\widehat{v}$ s'obtient par « extrémisation » de u sur $\Omega - \alpha$ (6), c'est-à-dire que c'est dans Ω la plus petite fonction surharmonique $\geqslant 0$ égale à u quasi-partout sur le complémentaire. Ainsi :

$$\widehat{v}(P) = \int G_\Omega(M, P)\, d\mu_M$$

où μ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur $\overset{*}{\alpha}$.

En introduisant P_0 fixe et $K(M, P) = G(M, P)/G(M, P_0)$, on a :

$$\widehat{v}(P) = \int K(M, P)\, d\nu_M$$

où ν est une autre mesure $\geqslant 0$ sur $\overset{*}{\alpha}$ mais telle que la masse totale vaut $\widehat{v}(P_0)$, c'est-à-dire $u(P_0)$ si P_0 est intérieur à α.

Pour obtenir une *représentation intégrale* de u, Martin cherche à passer à la limite sur cette formule, lorsque α tend en croissant vers Ω dans une suite α_n (7). Le premier membre tend vers $u(P)$. Pour opérer au second avec une extraction de suite, Martin *choisit* une frontière « idéale » Δ de Ω et une métrique sur $\Omega \cup \Delta$ rendant cet espace *compact* mais conservant la topologie de Ω, et de sorte que $K(M, P)$ soit prolongeable avec continuité en M sur $\Omega \cup \Delta$ en devenant donc harmonique > 0 en P sur Ω pour $M \in \Delta$.

Il obtient ainsi : (1) $u(P) = \int K(M, P)\, d\mu_M$ (μ mesure de Radon $\geqslant 0$ sur Δ). Il est évident d'ailleurs que cette intégrale est toujours une fonction harmonique $\geqslant 0$ de P ; et si μ était une mesure $\geqslant 0$ sur le nouvel espace $\Omega \cup \Delta$, on aurait une représentation générale des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ dans Ω.

Il est intéressant de voir comment l'examen de cette méthode de passage à la limite conduit naturellement au choix de Martin. Restreignons-nous d'abord à prendre P dans un petit domaine partiel σ contenant P_0 et M hors d'un ouvert ω_0 tel que $\overline{\sigma} \subset \omega_0 \subset \overline{\omega}_0 \subset \Omega$.

La continuité désirée de $K(M, P)$ en M nous amène à imposer la continuité uniforme sur $\Omega - \omega_0$ de tous ces K d'ailleurs bornés. On

(6) Voir mon mémoire du *J. de Math.*, t. 24 (1945), qui contient sous une forme plus générale les résultats préliminaires de Martin et dont je prends le même langage pour le cas surharmonique que pour le cas sous-harmonique. Je rappelle dans le texte la définition de l'extrémisation donnant l'« extrémale » et qui s'appliquerait, au lieu de $\Omega - \alpha$, à toute partie E de Ω. Cette extrémale de u surharmonique $\geqslant 0$ minore u, décroît quand E croît et lorsque E est ouvert, y vaut toujours H_φ^E avec $\varphi = u$ dans Ω, $\varphi = 0$ ailleurs (Dans sa terminologie, H. Cartan dirait : extrémisation relative à l'ensemble qui est le complémentaire de notre E).

(7) On pourrait prendre aussi l'ordonné filtrant des compacts.

introduira donc sur $\Omega - \omega_0$ la structure uniforme la moins fine rendant ces K uniformément continus ([8]).

On verra que la topologie correspondante est celle de $\overline{R}_\tau$. Par complétion conservant la séparation s'adjoint selon la convention de langage courante un ensemble Δ dont chaque point correspond à toutes les suites M_n, à tous les filtres sur $\Omega - \omega_0$ sans point adhérent dans Ω et pour lesquels la fonction de P, K(M, P) admet une même limite d'ailleurs harmonique > 0 dans tout Ω. On verra que $(\Omega - \omega_0) \cup \Delta$ est bien compact dans la topologie correspondante et que la structure peut être métrisée par borne sup $|K(M_1, P) - K(M_2, P)|$ pour $P \in \sigma$, ou encore par l'intégrale en volume de cette différence en module quand P décrit un domaine sphérique s de σ.

Si l'on veut une structure uniforme sur tout Ω, on pourrait faire un prolongement mais on peut directement choisir la moins fine $\mathcal{S}$ rendant les K(M, P) $(P \in \Omega)$ uniformément continues en M en prenant toutefois sur les valeurs de ces K la structure uniforme de la droite numérique achevée ([9]). On verra que sur $\Omega - \omega_0$, c'est la même structure uniforme que plus haut, que sa topologie est celle de $\overline{R}_\tau$, qu'elle est indépendante du choix de P_0, enfin qu'on peut la métriser en fixant P_0, par

borne sup $\left| \dfrac{K(M_1, P)}{1 + K(M_1, P)} - \dfrac{K(M_2, P)}{1 + K(M_2, P)} \right|$ pour $P \in \Omega$ ou seulement

$P \in \omega_0$, ou encore par l'intégrale en volume $\int_s |K(M_1, P) - K(M_2, P)|\, dv$, ou bien encore, et c'est la métrique explicitée par Martin au moyen de

$$\int_s \frac{|K(M_1, P) - K(M_2, P)|}{1 + |K(M_1, P) - K(M_2, P)|}\, dv.$$

On notera toujours Δ ou parfois Δ_Ω la nouvelle frontière de Ω et encore $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{S}_\Omega$ la structure uniforme prolongée à $\Omega \cup \Delta$, enfin $\mathfrak{M}$ ou $\mathfrak{M}_\Omega$ la topologie correspondante, lettre qu'on emploiera en

([8]) Voir Bourbaki. Topologie générale, chap. II (Act. sc. et ind. n° 858), p. 117 et pour la suite le chapitre IV (Actualités n° 916). On s'appuiera aussi dans la suite sur les propriétés de convergence des fonctions harmoniques (voir la référence de la note 5).

([9]) Ce qui remplace la différence $|x_1 - x_2|$ de la structure uniforme additive couramment utilisée, par exemple par $\left| \dfrac{x_1}{1 + |x_1|} - \dfrac{x_2}{1 + |x_2|} \right|$. K sera définie dans les cas de coïncidence de deux au moins des points M, P, P_0 par les conventions ordinaires pour le quotient et par la valeur 1 lorsque les trois points sont confondus.

indice ou affixe pour faire la distinction avec la topologie (ordinaire) de $\overline{R}_\tau$ ou la topologie $\mathcal{T}$ ramifiée.

On retiendra que la convergence-$\mathfrak{M}$ d'une suite M_n ou d'un filtre vers $O \in \Omega \cup \Delta$ équivaut à la convergence de $K(M, P)$ vers $K(O, P)$ (ou seulement vers une fonction harmonique sur un domaine ne contenant pas O) et que pour $M \in \Delta$ et $P \in \Omega$, $K(M, P)$ est finie > 0, continue de (M, P) dans la topologie-produit et alors harmonique en P.

4. — Le théorème d'existence est en somme banal une fois exprimée l'idée topologique de la méthode. Martin donne même un résultat plus général qui peut s'énoncer comme suit : Soit sur Δ l'ensemble E fermé, δ l'un de ses $\mathfrak{M}$-voisinages fermés (ou même quelconques) et $w \leqslant u$ l'extrémale de u pour $\Omega - \delta$. Quand δ varie dans l'ordonné filtrant des δ décroissant vers E, w décroît vers une limite harmonique notée $[u]_E$ qui s'exprime par $\int K(M, P)\, d\mu_M$ où $\mu \geqslant 0$ ne charge que E.

Puis Martin améliore le résultat d'existence et traite la question plus difficile *d'unicité :* il appelle *minimale* toute fonction harmonique $u > 0$ dans Ω telle que toute autre analogue $v \leqslant u$ soit proportionnelle à u. Il montre que les fonctions minimales sont à un facteur près, les $K(M, P)$ pour M appartenant à une certaine partie non vide Δ_1 de Δ, d'ailleurs intersection dénombrable d'ouverts et dont les points sont dits *minimaux*. Il existe alors une *représentation unique* (dite canonique) du type (1) où μ (dite distribution ou mesure canonique) ne charge que Δ_1. De plus $[K(M_0, P)]_{M_0}$ vaut en P_0, 1 ou 0 suivant que M_0 est minimal ou non.

