ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

JULIEN KRAVTCHENKO

Sur les équations générales de la dynamique des systèmes

Annales de l'université de Grenoble, tome 22 (1946), p. 281-297
<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1946__22__281_0>

SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES

par Julien KRAVTCHENKO

Chapitre I. — Introduction. Rappel des résultats classiques.

§ 1. On connaît la forme donnée par P. Appell aux équations du mouvement d'un système matériel Σ lorsque 1° la position de Σ dépend des $n+p$ paramètres $q_m (m = 1, 2, \ldots, n+p)$ et du temps t; 2° le système est soumis à l'action des forces données, dont le travail virtuel $\delta\mathcal{T}$ à l'instant t se laisse mettre sous la forme $\sum_1^{n+p} \mathfrak{Q}_m \delta q_m$; 3° Σ est assujetti à des liaisons s'exprimant au moyen des p relations linéaires en $q'_m = \frac{dq_m}{dt}$, à coefficients fonctions des q_m et de t.

Je supposerai que l'ensemble de ces p relations est résoluble par rapport aux p quantités $q'_{n+j} (j = 1, 2, \ldots, p)$; nous conviendrons de dire que les n paramètres restants sont indépendants. Moyennant cette hypothèse, le travail $\delta\mathcal{T}$ pourra se mettre sous la forme $\sum_1^n Q_i \delta q_i$. Si, alors, on appelle $2S$ l'énergie d'accélération de Σ (S étant fonction des q_m, t, q'_i, q''_i), les équations d'Appell s'écrivent [1]

$$\frac{\partial S}{\partial q''_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

[1] Cf. Appell, *Traité de Mécanique Rationnelle,* t. II, chapitre XVII. Dans la suite, les références à cet ouvrage (3e édition) seront notées par la majuscule A, suivie de l'indication de la page. On consultera aussi la brochure de M. Marcel Brelot « Les Principes mathématiques de la Mécanique classique », éditée chez Arthaud, à Grenoble (1945) — désignée par la lettre B dans la suite. M. Brelot indique un procédé très condensé pour former le système (I).

Jointes aux équations des liaisons, elles constituent le système d'équations différentielles du mouvement de Σ.

La forme si symétrique de ces relations (englobant, au surplus, le cas particulier des liaisons holonomes) est de nature à satisfaire l'esprit. Mais il y a plus. Appell avait déjà remarqué que les équations (1) traduisent sous forme analytique le principe de la moindre contrainte de Gauss (Cf. par ex. B, pp. 24-25). D'autre part, M. Brelot a pu, en utilisant le système (1), justifier d'une manière très synthétique le principe des vitesses virtuelles en statique, en mettant, de plus, en évidence, les conditions suffisantes moyennant lesquelles ce principe s'applique (Cf. B, pp. 44-50).

Cela suffit pour mettre en lumière l'importance de la fonction S d'Appell en Mécanique Analytique. Toutefois, ce précieux outil offre l'inconvénient d'être d'un maniement peu commode en pratique. Cela tient à ce que le calcul effectif de l'expression S est des plus laborieux — même dans les cas les plus usuels : voir, par ex. dans A, p. 386 le calcul de S pour un solide mobile autour d'un point fixe.

Il est vrai que la formation du système (1) n'exige que la connaissance des termes additifs de 2S qui contiennent explicitement les q''_i. Cette remarque permet souvent de simplifier notablement les calculs ; il en reste assez, cependant, pour qu'en pratique il soit presque toujours préférable de se servir des équations générales de la Dynamique ou du principe de d'Alembert — dont on combine, éventuellement, l'emploi avec celui des multiplicateurs de Lagrange.

§ 2. Il m'a paru, dès lors, intéressant de substituer aux premiers membres de (1) d'autres expressions, d'un calcul moins pénible. C'est ce que j'ai tenté de faire dans le présent travail dont voici le résumé sommaire.

Je commence par transformer le système (1) en développant une idée d'Appell lui-même et en utilisant une remarque de M. Brelot. Du résultat ainsi obtenu résulte d'abord une extension au cas des systèmes linéairement non-holonomes d'un théorème de Painlevé ; ensuite, on en déduit, dans quelques cas particuliers, une intégrale première du mouvement, restée, peut-être, inaperçue jusqu'ici.

Je retrouve, en passant, les conditions suffisantes, dues à Appell, moyennant lesquelles l'équation (1), relative au paramètre q_i, se réduit à l'équation de Lagrange correspondante. Enfin j'essaye, en traitant deux exemples à la fois classiques et simples, de faire ressortir l'économie de calcul que permet de réaliser le procédé que je propose.

§ 3. Soulignons, toutefois, la forme dissymétrique et un peu compliquée des équations auxquelles j'arrive. Il est un peu paradoxal qu'il faille, pour abréger la formation effective des premiers membres de (1), remplacer ceux-ci par des expressions d'une notation plus longue et, partant, moins faciles à retenir.

§ 4. Précisons une fois pour toutes les notations et les conventions dont nous aurons à faire usage. En gros je suivrai le mode d'exposition si commode, introduit par M. Brelot (Cf. B, pp. 13-14 et p. 16).

Soient deux entiers positifs n et p et deux indices i et j ; dans toute la suite il sera sous-entendu que $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, p$. Je suppose qu'à l'époque t, l'ensemble Σ est défini au moyen des $n+p$ paramètres q_i et q_{n+j}. J'appelle Σ_0 l'ensemble Σ à l'époque $t = t_0$; P un point courant $\in \Sigma_0$; M la position de P à l'époque t ; $M \in \Sigma$. La correspondance entre les points de Σ_0 et Σ est, à chaque instant biunivoque, en sorte qu'on peut écrire, O étant l'origine des axes rectangulaires fixes :

$$(2) \quad \overrightarrow{OM} = \vec{f}(P, q_i, q_{n+j}, t) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{OP} = \vec{f}(P, q_i, q_{n+j}, t_0)$$

où $\vec{f}$ est une fonction vectorielle, définie sur Σ_0 et qui dépend, de plus, des n paramètres q_i, des p paramètres q_{n+j} et du temps t (2). Je conserve les hypothèses de régularité explicitées par B, p. 16, relativement à Σ_0 et à $\vec{f}$; notamment, je suppose que toutes les dérivées partielles de $\vec{f}$ que l'on aura à écrire existent et qu'elles sont bornées et même continues ; il en sera de même des dérivées des q_i par rapport au temps.

Pour abréger les écritures, je me servirai systématiquement de la convention de l'indice muet. Ainsi, on aura (cf. le paragraphe 1), par ex. :

$$Q_i \delta q_i = \sum_1^n Q_i \delta q_i.$$

§ 5. J'admets, ensuite, que les p paramètres q_{n+j} sont liés aux

(2) D'après cela, l'idée de M. Brelot revient à utiliser explicitement, pour représenter commodément le mouvement d'un système matériel, un système de variables de Lagrange. La différence des deux notations consiste en ce qu'ici $\vec{f}$ est une fonction connue de ses arguments, le problème revenant à déterminer les q_i en tant que fonctions du temps. Au contraire, en matière de Dynamique des systèmes continus, les $\vec{f}$ sont précisément les inconnues du problème.

paramètres q_i au moyen des p relations différentielles, *linéaires* en dq_i et dt, en général non intégrables [3] :

$$(3) \quad dq_{n+j} = \alpha_{ji}\,(q_i, q_{n+j}, t)dq_i + \alpha_j(q_i, q_{n+j}, t)dt\,;\ (j = 1, 2, \ldots, p),$$

où les α_{ji} et α_j sont des fonctions des $n+p+1$ paramètres q_i, q_{n+j}, t, différentiables par rapport à chacun de leurs arguments ; de plus, les p formes linéaires (3) seront supposées essentiellement distinctes.

D'après cela, tout déplacement virtuel de Σ, compatible avec les liaisons existant à l'instant t (liaisons, dont les équations (2) et (3) sont, justement, la traduction analytique) est caractérisé par les variations arbitraires δq_i des q_i, alors que les δq_{n+j} seront, eu égard à (3), données par

$$(4) \qquad \delta q_{n+j} = \alpha_{ji}\delta q_i.$$

En différentiant (2), on obtient le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_M}$ de $M \in \Sigma$; compte tenu de (3) on a :

$$(5) \quad \frac{d\vec{f}}{dt} = \overrightarrow{V_M} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial q_i} q'_i + \frac{\partial \vec{f}}{\partial q_{n+j}} q'_{n+j}$$
$$= \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial q_i} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial q_{n+j}} \alpha_{ji} \right) q'_i + \frac{\partial \vec{f}}{\partial q_{n+j}} \alpha_j + \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}.$$

(3) Pour rester fidèle à la terminologie généralement admise, je réserverai, dans toute la suite, le nom de systèmes non holonomes, aux Σ, assujettis à vérifier (3). Il se trouve qu'un type courant de liaisons, utilisées en Mécanique, se laisse traduire analytiquement au moyen des conditions (3) : citons la condition de non-glissement relatif de deux solides, etc. Mais il existe d'autres types de liaison (par ex. les liaisons par asservissement, considérées par M. H. Béghin) qui ne rentrent pas dans la catégorie de celles envisagées dans le texte.