III. — COMPLÉMENTS SUR LES FONCTIONS MINIMALES ET NOUVELLES FORMES DU PRINCIPE DES SINGULARITÉS POSITIVES

5. — Le dernier résultat signifie, puisque $[K(M_0, P)]_{M_0}$ minore $K(M_0, P)$, que la première fonction vaut partout la seconde ou partout 0 suivant les deux cas. D'où le résultat qu'il me paraît important d'expliciter :

Théorème 1. — *Étant donné $M_0 \in \Delta$, on considère les fonctions harmoniques $u > 0$ dans Ω satisfaisant à la condition suivante (γ) équivalente à (γ') plus brève :*

(γ) *Dans tout ouvert partiel ω auquel M_0 n'est pas adhérent-$\mathfrak{M}$, $u = H^{\omega}_{\theta}$ où θ vaut u dans Ω, 0 ailleurs.*

(γ') *u est invariante par extrémisation sur toute partie de* Ω *auquel* M_0 *n'est pas adhérent-*$\mathfrak{M}$.

Alors les fonctions u existent si et seulement si M_0 *est minimal et valent dans ce cas* $K(M_0, P)$ *à un facteur près* [10].

Corollaire. — *Soit u harmonique* > 0 *dont la distribution canonique ne charge pas l'adhérence-*$\mathfrak{M}$ *d'un ensemble* $E \subset \Omega$. *Alors u est invariante par extrémisation sur* E.

Cela résulte, par simple permutation d'intégrations, de la formule (1) et de celle de l'extrémale de u : $\int u(S)\,d\mathring{\varepsilon}_P(S)$ [11]; mais on peut se ramener à E ouvert et n'utiliser que le cas particulier de la représentation intégrale d'une fonction de Wiener.

Une réciproque importante va se déduire d'une propriété nouvelle des fonctions minimales :

Théorème 2. — *Soit* δ *un voisinage-*$\mathfrak{M}$ *quelconque du point minimal* M_0. *Alors l'extrémisation de* $K(M_0, P)$ *sur* $\delta \cap \Omega$ *ne conserve pas cette fonction.*

Ramenons-nous au cas de δ ouvert et évitons un trop large emploi des propriétés de l'extrémisation générale. Supposons que $u = K(M_0, P)$ soit conservée. Considérons $\delta' = \delta \cap \Omega$ puis $\delta'' = \overset{*}{\delta'} \cap \Omega$ comme limite d'une suite croissante de compacts α_n de Ω. L'extrémale u_n de u pour $\Omega - \alpha_n$ croît et vaut dans $\Omega - \delta''$, $H^{\Omega - \delta''}_{\varphi_n}$ pour $\varphi_n = u$ sur α_n, $\varphi_n = u_n \leq u$ ailleurs dans Ω, $\varphi_n = 0$ sur $\overset{*}{\Omega}$. En considérant u_n séparément dans $\delta \cap \Omega$ et dans le reste de $\Omega - \delta''$, on voit qu'elle y tend vers des fonctions de Wiener égales à u (d'après l'hypothèse et le théorème 1) puisqu'elle tend vers u aussi sur δ''. Or $u_n(P)$ est de la forme $\int G(M, P)\,d\mu_n(M)$ ou $\int K(M, P)\,d\nu_n(M)$ où ν_n ne charge que α_n. Par extraction de suite on obtient dans Ω :

$$u(P) = \int K(M, P)\,d\nu,$$

où ν charge seulement l'adhérence-$\mathfrak{M}$ de δ'' mais d'ailleurs pas Ω.

(10) Il s'ensuit qne si M_0 est non minimal, $K(M, P)$ n'est pas borné pour M variable même assez voisin-$\mathfrak{M}$ de M_0 et P variable hors d'un certain voisinage-$\mathfrak{M}$ de M_0.

(11) Voir *J. de Math.* (*loc. cit.*), t. 24, théorème 6, p. 16 (il faut évidemment lire sous le signe $\int$, u et non $\mathring{u}$).

D'après le lemme 1 de Martin (*loc. cit.*) cette représentation de $K(M_0, P)$ minimale exigerait que M_0 soit un point de cet ensemble portant ν, contradiction cherchée.

EXTENSION. — *Soit δ ouvert-$\mathfrak{M}$. L'extrémisation sur $\delta' = \delta \cap \Omega$ d'une fonction harmonique $u > 0$ dont la distribution canonique ν charge effectivement δ ne conserve pas la fonction et même la rend strictement plus petite dans l'un des composants de δ'.*

Soient ω_i les domaines composants de δ', E_i l'ensemble des points minimaux M de δ pour lesquels l'extrémisation de la fonction $K(M, P)$ sur δ' ne la conserve pas dans ω_i.

La réunion (dénombrable) des E_i formant $\delta \cap \Delta_1$, l'un des E_i soit E_p est certainement chargé effectivement par ν. Mais alors

$$\int K(M, S)\, d\mathring{\varepsilon}_P(S) < K(M, P) \qquad (P \in \omega_p,\ M \in E_p)$$

d'où, en intégrant en $\nu(M)$ sur E_p et permutant les signes $\int$ du premier membre, l'inégalité stricte qui entraîne aussitôt le résultat.

Sous une autre forme c'est la réciproque annoncée :

THÉORÈME 3. — *Si l'extrémisation de u (harmonique > 0) sur une partie ouverte α de Ω conserve u, la distribution canonique de u ne charge pas le plus grand ouvert-$\mathfrak{M}$ dont l'intersection avec Ω soit α.*

Il est facile d'en déduire que pour u harmonique > 0 et E fermé dans Δ, la distribution canonique de $[u]_E$ ne charge que E.

6. — APPLICATION. — *Forme locale du principe des singularités positives.*

DÉFINITION. — Une fonction harmonique u dans Ω ou seulement hors d'un compact de Ω sera dite *associée* à 0 au point-frontière M ordinaire, ramifié ou de Martin, s'il existe dans la topologie correspondante un voisinage ouvert δ de M pour lequel $u = H_\varphi^{\delta \cap \Omega}$ avec $\varphi = u$ dans Ω, $\varphi = 0$ ailleurs : autrement dit lorsque $u > 0$ dans Ω, s'il existe un voisinage quelconque δ de M pour lequel l'extrémisation sur $\Omega \cap \delta$ conserve u [12].

THÉORÈME 4. — *Les fonctions harmoniques $u > 0$ dans Ω $\mathfrak{M}$-associées* à 0 *en tout point minimal $\neq M_0 \in \Delta$ n'existent que si M_0 est minimal et sont alors les fonctions $\lambda K(M_0, P)$ $(\lambda > 0)$ (qui sont associées à* 0 *en tout point de $\Delta - M_0$).*

[12] Et cette conservation (ou l'égalité avec la fonction de Wiener dans le cas général précédent) aura lieu pour toute partie (respectivement ouverte) de $\delta \cap \Omega$.

Soit ν la distribution canonique d'un $u > 0$. Il existe sur le compact Δ un ouvert maximum de mesure-ν nulle ([13]). Il doit contenir un voisinage ouvert (sur Δ) de tout point minimal $\neq M_0$, donc contient tous les points minimaux $\neq M_0$. Cela exige que M_0 soit minimal et que ν ne charge que ce point.

Extension. — Le même raisonnement montre que si $u > 0$ est $\mathfrak{M}$-associée à o aux points minimaux d'un ouvert δ sur Δ, δ n'est pas chargé par la distribution canonique de u.

On voit tout l'intérêt de mieux connaître les points minimaux (on sait seulement par un exemple de Martin qu'il peut exister des points non minimaux sur Δ) et aussi les fonctions minimales dont on ne sait pas même, dans le cas de Ω borné par exemple, si elles sont nécessairement non bornées ([14]).

IV. — QUELQUES PROPRIÉTÉS ET QUELQUES EXEMPLES SUR LA TOPOLOGIE ET LA STRUCTURE UNIFORME DE MARTIN

7. — Définitions. — Une suite $M_n \in \Omega$ sera dite *régulière* si $G(M_n, P_0) \to 0$, ce qui ne dépend pas de P_0. Sinon elle sera dite irrégulière et même complètement irrégulière si elle n'admet aucune sous-suite régulière.

On démontre aisément ([15]) que pour une suite complètement irrégulière la convergence-$\mathfrak{M}$ équivaut à la convergence ordinaire ou encore ramifiée. Les points-limite sont : M_0 minimal sur Δ, un point ordinaire irrégulier Q ou un point ramifié irrégulier $\mathcal{L}_Q$; et $K(M_0, P)$ est proportionnel à $G(Q, P)$.

([13]) Propriété de la mesure $\geqslant 0$ de Radon en espace même localement compact (H. Cartan).

([14]) Lorsque aucun point-frontière de Ω n'est de mesure harmonique > 0 (cas exceptionnel possible pour $\mathcal{R}_\tau$), il est aisé de voir qu'une fonction minimale ne peut être fonction de Wiener même ramifiée. Si donc pour un domaine de ce type (en particulier pour un domaine borné) toute fonction harmonique bornée est fonction de Wiener ramifiée (comme c'est le cas circulaire ou sphérique mais on ne sait si c'est général) les fonctions minimales sont toutes non bornées.