Insistons, à la suite de M. Brelot, sur la notion de liaison, telle qu'elle est introduite dans ce travail ; pour nous, il s'agit simplement de relations du type (3), données à priori entre les q_i, q_{n+j}, q'_i, q'_{n+j} et t, indépendamment de toute interprétation mécanique.

Dès lors, le problème de la Dynamique, posé relativement à Σ, défini par (2), consiste à déterminer le mouvement de Σ, c'est-à-dire à déterminer les $n+p$ fonctions de t : q_i, q_{n+j}, liées à priori par (3). Au fond, la distinction entre les q_{n+j} et les q_i se réduit à ceci : les p équations de liaison peuvent être commodément résolues par rapport aux q'_{n+j}. Cette manière d'envisager les choses est plus symétrique et supprime la distinction, arbitraire, entre les q_i et q_{n+j} ; elle permet d'étendre aux mouvements non holonomes certaines identités classiques dans la Mécanique des systèmes holonomes (cf. B, pp. 17-18 et le paragraphe 15 ci-après). Nous aurons à utiliser de telles identités pour effectuer la transformation que nous avons en vue (cf. le paragraphe 10). Tout ceci rend la distinction entre les systèmes holonomes et non-holonomes moins nette qu'on ne l'a cru et M. Brelot s'en est passé.

Pareillement, un déplacement virtuel de M, correspondant aux δq_i est donné par

$$(6) \qquad \delta\vec{f} = \frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\vec{f}}{\partial q_{n+j}}\delta q_{n+j} = \left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i} + \frac{\partial\vec{f}}{\partial q_{n+j}}\alpha_{ji}\right)\delta q_i.$$

§ 6. Rappelons que nous noterons $Q_i\delta q_i$ le travail virtuel accompli par les forces extérieures, appliquées à Σ lorsque chaque point M du système subit le déplacement virtuel (6); les Q_i seront, par hypothèses, des fonctions connues à priori des q_i, q_{n+j} et de t.

§ 7. Passons maintenant au calcul de l'accélération $\vec{\gamma}_M$ de $M \in \Sigma$. De (3) on tire :

$$(7) \qquad q''_{n+j} = \alpha_{ji}q''_i + \frac{d\alpha_{ji}}{dt}q'_i + \frac{d\alpha_j}{dt}.$$

Donc

$$(8) \qquad \frac{\partial q''_{n+j}}{\partial q''_i} = \alpha_{ji}$$

dérivée égale [cf. (3)] à :

$$(9) \qquad \frac{\partial q'_{n+j}}{\partial q'_i} = \alpha_{ji}.$$

Dérivons alors (5) par rapport à t : eu égard à (3) et à (7) il vient :

$$(10) \qquad \vec{\gamma}_M = \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = \frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i}q''_i + \frac{\partial\vec{f}}{\partial q_{n+j}}q''_{n+j} + q'_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i}\right)$$
$$+ q'_{n+j}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_{n+j}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i} + \frac{\partial\vec{f}}{\partial q_{n+j}}\alpha_{ij}\right)q''_i + \cdots$$

Il est inutile, pour notre objet, de développer davantage les derniers termes de (10); il est sous-entendu qu'on y a remplacé les q'_{n+j} par leurs valeurs (3).

§ 8. Soit alors une fonction (vectorielle ou scalaire)

$$\varphi(q_i, q_{n+j}, q'_i, q'_{n+j}, q''_i, q''_{n+j}, t)$$

des $3(n+p)+1$ arguments. Les formules (3) et (7) permettent de remplacer dans φ les q'_{n+j} et q''_{n+j} par leurs valeurs en fonctions des q'_i, q_i, t, q_{n+j} et q''_i ; φ se change alors en une fonction des $3n+p+1$ arguments q_i, q_{n+j}, q'_i, q''_i, t que, d'une manière tout à fait générale, nous noterons $\bar{\varphi}$. Moyennant cette convention, nous aurons, eu égard à (8)

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial q''_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial q''_i} + \alpha_{ji}\frac{\partial\varphi}{\partial q''_{n+j}}.$$