([15]) On s'appuiera sur le théorème 9 de mon article précédent de ces Annales (t. 22, p. 215) et aussi sur l'équivalence directe, facile, pour une suite complètement irrégulière, de la convergence ordinaire et de la convergence ramifiée.

Un point de Δ sera dit *régulier* si toute suite $M_n \in \Omega$ tendant-$\mathfrak{M}$ vers ce point est régulière. Sinon il sera dit irrégulier et même complètement irrégulier si toute suite $M_n \in \Omega$ tendant-$\mathfrak{M}$ vers lui est complètement irrégulière.

Points associés. — Un point M de Δ et un point-frontière ordinaire Q (ou ramifié $\mathfrak{L}$) seront dits *associés* s'il existe sur Ω une suite de points tendant-$\mathfrak{M}$ vers M et tendant vers Q (ou $\mathfrak{L}$) au sens ordinaire (ou ramifié). Suivant que ces suites possibles sont toutes régulières ou qu'aucune ne l'est, l'association sera dite régulière ou complètement irrégulière.

D'où des énoncés tels que :

a) Les points-frontière ordinaires associés à ceux d'un $\mathfrak{M}$-compact de Δ forment un compact de $\overset{*}{\Omega}$; les $\mathfrak{M}$-points associés à ceux d'un compact de la frontière ordinaire ou ramifiée forment un compact de Δ.

a') Les points de $\overset{*}{\Omega}$ associés à un même point de Δ appartiennent à une même composante connexe de $\overset{*}{\Omega}$ ([16]).

b) S'il y a deux points distincts de Δ associés à $\mathfrak{L}$, il y en a une infinité (de puissance du continu) et leur ensemble est même sur Δ un *continu* (fermé connexe).

Car, si M_n et M'_n tendent-$\mathfrak{C}$ vers $\mathfrak{L}$ et tendent-$\mathfrak{M}$ vers α et α' distincts, on imaginera un arc $\widehat{M_n M'_n}$ tendant-$\mathfrak{C}$ vers $\mathfrak{L}$ et on prendra sur lui un point N_n tel que

$$K(M_n, P_1) = xK(M_n, P_1) + yK(M'_n, P_1) \quad (x, y \text{ fixés} > 0,\ x + y = 1),$$

P_1 étant fixé de manière que $K(\alpha, P_1) \neq K(\alpha', P_1)$.

On achève par une extraction de suite faisant converger $K(N_n, P)$.

c) Il existe entre les points irréguliers M de Δ et les points-frontière irréguliers ordinaires Q ou ramifiés $\mathfrak{L}_Q$ une correspondance

([16]) En effet, si l'on considère deux composantes connexes distinctes de $\overset{*}{\Omega}$, α_1 et α_2, on peut trouver deux ouverts disjoints (ainsi que leurs adhérences) ω_1 et ω_2 les contenant dont la réunion contient $\overset{*}{\Omega}$, chacun contenant une partie fermée de $\overset{*}{\Omega}$, $\alpha'_1 \supset \alpha_1$ ou $\alpha'_2 \supset \alpha_2$. Alors $\omega'_1 = \omega_1 \cap \Omega$, $\omega'_2 = \omega_2 \cap \Omega$ ont chacun comme frontière outre α'_1 ou α'_2 un *compact* situé dans Ω. Si $K(M_0, P)$ avait la même limite quand $M_n \to Q_1 \in \alpha_1$ ou $M_n \to Q_2 \in \alpha_2$, on verrait que cette limite est une fonction de Wiener dans ω'_1 et ω'_2 avec donnée-frontière bornée nulle sur α'_1 ou α'_2 et il s'ensuivrait aisément la nullité de la limite dans Ω.

Noter comme à peu près connu que les composantes connexes de $\overset{*}{\Omega}$ sont les frontières des composantes connexes de $C\Omega$.

biunivoque par association non régulière ; ces M sont minimaux et K(M, P) est proportionnelle à G(Q, P). De plus, dans le plan, il y a ainsi correspondance entre les points complètement irréguliers et les points de la partie impropre maxima de $\overset{*}{\Omega}$.

Car, dans le cas plan [17] ou lorsque Q appartient à cette partie impropre, il n'y qu'un point de Δ simplement associé à Q irrégulier (et il est, d'ailleurs, dans le second cas, complètement irrégulier).

d) Soit un point-frontière régulier ordinaire Q (ou ramifié $\mathcal{L}$) qui n'est associé à aucun point d'un ensemble fermé E de Δ. Alors si pour une fonction harmonique $u > 0$ bornée au voisinage ordinaire (ou ramifié) de Q (ou $\mathcal{L}$) la distribution canonique ne charge que E, u(P) tend vers o quand P tend vers Q (ou $\mathcal{L}$).

En effet, si ω est l'intersection avec Ω d'un voisinage ouvert assez petit de Q (ou $\mathcal{L}$) l'adhérence-$\mathfrak{M}$ de ω ne rencontre pas E et grâce au corollaire du théorème 1, u vaut dans ω la fonction H^{ω}_{φ} ou $\varphi = u$ dans Ω et o ailleurs.

Considérons spécialement *une distribution canonique ν correspondant à une fonction bornée*, en particulier la mesure ν_0 dite de « Martin » correspondant à l'unité. Voici alors deux applications de (*d*) :

α) Les points de Δ qui ne sont associés à aucun point ramifié régulier forment un ensemble de mesure intérieure-ν nulle.

Il n'y a qu'à prendre E fermé dans cet ensemble et considérer $\int_E K(M, P)d\nu_M$ qui devra s'annuler en tout point ramifié régulier donc être nulle.

On peut même dans l'énoncé, excepter les points ramifiés d'un ensemble de mesure ramifiée intérieure nulle.

β) Soit un point-frontière régulier ordinaire Q (ou ramifié $\mathcal{L}$) tel qu'il n'existe qu'un point de Δ associé, soit M_0. Si f(M) sur Δ est sommable-ν_0 et si $\int_{\Delta-\alpha} K(M, P)|f|d\nu_0$ est bornée au voisinage ordinaire (ou ramifié) de Q (ou $\mathcal{L}$) pour tout voisinage-$\mathfrak{M}$ ouvert α de M_0,

$$\limsup_{P \to Q \text{ ou } \mathcal{L}} \int K(M, P) f d\nu_0 \leq \limsup_{M \to M_0} {}_{\mathfrak{M}} \text{ en mesure-}\nu_0 \text{ de } f.$$

On adaptera, grâce à (*d*), la démonstration du cas de la sphère [18].

[17] Voir le théorème 8 de l'article précédent déjà cité de ces Annales (t. 22, p. 214).
[18] Voir ces Annales, t. 21, p. 77-78.

8. — *Remarque sur $\mathcal{S}$ au voisinage d'une partie de la frontière et variation de* Ω. — Au voisinage d'un point de la partie impropre maxima de $\overset{*}{\Omega}$ la structure $\mathcal{S}_\Omega$ est évidemment celle de $\overline{R}_\tau$.

Au voisinage d'une partie fermée non polaire *isolée* A de $C\Omega$ (c'est-à-dire dans un ouvert ω contenant A et dont l'adhérence ne coupe pas le reste de $C\Omega$), $\mathcal{S}_\Omega$ est identique à la structure $\mathcal{S}_{CA}$ du domaine CA.

Cela résulte aisément de la comparaison de G_Ω et G_{CA} et du passage de l'un à l'autre par un procédé alterné ou soustraction d'une fonction de Wiener.

Si on compare plus généralement Ω_1, Ω_2 qui coïncident au voisinage d'une même partie fermée isolée A de leurs complémentaires, on voit l'identité de $\mathcal{S}_{\Omega_1}$, $\mathcal{S}_{\Omega_2}$ sur ce voisinage d'où l'isomorphie des sous-espaces de Δ_{Ω_1} et Δ_{Ω_2} dont les points sont associés à ceux de $\overset{*}{A}$ et leur identification par commodité de langage. De plus les points minimaux y sont les mêmes comme on le voit d'abord dans le cas de Ω et CA grâce aux théorèmes 3 et 4 et au procédé de passage par méthode alternée ou soustraction d'une fonction de Wiener.