A titre d'exemple, prenons la formule (10) ; il y aura lieu de distinguer $\overrightarrow{\gamma_M}$ et $\overline{\overrightarrow{\gamma_M}}$ et avec nos notations, il vient :

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial q''_i}\left(\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right) = \frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i} \\ &\frac{\partial}{\partial q''_i}\overline{\left(\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right)} = \frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i} + \alpha_{ji}\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_{n+j}} \end{aligned}\right.$$

En particulier, il peut se faire que φ soit indépendante des q''_i et des q''_{n+j} ; nous pouvons alors écrire

$$(11')\qquad \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial q'_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial q'_i} + \alpha_{ji}\frac{\partial\varphi}{\partial q'_{n+j}}.$$

Ainsi de (5) on tire :

$$(11'')\qquad \frac{\partial}{\partial q'_i}\overline{\left(\frac{d\vec{f}}{dt}\right)} = \frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i} + \alpha_{ji}\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_{n+j}}.$$

Soit, encore, $m(\mathrm{P})$, la distribution des masses sur Σ_0 (4). Je pose

$$(12)\qquad 2\mathrm{T} = \int_{\Sigma_0}\left(\frac{d\vec{f}}{dt}\right)^2 dm = \int_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i}q'_i + \frac{\partial\vec{f}}{\partial q_{n+j}}q'_{n+j} + \frac{\partial\vec{f}}{\partial t}\right)^2 dm$$

en sorte que [cf. (5)] :

$$(13)\qquad 2\bar{\mathrm{T}} = \int_{\Sigma_0}\overline{\left(\frac{d\vec{f}}{dt}\right)^2}\, dm$$

$$= \int_{\Sigma_0}\left[\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i} + \frac{\partial\vec{f}}{\partial q_{n+j}}\alpha_{ji}\right)q'_i + \frac{\partial\vec{f}}{\partial q_{n+j}}\alpha_j + \frac{\partial\vec{f}}{\partial t}\right]^2 dm.$$

(4) Je renvoie à B, pp. 1-2 et 14 pour le détail des hypothèses de régularité à faire sur Σ_0 et la fonction d'ensemble, complètement additive $m(\mathrm{P})$; $m(\mathrm{P})$ et Σ_0 seront supposés boréliens et ces hypothèses suffisent largement dans les applications courantes. De même, le symbole $\int_{\Sigma_0}$ pourra désigner, dans le cas général, une intégrale de Radon.

D'après cela, $2T$ est la force vive de Σ, définie par (2) et cela quelles que soient les liaisons auxquelles Σ peut, éventuellement, être soumis. Au contraire, $2\overline{T}$ est la force vive de Σ dans le cas particulier où le mouvement de Σ est assujetti à vérifier (3). La même interprétation s'applique à $\frac{d\vec{f}}{dt}$ et $\overline{\frac{d\vec{f}}{dt}}$ etc.

Soit alors k un indice prenant l'une des valeurs, 1, 2, ..., n [5]; on tire de (12) et (13) :

$$\frac{\partial\overline{T}}{\partial q_i}=\frac{\partial T}{\partial q'_{n+j}}\left(\frac{\partial\alpha_{jk}}{\partial q_i}q'_k+\frac{\partial\alpha_j}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial T}{\partial q_i}. \tag{13'}$$

La distinction de φ et $\overline{\varphi}$ que l'on vient de faire est essentielle pour la suite

§ 9. Rappelons quelques relations classiques. Nous avons

$$\overline{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i}\right)}=\left(\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial q_i\partial q_k}+\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial q_i\partial q_{n+j}}\alpha_{jk}\right)q'_k+\alpha_j\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial q_i\partial q_{n+j}}+\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial q_i\partial t}.$$

D'un autre côté, on vérifie que [cf. (13')] :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_i}\overline{\left(\frac{d\vec{f}}{dt}\right)}&=\overline{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i}\right)}+\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_{n+j}}\left(\frac{\partial\alpha_{jk}}{\partial q_i}q'_k+\frac{\partial\alpha_j}{\partial q_i}\right)\\&=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_{n+j}}\frac{\partial q'_{n+j}}{\partial q_i}.\end{aligned}\tag{14}$$

Enfin, eu égard aux conventions du paragraphe 8, on a les identités :

$$\frac{\partial}{\partial q_{n+j}}\left(\frac{d\vec{f}}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_{n+j}}\right)\tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial q'_{n+j}}\left(\frac{d\vec{f}}{dt}\right)=\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_{n+j}}\tag{15'}$$

classiques dans la théorie des systèmes holonomes et dont M. Brelot a dégagé l'utilité dans la théorie des systèmes non-holonomes. Nous allons nous en servir.