9. — **Quelques cas simples.** — On sait que *dans la sphère ou cercle* de centre O et rayon R, lorsque M_n tend vers un point-frontière Q, $G(M_n, P)/G(M_n, O)$ tend vers $R^{\tau-2}\dfrac{R^2-\overline{OP}^2}{\overline{PQ}^\tau}$. On en déduit aisément que la structure uniforme $\mathcal{S}_\Omega$ est la *structure euclidienne*. Cela est encore vrai dans le cas plus général où la frontière est assez régulière pour satisfaire partout à la condition du lemme 4, p. 217 du tome 22 de ces Annales [19], et pour rendre valable partout le principe de Bouligand [20]. Car on voit alors que $G(M_n, P)/G(M_n, P_0)$ tendra vers la fonction du principe relative à Q normalisée en P_0 et il est

[19] Ce lemme (dont il faut évidemment rectifier l'énoncé en ne prenant que les fonctions $u>0$, d'ailleurs seules utilisées) entraîne que le rapport des G restera borné au voisinage de tout point-frontière $\neq Q$ et que toute limite obtenue par extraction satisfait aux conditions de Bouligand donc est proportionnelle à la fonction de Bouligand relative à Q si le principe de Bouligand est valable en Q. Celle-ci est d'ailleurs bornée au voisinage de tout point $\neq Q$. On examinera à part le cas de Q en $\mathcal{R}_\tau$.

[20] On en déduit que si on peut trouver, pour un point-frontière ramifié $\mathcal{L}_Q(Q\neq\mathcal{R}_\tau)$, un domaine partiel ω associé assez régulier, il y aura un $\mathcal{M}$-point unique α associé à $\mathcal{L}$ et d'ailleurs minimal. Car si u_1, u_2 sont deux fonctions-limite de suites $K(M_n, P)$ pour M_n tendant-$\mathcal{T}$ vers $\mathcal{L}$, on retranchera deux fonctions de Wiener convenables dans ω soit v_1 et v_2 d'où u_1-v_1 et u_2-v_2 proportionnelles. Ainsi $u_1-\lambda u_2=v_2-\lambda v_2$ borné dans ω d'où $u_1-\lambda u_2=0$ puis $u_1=u_2$. Raisonnement analogue pour voir que α est minimal.

évident que les fonctions relatives à deux points Q distincts sont distinctes. Les K sont ces fonctions évidemment minimales.

Dans le plan une correspondance biunivoque conforme conserve évidemment $\mathcal{S}$; de sorte que *dans un domaine simplement connexe* de complémentaire non polaire, $\mathcal{S}$ est la structure uniforme correspondant à celle euclidienne du cercle d'application ; autrement dit c'est la « *structure uniforme des bouts premiers* » dont Mazurkiewicz [21] a donné par une métrique une définition directe que voici à peu près :

Soient deux ouverts ω_1, ω_2 tels que $\bar{\omega}_1 \subset \omega_2 \subset \bar{\omega}_2 \subset \Omega$; ayant pris M_1 et M_2 dans $\Omega - \omega_2$, considérons un domaine δ les contenant et contenu dans $\Omega - \omega_1$. On prendra le diamètre (dans une métrique fixée $\mathfrak{D}$ de $\overline{R_\tau}$) de la partie $\overset{*}{\delta} \cap \Omega$ de la frontière $\overset{*}{\delta}$). La borne inférieure pour tous les δ sera prise comme distance de M_1, M_2 et définit bien une métrique dont la topologie est celle de $\overline{R_\tau}$; on sait d'après Hausdorff [22] prolonger cette métrique dans tout Ω de façon que la topologie correspondante soit celle de $\overline{R_\tau}$ et la structure uniforme est celle des bouts premiers.

10. — **Cas du domaine plan Ω de connexion finie ($C\Omega$ non polaire).** — $C\Omega$ est alors formé d'un nombre fini de composantes connexes dont les frontières respectives, connexes, sont les composantes connexes de $\overset{*}{\Omega}$.

Si l'on prend la définition précédente de structure uniforme pour un tel Ω plus général (ce qui donne une structure moins fine que la structure ramifiée) on peut démontrer que *c'est encore la structure* $\mathcal{S}_\Omega$.

Cela résulte de ce que cette structure et $\mathcal{S}_\Omega$ sont identiques à *la* structure uniforme dans Ω satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Donner comme topologie celle de $\overline{R_\tau}$,

2° être identique au voisinage de chaque composante connexe F_K de $C\Omega$ à la structure de $\overline{R_\tau}$ si F_K est ponctuelle, sinon à la structure uniforme des bouts premiers pour CF_K notée aussi Ω'_K, simplement connexe,

3° étant donné un entourage, le couple de deux points de Ω ne lui appartient pas si les points sont assez voisins (au sens d'une métrique de $\overline{R_\tau}$) respectivement de deux F_K distincts.

(21) Mazurkiewicz, *Fundamenta Math*, t. 26, p. 272.
(22) Hausdorff, *Fundamenta Math*, t. 16, p. 353.

Cela résulte des n^{os} 7 (a') et 8.

Il est aisé d'*approfondir ce cas plan de la connexion finie* en se ramenant au cas de la connexion simple ([23]) dont les résultats s'étendent facilement :

En considérant séparément les composantes connexes de la frontière, on voit comment les points de Δ correspondent biunivoquement aux points-frontière isolés et aux « bouts premiers » des Ω'_K, certains bouts premiers correspondant biunivoquement comme on sait aux points-frontière ramifiés de Ω'_K. Cela fait correspondre à tout point-frontière ramifié de Ω le point associé unique de Δ. $\mathcal{S}$ et $\mathfrak{M}$ sur Δ induisent ainsi sur l'ensemble des points-frontière ramifiés une structure et une topologie qui sont moins fines que celles ramifiées. L'application précédente de la frontière ramifiée (espace $\mathcal{E}$) sur la partie $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ de Δ est uniformément continue et fournit, comme dans le cas de connexion simple, un $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ borélien partout dense sur Δ et dont le complémentaire est de mesure de Martin nulle. Enfin on songera à un problème de Dirichlet pour frontière Δ : étant donnée f réelle sur Δ, considérons u sous-harmonique ou $-\infty$ dans Ω, bornée supérieurement, admettant en tout point de Δ une limite supérieure-$\mathcal{M}$ au plus égale à f. On peut montrer que l'enveloppe supérieure $\underline{H}''_f$ de ces u vaut $\underline{H}'_\varphi$ relative au problème ramifié et à φ sur la frontière ramifiée $\mathcal{E}$ prise égale à la valeur de f au point de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ correspondant ([24]). Ainsi on retombe sur

([23]) Voir pour ce cas, dans ces Annales, t. 22, p. 197-200, la comparaison de la structure ramifiée et de celle des bouts premiers, et diverses conséquences.

([24]) Pour chaque Ω'_K les points-frontière-$\mathcal{M}$ ou ramifiés correspondent biunivoquement à certains points analogues pour Ω et on admettra le langage de les identifier, ce qui permet de conserver la notation d'une fonction donnée sur la frontière de Ω pour la fonction correspondante sur celle de Ω'_K. Cela posé, on voit d'abord $\underline{H}''_f \leqslant \underline{H}'_\varphi$. Puis soit dans Ω'_K un u_K analogue à u du texte mais relatif à Ω'_K et approchant donc $\underline{H}''^{\Omega'_K}_f$ alors égale à $\underline{H}'^{\Omega'_K}_\varphi$; si tous les $\underline{H}'^{\Omega'_K}_\varphi$ sont finies, on retranchera de u_K la fonction de Wiener pour valeurs-frontière 0 sur F_K, égales $\underline{H}'^{\Omega'_K}_\varphi$ ailleurs. On fait la somme des u'_K ainsi obtenus (relatifs aux F^K non ponctuels) et on en retranche λv ($\lambda > 0$) où v est dans Ω harmonique $\geqslant 0$ tendant vers $+\infty$ en tout point-frontière irrégulier de Ω. Il est aisé de voir que l'on peut obtenir ainsi un u approchant arbitrairement $\underline{H}'^{\Omega}_\varphi$ en tout point fixé à l'avance d'où résulte l'égalité en vue. Si l'un des $\underline{H}'^{\Omega'_K}_\varphi$ vaut $-\infty$, $\underline{H}'^{\Omega}_\varphi = -\infty$, d'où encore l'égalité. Si tous les $\underline{H}'^{\Omega'_K}_\varphi$ sont $> -\infty$ et si l'un vaut $+\infty$ on pourra en se ramenant au cas où ls seraient finis, former un u majorant tout nombre fini fixé en tout point fixé, ce qui achève la démonstration d'égalité.

On pourra se servir dans ce qui précède de la remarque suivante, valable dans tout espace $\overline{R}_\tau$: soit la donnée-frontière ramifiée φ pour Ω, A un compact dans Ω, ψ la donnée-frontière ramifiée pour $\Omega - A$ égale à φ aux anciens points-frontière, à 0 aux nouveaux. Alors $\underline{H}'^{\Omega}_\varphi$ et $\underline{H}'^{\Omega - A}_\psi$ sont simultanément finis, $-\infty$ ou $+\infty$.

le problème ramifié, mais on trouve de plus l'expression remarquable au moyen de la mesure de Martin ν_0 ainsi comparée à la mesure ramifiée :

$$\underline{\mathrm{H}}'_{\varphi} = \underline{\mathrm{H}}''_{f} = \underline{\int} \mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) f(\mathrm{M}) d\nu_0(\mathrm{M}) \qquad \text{(intégrale inférieure) (25).}$$

11. — Mais tout cela ne saurait s'étendre au cas général, au moins sans transformation ni difficultés, car il n'y a plus de relation aussi simple entre $\mathcal{S}$ et la structure ramifiée. C'est ce que vont démontrer les exemples suivants :

Exemple d'un point-frontière ramifié avec une infinité de points de Δ associés (formant un continu de Δ).

On connaît l'exemple *spatial* de Bouligand, du domaine compris entre deux sphères tangentes intérieurement et du point de contact qui présente la particularité en vue (26) ; et Martin a approfondi un exemple voisin. Nous allons donner un type d'exemple tout différent, assez général et qui s'appliquera *au plan* comme aux espaces supérieurs.

Considérons le domaine plan ω obtenu en supprimant d'un domaine quelconque un segment fermé AB. Si O est sur AB différent des extrémités, il y a deux points ramifiés $\mathcal{L}_O$ et il y correspond deux $\mathfrak{M}$-points associés distincts (Voir la note 20) ; il suffira d'ailleurs de savoir que pour deux suites convenables M_n soit M_n^1, M_n^2 tendant vers O normalement de part et d'autre du segment, on obtient pour $\mathrm{G}(\mathrm{M}_n, \mathrm{P})/\mathrm{G}(\mathrm{M}_n, \mathrm{P}_0)$ deux limites distinctes (parce que chacune est au voisinage de O non bornée du côté des M_n et bornée du côté opposé). On va voir qu'en faisant une infinité de petits trous convenables dans AB près de O, les nouveaux rapports pris avec les G_Ω du domaine ainsi agrandi Ω tendront en faisant au besoin des extractions de suite, vers des limites respectivement assez voisines des anciennes pour être encore distinctes. Il n'y a plus cependant alors *qu'un seul point ramifié* correspondant à O.

(25) Cela résulte de ce que si f est finie continue sur Δ, φ est bornée continue sur $\mathcal{E}$ et d'après 7(β),

$$\int \mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) f d\nu_0 = \mathrm{H}'_{\varphi}.$$

(26) Car s'il n'y avait qu'un point M_0 associé au point de contact Q, on en déduirait facilement d'après ce qui précède que toute fonction harmonique > 0 s'annulant à la frontière hors Q serait proportionnelle à K (M_0, P), alors que M. Bouligand a montré qu'il y a une infinité de telles fonctions non proportionnelles.

Comparons sur un voisinage δ de P_0 et pour chacune des suites M_n, $G_\omega(M_n, P)$ et $G_\Omega(M_n, P)$. En prenant les pôles en P, on voit que la différence D_n est égale à $H_\varphi(M_n)$ où φ vaut $G_\Omega(M, P)$ sur les trous et O ailleurs. Or si l'on supprime de AB une portion voisine de O où l'on fera les trous, on obtient un $\Omega' \supset \Omega \supset \omega$ et on fixera $\lambda > 0$ majorant $G_{\Omega'}(M, P)$ pour $P \in \delta$ et M voisin de O. Alors $D_n \leqslant \lambda \mu_\omega^{M_n}(e)$ où ce μ est la mesure harmonique en M_n relativement à ω de la réunion e des trous. Introduisons une petite circonférence γ de centre O et délimitant avec AB un domaine σ en demi-cercle contenant les M_n (n assez grand). Si ψ vaut une constante α majorant $\mu_\omega^M(e)$ sur la circonférence, et O ailleurs, notre $\mu_\omega^{M_n}(e)$ sera majoré par $H_\psi^\sigma(M_n) + \nu_\sigma^{M_n}(e)$, où ν est la mesure harmonique relative à σ et à l'ensemble des trous qu'on prendra sur ce diamètre. Le premier terme H est majoré par $\beta . OM_n$ où β indépendant de n tend vers o avec α, de sorte qu'on pourra prendre β arbitrairement petit en choisissant les trous assez voisins de O. Le second terme ν est à son tour majoré par la mesure ν' relative au demi-plan contenant les M_n d'un côté de la droite AB. Celle-ci pour un trou $a_i b_i$ est, au facteur π près, l'angle (compris entre o et π) sous lequel on voit le trou du point M_n, c'est-à-dire

$$\text{arc tg}\,\frac{OM_n}{Oa_i} - \text{arc tg}\,\frac{OM_n}{Ob_i} < \frac{a_i b_i}{Oa_i Ob_i} OM_n.$$

Il est donc facile de choisir une suite de trous $a_i b_i$ telle que la somme des $\dfrac{a_i b_i}{Oa_i Ob_i}$ soit arbitrairement petite. On saura donc réaliser $D_n < d . OM_n$ avec d arbitrairement petit. Comme $G_\omega(M_n, P)/OM_n$ est compris entre deux nombres > 0 fixes, on voit que $G_\omega(M_n, P)$ peut n'être altéré sur δ par les trous que d'une fraction arbitrairement petite de lui-même, ce qui permet de conclure sur l'altération du rapport $G_\omega(M_n, P)/G_\omega(M_n, P_0)$ (27).

On trouve bien ainsi deux points distincts de Δ associés à O donc une infinité (voir n° 7, *b*). Il est de plus facile de voir que les $\mathfrak{M}$-points I associés à O ne sont associés à aucun autre point et forment un $\mathfrak{M}$-continu de mesure de Martin nulle. Il y en a d'ailleurs *au moins deux minimaux* car d'après le théorème 3 la distribution canonique d'un K(I, P) ne peut charger que l'ensemble des I.

(27) On peut même voir qu'il y a convergence, sans extraction de suite, du rapport des G_Ω.

On peut donner des variantes de cet exemple, comme celle d'un cercle moins un rayon étudié en l'un de ses points, même l'extrémité. *Les extensions à l'espace* sont faciles, l'angle sous lequel on voit un segment étant remplacé par l'angle solide sous lequel on verrait des petits cercles voisins de O dans une portion de plan remplaçant AB. Enfin on peut élargir les exemples par transformation conforme.

12. — **Exemple de deux points-frontières ramifiés associés à un même point de Δ.**

Prenons en particularisant les données qui suivront pour faciliter le langage et l'intuition, le domaine rectangulaire de sommets $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,1)$, $C(0,1)$. Otons-en les « segments troués »

$$D_n\left(y=\frac{1}{n}; \quad 0<x\leqslant 1-\alpha_n, \quad 1+\alpha_n\leqslant x<2\right),$$

où $\alpha_n>0$ tend vers 0. Il reste un domaine ω. Nous allons voir qu'en perçant les D_n de nouveaux trous θ'_n, θ''_n convenables axés sur $x=\alpha'$, $x=\alpha''$ ($0<\alpha'<\alpha''<2$, α' et α'' différents de 1), le nouveau domaine obtenu possède la propriété suivante : sur les deux suites M_n

$$M'_n \qquad x'_n=\alpha', \qquad y'_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right),$$

$$M''_n \qquad x''_n=\alpha'', \qquad y''_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right),$$

$G_\Omega(M_n, P)/G_\Omega(M_n, P_0)$ (P_0 fixé dans Ω) a une même limite, quel que soit $P\in\Omega$.

On va d'abord imposer aux nouveaux trous que la mesure harmonique dans ω de l'ensemble des trous d'ordonnée $<1/p$ soit aux points M_n (M'_n et M''_n) majorée par $d_p G_\omega(M_n, P_0)$ où d_p indépendant de n tend vers 0 avec $1/p$. Cela résulte par représentation conforme sur le demi-plan supérieur du problème suivant : soit une suite de points $Q_n\to O$ d'ordonnées $y_n>0$ et sur l'axe des x une suite de points distincts S_n d'abscisses strictement décroissantes et tendant vers 0. On cherche sur Ox des intervalles de milieux respectifs S_n et demi-longueurs ε_n tels que la somme des angles sous lesquels on voit de Q_i les intervalles au delà du rang p soit de la forme $\lambda_p y_i$ où λ_p indépendant de i tend vers 0 avec $1/p$. Soit $\rho_n>0$ majoré par la distance de S_n à S_{n+1} et à S_{n-1} (si $n>1$).