[5] Dans la suite, il en sera toujours supposé ainsi.

Chapitre II. — **Mise en équations du problème. Conséquences.**

§ 10. Le principe de d'Alembert (cf. B, pp. 16-17 et 22) permet d'écrire les équations de la Dynamique pour le système (2) sous la forme

$$\int_{\Sigma_0} \overline{\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}} \delta\vec{f} dm = Q_i \delta q_i$$

où le champ des vitesses virtuelles est donné par (6) et où $\overline{\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}}$ l'est par (10) ; les δq_i étant indépendants, on en tire :

$$(16) \qquad P_i = \int_{\Sigma_0} \overline{\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}} \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial q_i} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial q_{n+j}} \alpha_{ji} \right) dm = Q_i.$$

Notons ici en passant que les équations (1) sont une conséquence immédiate de (11) et de (16). Mais nous procéderons autrement pour transformer les P_i. D'abord, à la suite d'Appell, nous ferons apparaître au premier membre de (16) la combinaison de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i}.$$

Nous exprimerons ensuite l'ensemble des termes restants de P_i à partir des fonctions génératrices d'un calcul relativement facile ; ce sera, d'ailleurs, là notre seul apport à la théorie.

En omettant désormais d'expliciter le domaine d'intégration Σ_0 de nos intégrales, on a :

$$P_i = \frac{d}{dt} \int \overline{\frac{d\vec{f}}{dt}} \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial q_i} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial q_{n+j}} \alpha_{ji} \right) dm - \int \overline{\frac{d\vec{f}}{dt}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial q_i} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial q_{n+j}} \alpha_{ji} \right) dm.$$

Compte tenu de (11″) on reconnaît dans le premier terme du second membre l'expression [cf. (3)] :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial q'_i}\right).$$

Puis, eu égard à (14), il vient :

$$\int \overline{\frac{d\vec{f}}{dt}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial q_i}\right) dm = \int \overline{\frac{d\vec{f}}{dt}} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\overline{\frac{d\vec{f}}{dt}}\right) dm - \frac{\partial q'_{n+j}}{\partial q_i} \int \overline{\frac{d\vec{f}}{dt}} \frac{\partial \vec{f}}{\partial q_{n+j}} dm$$

car $\frac{\partial q'_{n+j}}{\partial q_i}$ est le même, à chaque instant pour tous les points $P \in \Sigma_0$ (comme le sont, d'ailleurs, les α_{ji} et leurs dérivées par rapport à t). Le premier terme du second membre est égal à $\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i}$. L'ensemble des résultats qui précèdent donnent alors

$$\text{(17)} \qquad P_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial q'}\right) - \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i} + R_i$$

avec

$$\text{(17')} \quad R_i = \left(\frac{\partial q'_{n+j}}{\partial q_i} - \frac{d\alpha_{ji}}{dt}\right)\int \frac{\overline{d\vec{f}}}{dt}\frac{\partial \vec{f}}{\partial q_{n+j}}dm - \alpha_{ji}\int \frac{\overline{d\vec{f}}}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial q_{n+j}}\right)dm.$$

Mais on a, identiquement et à chaque instant : $\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{\overline{d\vec{f}}}{dt}$; eu égard à (15) et à (15′), la première et la seconde intégrale de (17′) s'écrivent respectivement [cf. (12)] : $\frac{\partial T}{\partial q'_{n+j}}$ et $\frac{\partial T}{\partial q_{n+j}}$; compte tenu de (3), on pourra, si on le veut, former $\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{q'_{n+j}}}$ et $\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{q_{n+j}}}$.

On peut, d'autre part, substituer dans (17) aux α_{ji} leurs valeurs (9). Moyennant ces résultats, (16) et (17) donnent

$$\text{(18)} \quad P_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i} + \left(\frac{\partial q'_{n+j}}{\partial q_i} - \frac{d\alpha_{ji}}{dt}\right)\frac{\partial T}{\partial q'_{n+j}} - \frac{\partial q'_{n+j}}{\partial q'_i}\frac{\partial T}{\partial q_{n+j}} = Q_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

système de n équations qui, jointes à (3), définissent le mouvement de Σ.