Si le pied de Q_i sur Ox est sur le segment fermé $S_{q+1}\,S_q\,(q \geqslant 1)$, la somme des angles sous lesquels on voit de Q_i les intervalles de rang $> p$ est majorée par $\sum_{d+1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_n}{\rho_n^2 - \varepsilon_n^2} y_i + \frac{\varepsilon_q + \varepsilon_{q+1}}{y_i}$ si l'on a pris $\varepsilon_n < \rho_n$. Il suffira donc de choisir ε_n de façon à faire converger la série de terme général $\frac{\varepsilon_n}{\rho_n^2 - \varepsilon_n^2}$ et de façon que tende vers o le quotient de ε_n par le carré de la plus petite ordonnée des Q_i (s'il y en a) qui se projettent entre S_{n-1} et S_{n+1} $(n > 1)$.

Revenant au rectangle on imposera encore aux trous à faire la condition suivante : Du centre de chacun θ'_n ou θ''_n, traçons un cercle de rayon moindre que $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ et imposons à ce trou d'être assez petit pour que sa mesure harmonique relative au domaine rectangulaire *diminué* du seul D_n soit $< 1/n$ hors du cercle considéré.

Les trous ayant été choisis de façon à satisfaire aux deux conditions, désignons par ω_p le domaine déduit de ω en faisant seulement les trous d'ordonnée $\geqslant 1/p$ et comparons les fonctions de Green de Ω, ω, ω_p. Si $G_\Omega(M'_n, P) < l$ indépendant de n et de P dans un petit voisinage δ de P_0, $G_\Omega(M'_n, P) - G_{\omega_p}(M'_n, P)$ est majoré par $l\,H_\varphi^{\omega_p}(M'_n)$ où φ vaut 1 sur les trous d'ordonnée $< 1/p$ et o ailleurs.

Mais, sur les trous d'ordonnée $\geqslant 1/p$, $H_\varphi^{\omega_p}(M)$ est majorée par $2\sum_{q+p=1}^{\infty} \frac{1}{q}$. Donc

$$H_\varphi^{\omega_p}(M'_n) \leqslant \left(2\sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{1}{q}\right) H_\psi^{\omega}(M'_n) + H_{\psi_p}^{\omega}(M'_n)$$

où ψ vaut 1 sur tous les trous, o ailleurs et ψ_p, 1 sur les trous d'ordonnée $< 1/p$ et o ailleurs.

$$\text{D'où} \qquad H_\varphi^{\omega_p}(M'_n) \leqslant \left(d_1 \,.\, 2\sum_{q=p+1}^{\infty} 1/q + d_p\right) G_\omega(M'_n\, P_0)$$

où $G_\omega(M'_n, P_0)$ est d'ailleurs majoré par $G_\Omega(M'_n, P)$ à un facteur près indépendant de n et P dans δ.

On saura donc choisir p assez grand pour que $G_\Omega(M'_n, P)/G_\Omega(M'_n, P_0)$ diffère de $G_{\omega_p}(M'_n, P)/G_{\omega_p}(M'_n, P_0)$ d'aussi peu que l'on veut, indépendamment de n et même de $P \in \delta$.

On a le même résultat avec M''_n. Si on remarque alors que, p étant fixé, $G_{\omega_p}(M'_n, P)/G_{\omega_p}(M'_n, P_0)$ et $G_{\omega_p}(M''_n, P)/G_{\omega_p}(M''_n, P_0)$ ont une même fonction-limite en P d'après l'étude du domaine plan à connexion finie, on conclut que les rapports analogues avec Ω ont une même limite.

V. — APPLICATION DE LA TOPOLOGIE DE MARTIN A L'EXTENSION D'UN PROBLÈME DE CAUCHY

13. — Nous allons considérer sur Ω ($C\Omega$ toujours non polaire) une fonction harmonique $u(M)$ qui est définie seulement au voisinage de $\overset{*}{\Omega}$, est bornée au voisinage de tout point-frontière de Ω et s'y annule s'il est régulier (cette dernière condition équivalant alors à ce que u soit associée à o en tout point-frontière de Ω ordinaire, ou encore ramifié ou bien encore de Martin). Cette allure à la frontière équivaut pour u à dire qu'elle vaut hors d'un certain compact $\alpha' \subset \Omega$ une fonction de Wiener $H_{\varphi}^{\Omega-\alpha'}$ où φ est *nulle* sur $\overset{*}{\Omega}$.

On verra que $u(M)/G_{\Omega}(M, P_0)$ a une limite finie quand M converge-$\mathcal{M}$ vers un point M_0 de Δ, limite continue de M_0 et qui sera dite *pente* de u en M_0. On va chercher si la connaissance de la pente en certains points de Δ *détermine* u au voisinage de $\overset{*}{\Omega}$ si elle existe et si l'on peut trouver dans un voisinage fixé de $\overset{*}{\Omega}$ une fonction u dont la pente soit à ε *près* une fonction donnée finie continue sur Δ. Lorsque la frontière est assez régulière $\frac{du}{dn}$, $\frac{dG}{dn}$ ($>$ o) existent et $\lim \frac{u}{G}$ n'est autre que leur rapport. On voit donc que notre problème est une extension de théorèmes d'existence et d'unicité relatifs à $\frac{du}{dn}$ le long d'une courbe ou surface où u s'annule et bien connus lorsque la courbe ou surface et la donnée sur elle sont analytiques.

14. — Lemme 1. — *Soit un compact α dans Ω ($C\Omega$ non polaire), u harmonique dans $\Omega - \alpha$, bornée au voisinage de tout point-frontière de Ω et s'y annulant s'il est régulier. On peut trouver dans Ω un compact α_0 contenant α et sur $\overset{*}{\alpha}_0$ une mesure $m = m_1 - m_2$ (différence de deux mesures de Radon $m_1 \geqslant$ o, $m_2 \geqslant$ o) de sorte que sur $\Omega - \alpha_0$:*

$$(2)\qquad u(M) = \int G_{\Omega}(M, P)\, dm_P.$$

De plus, lorsque tout domaine composant de $\complement\alpha$ *contient un point extérieur à* Ω *(ce qui entraîne que ces composants soient en nombre fini) on peut choisir* α_0 *pour qu'il possède cette même propriété et aussi d'ailleurs pour que tous ses points-frontière soient stables (c'est-à-dire que* $\complement\alpha_0$ *ne soit effilé en aucun point de* $\overset{*}{\alpha}_0$*).*

Introduisons dans Ω un autre compact α' nulle part effilé à sa frontière et dont l'intérieur contienne α, puis la fonction φ valant u sur $\overset{*}{\alpha}'$ et o ailleurs, de module majoré par la constante c et décomposée classiquement selon $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$. Si ψ_λ vaut la constante $\lambda \geqslant 0$ sur $\overset{*}{\alpha}'$ et o ailleurs, on a dans $\Omega - \alpha'$:

$$u(\mathrm{M}) = \mathrm{H}^{\Omega-\alpha'}_{\varphi^+ + \psi_\lambda} - \mathrm{H}^{\Omega-\alpha}_{\varphi^- + \psi_\lambda}.$$

Soit l la borne supérieure des limites supérieures à la frontière $\overset{*}{\Omega}$ de la mesure harmonique de $\overset{*}{\alpha}'$ relativement à $\Omega - \alpha'$; $l < 1$. On choisira λ de façon que $l\lambda + c < \lambda$. Alors si $l\lambda + c < \rho < \lambda$, la partie de $\Omega - \alpha'$ où $\mathrm{H}^{\Omega-\alpha'}_{\varphi^+ + \psi_\lambda} < \rho$ a comme complémentaire dans Ω un certain compact α'_1 dont l'intérieur contient α'. La fonction v égale à $\mathrm{H}^{\Omega-\alpha'}_{\varphi^+ + \psi_\lambda}$ sur $\Omega - \alpha'_1$ et à ρ sur α_1 est surharmonique.

Introduisons de même l'ensemble où $\mathrm{H}^{\Omega-\alpha'}_{\varphi^- + \psi_\lambda} < \rho$, son complémentaire dans Ω, le compact α'_2 et la fonction w égale à $\mathrm{H}^{\Omega-\alpha'}_{\varphi^- + \psi_\lambda}$ sur $\Omega - \alpha'_2$ et à ρ sur α'_2.

Si $\alpha_0 = \alpha'_1 \cup \alpha'_2$, extrémisons v et w pour α_0 ce qui ne les change pas hors α_0 et conserve leur surharmonicité dans Ω ; dans la représentation de F. Riesz, les distributions $\geqslant 0$, m_1 et m_2 correspondantes chargent $\overset{*}{\alpha}_0$ et on a bien l'expression (2) de u dans $\Omega - \alpha_0$.

Pour achever supposons donc $\complement\alpha$ formé d'un nombre fini de domaines contenant chacun un point extérieur à Ω. On peut dans chacun choisir aisément un domaine sans point-frontière irrégulier, contenu ainsi que sa frontière, contenant le même point extérieur considéré, la différence des deux domaines appartenant à Ω. C'est le complémentaire de la réunion de ces nouveaux domaines qu'on prendra pour α'. Répétant l'opération on formera un α'' analogue dont l'intérieur contient α' ; mais en sorte que $\complement\alpha''$ (au lieu de α'') ne soit nulle part effilé sur $\overset{*}{\alpha}''$. On voit ensuite qu'en prenant $\rho = \lambda - 1$ par exemple et λ assez grand, α_1 et α'_2 seront situés dans α''. Il n'y a plus alors qu'à faire l'extrémisation finale pour α'' ainsi pris comme α_0 de l'énoncé.

15. — THÉORÈME 5. — *Soit le compact* α *dans* Ω ($C\Omega$ *non polaire*), u *harmonique dans* $\Omega - \alpha$, *bornée au voisinage de tout point-frontière sur* $\overset{*}{\Omega}$ *et s'y annulant lorsqu'il est régulier. Alors* $u(M)/G(M, P_0)$ *admet en tout point* M_0 *de la* $\mathfrak{M}$-*frontière* Δ *de* Ω *une limite (dite pente de* u *en* M_0) *quand* M *tend*-$\mathfrak{M}$ *vers* M_0 *et cette limite est finie, continue*-$\mathfrak{M}$ *de* M_0 *et d'ailleurs* > 0 *si* $u > 0$.

Cela résulte aussitôt de l'expression (2) et d'un passage à la limite banal sous le signe $\int$ puisque $G(M, P)/G(M, P_0)$ pour M tendant-$\mathfrak{M}$ vers M_0 converge vers $K(M_0, P)$ uniformément en $P \in \alpha_0$. La limite vaut $\int K(M_0, P) dm_P$ évidemment finie, continue de M_0. Enfin si $u > 0$, il est immédiat, en s'arrangeant pour que P_0 soit point intérieur de α', que $u(M)/G(M, P_0)$ reste compris entre deux nombres finis > 0 sur α', donc dans $\overset{*}{\Omega} - \alpha'$, ce qui permet d'achever.

THÉORÈME D'UNICITÉ 6. — *Dans les hypothèses du théorème 5 :* a) *si tout domaine composant de* $C\alpha$ *contient un point extérieur à* Ω *et* b) *si* u/G *tend vers* 0 *avec* G *ou même seulement si la pente de* u *est nulle en tout point minimal non complètement irrégulier de* Δ, *alors* $u = 0$.

De là résulte un énoncé d'unicité, c'est-à-dire d'égalité dans $\Omega - \alpha$ *de deux* u *dont les pentes sont les mêmes, au moins aux points minimaux non complètement irréguliers de* Δ.

Utilisons en effet le lemme 1 et le α_0 final de ce lemme. L'hypothèse $\int K(M, P) dm_P = 0$ pour les M de Δ_1 non complètement irréguliers va entraîner la nullité de la mesure m d'après les propriétés de la mesure de Radon (liées aux résultats classiques de Hahn-Banach sur les fonctionnelles linéaires), si nous montrons qu'on peut approcher à ε près toute f finie continue sur $\overset{*}{\alpha}_0$ par une combinaison linéaire finie de tels K. Or si l'on marque dans les divers composants de $C\alpha_0$ des points respectifs Q_p extérieurs à Ω, on sait approcher [28] f à ε près par une fonction harmonique dans $\overline{R}_\tau$ hors des Q_p : celle-ci est harmonique bornée dans Ω, donc différence de deux fonctions harmoniques > 0 bornées, et y vaut $\int K(M, P)(d\mu_1 - d\mu_2)$, différence des représentations canoniques.

[28] Voir mon article du *Bulletin de la Société Math. de France*, t. 73 (1945) qui montre la nécessité de la stabilité des points-frontière du compact α_0.

On approchera cette intégrale à ε près en fractionnant Δ en un nombre fini de parties boréliennes e_i de diamètre de Martin assez petit, puis choisissant un point M_i dans chacun de ceux qui portent des masses μ_1 ou μ_2, d'où l'approximation par

$$\sum K(M_i, P)\left[\mu_1(e_i) - \mu_2(e_i)\right].$$

On achève donc en remarquant que les parties e_i dont tous les points sont non minimaux ou complètement irréguliers sont de mesures μ_1 et μ_2 nulles, d'après le n° 7 (α).

Ainsi, m étant nulle, u sera nul hors α_0, donc dans un voisinage de chaque point de $\overset{*}{\Omega}$. Comme tout domaine composant de $C\alpha$ contient un point de $\overset{*}{\Omega}$, u est bien nulle partout.

Explicitons, en les réunissant, des formes voisines des théorèmes précédents :

Théorème 7. — *Soit dans* $\overline{R}_\tau$ *un domaine* ω *dont le complémentaire, non polaire, est formé de deux compacts disjoints* A *et* B. *Soit* u *harmonique dans* ω, *bornée au voisinage de tout point de* $\overset{*}{A}$ *et y tendant vers* 0 *si* A *n'y est pas effilé.*

Alors $u/G_\omega(M, P_0)$ $(P_0 \in \omega)$ [*et si* A *n'est pas polaire*, $u/G_{CA}(M, P_1)$, P_1 appartenant au domaine CA] *a une limite finie (pente relative à* ω *ou à* CA) *quand* M *tend vers un* $\mathfrak{M}$*-point* M_0 *relatif à* ω *(ou* CA) *associé à un point de* $\overset{*}{A}$ *et cette limite, continue-*$\mathfrak{M}$ *de* M_0 *est* > 0 *si* $u > 0$.

De plus si A *est d'intérieur non vide et si la pente (relative à* ω *ou encore à* CA) *est nulle en tout point minimal non complètement irrégulier associé à un point de* $\overset{*}{A}$ *(ce qui a lieu en particulier si le quotient de* u (M) *par* $G_\omega(M, P_0)$ *ou* $G_{CA}(M, P_1)$ *tend vers* 0 *avec ce* G *pour* M *voisin de* A), *alors* $u = 0$.

Extension (*). — On cherchera à réduire l'ensemble où la pente est supposée nulle. Voici dans ce sens une extension du théorème 6 :

Soit dans Ω, un compact α *de complémentaire connexe* et u harmonique dans $\Omega - \alpha$, bornée au voisinage de $\overset{*}{\Omega}$ et s'annulant aux points-frontière réguliers de Ω. Soit un $\overset{*}{\Omega}$, Q adhérent à $C\overline{\Omega}$ (non vide) et V un voisinage de Q (dans $\overline{R}_\tau$).

(*) Extension ajoutée sur les épreuves et assez voisine d'un résultat obtenu tout autrement (C. R. Ac. Sc. t. 226, p. 1499, 10 mai 1948).

On suppose la pente de u nulle aux $\mathfrak{M}$*-points minimaux non complètement irréguliers et associés aux points de* $V \cap \overset{*}{\Omega}$*. Alors* $u = 0$.

Reprenant la démonstration, on agrandit α en α_0 (de complémentaire connexe et sans points-frontière instables) et on va montrer qu'on peut approcher f finie continue sur $\overset{*}{\alpha}_0$ par une combinaison linéaire de K (M, P) relatifs à certains $\mathfrak{M}$-points M du nouvel énoncé.

On peut, en le restreignant, supposer V compact. Soit W l'ensemble, compact dans Δ, des $\mathfrak{M}$-points associés à ceux de $V \cap \overset{*}{\Omega}$. Partons de Δ-W, $\mathfrak{M}$-ouvert et ajoutons-lui Ω diminué des points appartenant à V. On obtient bien un $\mathfrak{M}$-ouvert et son intersection ω avec Ω n'admet pas Q comme point adhérent. On peut approcher f par une fonction harmonique dans $\overline{R}_\tau$ hors d'un point extérieur à Ω voisin de Q et qui soit arbitrairement petite sur $\overset{*}{\omega} \cap \overset{*}{\Omega}$. On en déduit l'approximation par une fonction solution du problème de Dirichlet dans Ω avec donnée bornée, de plus nulle sur $\overset{*}{\omega} \cap \overset{*}{\Omega}$ et on achève grâce au théorème 3.

16. — Remarque i : Soit O par exemple $\neq \mathcal{R}_\tau$ et le domaine δ : $OM < \rho$ partagé en deux domaines par une surface (ou courbe) analytique σ. Supposons que $\Omega \cap \delta$ soit formé de l'un de ces domaines δ_1 ou des deux. Soit encore dans Ω un compact α dont le complémentaire est connexe et nulle part effilé à sa frontière. Alors les fonctions de P, $K_\Omega(M, P)$ relatifs aux $\mathfrak{M}$-points M associés aux points-frontière ramifiés accessibles par δ_1 forment sur $\overset{*}{\alpha}$ un système fondamental pour les fonctions finies continues. En effet, de manière directe :

Si $\int K(M, P) d\mu_P$ où μ charge $\overset{*}{\alpha}$ est nul pour les M considérés, la dérivée normale de $u = \int G(M, P) d\mu_P$ $(M \in \Omega)$ le long de σ vers δ_1 est nulle d'où $u = 0$ dans le domaine $\Omega - \alpha$ par le théorème de Cauchy. Il s'ensuit bien la nullité de μ ([29]).

On pourrait d'ailleurs, au lieu de supposer $C\alpha$ connexe, introduire le domaine Ω' composant de $\Omega - \alpha$ qui admet σ sur sa frontière ([30])

([29]) Cela résulte de la théorie de l'extrémisation ou balayage général. Voir mon article déjà cité du *J. de Math.*, t. 24.

([30]) C'est d'ailleurs l'intersection avec Ω du composant γ de $C\alpha$ qui contient σ, et alors $\overset{*}{\gamma} = \overset{*}{\Omega}' \cap \alpha$. Cela résulte de ce que dans $\overline{R}_\tau$ l'intersection de deux domaines aux frontières disjointes est connexe (remarque sans doute connue, retrouvée avec l'aide de Choquet, comme celle de la fin de la note 16).

(Ω' n'étant effilé en aucun point de $\overset{*}{\Omega'} \cap \alpha$). Le système des K considérés est alors fondamental sur $\overset{*}{\Omega'} \cap \alpha$.

D'autre part, indépendamment, on peut ne prendre que les K de points M associés à des points de σ formant un ensemble de mesure-σ > 0 ou même dans le cas plan, admettant un point d'accumulation à l'intérieur de δ.

Remarque 2 : Reprenons le théorème 5 ; on sait qu'en un point-frontière irrégulier Q de Ω, u admet une pseudo-limite d'ailleurs > 0 si $u > 0$. On voit aisément qu'elle vaut $\int G_\Omega(Q, P)dm_P$. Il y aurait lieu de chercher dans quelles conditions la nullité de ces pseudo-limites en certains points Q entraînerait celle de u, par exemple si $\Omega - \alpha_0$ est connexe, ce qui équivaut alors à chercher dans quelles conditions les fonctions minimales $G_\Omega(Q, P)$ forment un système fondamental sur $\overset{*}{\alpha}_0$.

Remarque 3 : Reprenons les hypothèses initiales du théorème 7. Il est assez facile de voir que $\dfrac{G(M, P)}{G(M, P_0)G(P, P_0)}$ a une limite, soit $\Theta(M_1, P_1)$ quand M et P de Ω tendent-$\mathfrak{M}$ vers des $\mathfrak{M}$-points M_1, P_1, respectivement associés à des points de A et B ; et Θ continue de (M_1, P_1) vaut la pente en P_1 de $K(M_1, P)$ ([31]) et la pente en M_1 de $K(P_1, M)$. En outre si u considérée est de plus bornée ou seulement différence de deux fonctions harmoniques > 0, la pente de u en M_1 vaut $\int \Theta(M_1, P_1)d\mu_{P_1}$ où μ est une distribution de Martin associée à u.

17. — Théorème d'existence 8. — *Soit dans le domaine* Ω ($C\Omega$ *non polaire*) *un compact* α *d'intérieur non vide ou plus généralement un ensemble* β *sur* Ω *tel que toute fonction harmonique dans* Ω *et nulle sur* β *soit partout nulle. Alors étant donnée une fonction finie continue* $\varphi(M)$ *sur la* $\mathfrak{M}$*-frontière* Δ *de* Ω, *on peut trouver une fonction harmonique dans* $\Omega - \alpha$, *bornée au voisinage de tout point-frontière de* Ω *en s'y annulant s'il est régulier, ou même une combinaison finie*

$$\sum_{1}^{p} \lambda_i G_\Omega(M, P_i) \quad (P_i \in \alpha)$$

([31]) Fonction bornée au voisinage de tout point de $\overset{*}{B}$ et s'y annulant en cas de régularité.

telle enfin que sa pente (relative à P_0 fixé) en M sur Δ approche $\varphi(M)$ sur tout ensemble compact fixé γ de points minimaux, à ε donné arbitraire près.

En effet prenons dans l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ des f finies continues sur γ une norme égale à la borne supérieure de $|f|$. Toute fonctionnelle linéaire dans cet espace est alors une intégrale de Radon sur γ. Voyons alors que les fonctions de M, $K(M, P)$ ($M \in \gamma$, $P \in \beta$) forment dans $\mathcal{V}$ un ensemble « total » au sens de Banach ; en effet, si une fonctionnelle $\int_\gamma K(M, P) d\mu_M$ (où μ est la différence de deux mesures $\geqslant 0$ de Radon ne chargeant que γ) est nulle pour tous les P de β, cette fonction harmonique en P dans Ω est partout nulle, ce qui, d'après le théorème d'unicité de la représentation de Martin, entraîne $\mu_1 = \mu_2$, c'est-à-dire la nullité de la fonctionnelle. Les K considérés forment donc aussi un ensemble « fondamental » dans $\mathcal{V}$ et l'on approchera $f(M)$ donnée par une combinaison finie

$$\sum \lambda_i K(M, P_i) \, (P_i \in \beta)$$

à ε près sur γ. Alors $\sum \lambda_i G(M, P_i)$ répond à la question.

Variante. — Dans le cas du compact α d'intérieur non vide, qu'on prendra tel que $\Omega - \alpha$ soit un domaine Ω_1, on peut aussi par un raisonnement analogue, en se reportant à la remarque 3 du n° 16, faire l'approximation de la pente relative à P_0, Ω ou P'_0, Ω_1 au moyen d'une fonction harmonique $\sum \lambda'_i K_{\Omega_1}(M, P_i)$ où les P_i sont ici des $\mathcal{M}$-points minimaux non complètement irréguliers associés à des points de $\overset{*}{\alpha}$ (relativement à Ω_1).

18. — Remarque : Il est intéressant de constater que *l'approximation du théorème 8 présente une allure « instable »*. Nous allons voir qu'étant donnée une couronne ω circulaire (ou sphérique) et un point A convenable intérieur, on peut former une fonction harmonique dans la couronne, s'annulant sur la circonférence (sphère) par exemple extérieure avec dérivée normale au long arbitrairement petite en module alors qu'en A la fonction est arbitrairement grande [32].

[32] L'exemple de Hadamard (Voir note 4) basé sur la fonction K sin λy Sh λx (K petit, λ grand, convenables) le long de $x = 0$, ne fournit d'ailleurs pas, par inversion d'exemple comparable à celui du texte qui présente donc une nouveauté.

Considérons par exemple dans le plan, la couronne ω (centre O, rayons $0 < r < R$) et dans le grand cercle un domaine circulaire θ coupant ω et le petit cercle de manière que $\omega - \bar{\theta}$ donne par inversion relative à $\overset{*}{\theta}$ un domaine contenant $\omega \cap \theta$. Appliquons le théorème 8 au grand cercle moins $\bar{\theta}$ avec φ nulle aux points associés à ceux de la grande circonférence, égale à λ à ceux associés à $\overset{*}{\theta}$ et, en prenant pour γ toute la $\mathfrak{M}$-frontière et pour α un petit voisinage d'un point du petit cercle hors $\bar{\theta}$; u ainsi obtenue relativement à ε fixé, prenons-la seulement dans $\omega - \theta$ et prolongeons-la dans $\omega \cap \theta$ par la symétrie classique. On obtient une fonction harmonique v dans la couronne, s'annulant sur le bord externe où la dérivée normale (ou bien aussi la pente correspondante relative à $\omega - \bar{\theta}$ ou au grand cercle ou à la couronne et à P_0 fixés quelconques) est majorée en module par un terme $\rho . \varepsilon$ ($\rho > 0$ indépendant de ε et λ) ; d'autre part au point Q de $\overset{*}{\theta}$ le plus éloigné de O où v s'annule aussi, la dérivée normale majore en module un terme $\rho'(\lambda - \varepsilon)$ ($\rho' > 0$ indépendant de ε et λ).

Choisissons le point A dans la couronne ω donnée mais avec $OA < OQ$. Si Λ est la borne supérieure de $|v|$ sur la circonférence de centre O passant par A, on voit en considérant la couronne comprise entre cette circonférence et la grande, qu'au point Q toute dérivée de v est en module majorée par $\rho''\Lambda$ où $\rho'' > 0$ ne dépend que la configuration géométrique. Donc $\rho'(\lambda - \varepsilon) < \rho''\Lambda$ et

$$\Lambda > \frac{\rho'}{\rho''}(\lambda - \varepsilon).$$

On achève donc par simple rotation amenant le maximum de $|v|$ en A.

(Parvenu aux Annales le 15 janvier 1948.)