Si on le désire, on peut écrire (18) sous la forme moins condensée, mais qui fait intervenir explicitement les fonctions α_{ji} et α_j connues à priori [cf. (8), (9) et (13)] :

$$\text{(18')} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i} + \left(\frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial q_i}q'_k + \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i} - \frac{d\alpha_{ji}}{dt}\right)\frac{\partial T}{\partial q'_{n+j}} - \alpha_{ji}\frac{\partial T}{\partial q_{n+j}} = Q_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pratiquement, il peut y avoir souvent intérêt à transformer (18) en tenant compte de (13′) : il vient :

$$\text{(18'')} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d\alpha_{ji}}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_{n+j}} - \alpha_{ji}\frac{\partial T}{\partial q_{n+j}} = Q_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Toutefois, cette forme s'écarte des équations de Lagrange et se prête moins bien à l'étude des propriétés générales du mouvement.

§ 11. En résumé, la mise en équation de notre problème se fera de la manière suivante. On commencera par faire abstraction des conditions (3) et on formera la force vive 2T [cf. (12)] de Σ comme si ce système était à $n+p$ degrés de liberté. Cela fait, on effectuera les opérations $\frac{\partial T}{\partial q_{n+j}}$ et $\frac{\partial T}{\partial q'_{n+j}}$. Enfin, on pourra porter dans les trois expressions ainsi obtenues les valeurs des q'_{n+j} données par le tableau (3); on obtiendra ainsi les expressions $\overline{T}$, $\overline{\frac{\partial T}{\partial q_{n+j}}}$, $\overline{\frac{\partial T}{\partial q'_{n+j}}}$; il ne restera plus qu'à porter les résultats dans les formules (18) ou (18'). Il suit de là que le mouvement de Σ est déterminé, dès qu'on connaît T, les relations (3) et l'expression $Q_i \delta q_i$ du travail virtuel des forces extérieures accompli à l'instant t au cours d'un déplacement virtuel, compatible avec (2) et (3).

Remarque. — Il faut bien se garder de confondre les opérations telles que $\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i}$ et $\overline{\frac{\partial T}{\partial q_i}}$, par exemple. La première consiste à dériver $\overline{T}$ par rapport à q_i; la seconde à dériver T et à substituer dans le résultat aux q'_{n+j} leurs valeurs (3) [cf. (13')].

§ 12. Comme le calcul de la fonction $\overline{T}$ est relativement aisé, il se trouve (et nous aurons l'occasion de le constater un peu plus loin sur deux exemples) que l'emploi des relations (18) ou (18') permet de simplifier sensiblement le processus de la mise en équations d'un problème de mécanique des systèmes non holonomes. De plus, on peut, à l'aide de (18) retrouver de la manière la plus aisée la plupart des résultats classiques de P. Appell (cf. A, p. 377).

§ 13. Il est clair d'abord que le système (18) est linéaire en q''_i, les termes en q''_i provenant exclusivement de l'opération $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial q'_i}\right)$. Or la forme $\overline{T}$ est quadratique définie positive en q'_i; il en résulte immédiatement que le système (18) est résoluble par rapport aux q''_i; c'est là une propriété utile dans la discussion de l'existence et de l'unicité des solutions des équations différentielles du mouvement.

§ 14. En second lieu, supposons que T et les α_{ji} ne dépendent pas de t et des q_{n+j} ; de plus admettons que les $\alpha_j = 0$. Cherchons alors les conditions suffisantes moyennant lesquelles on a : $R_i = 0$ pour un indice i déterminé ; d'après (17), l'équation (18) relative à q_i se réduit à celle de Lagrange.

Or moyennant les hypothèses faites, on a

$$\frac{\partial T}{\partial q_{n+j}} = 0, \qquad (j = 1, \dots p),$$

$$\frac{d\alpha_{ji}}{dt} = \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial q_k} q'_k,$$

$$\frac{d\alpha_j}{dt} = 0.$$

En sorte que [cf. (17′)] :

$$R_i = \left(\frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial q_k}\right) \frac{\partial T}{\partial q'_{n+j}} q'_k.$$

Il suffit donc pour que $R_i = 0$ que l'on ait :

$$\frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial q_i} = \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial q_k} \qquad j = 1, 2, \dots, p; \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Ce sont les conditions trouvées par Appell (*loc. cit.* p. 378). On sait qu'alors les formules (3) prennent la forme suivante :

$$dq_{n+j} = d\varphi_j + A_{jk} dq_k,$$

où les φ_j sont des fonctions des q_k, A_{jk} est une fonction de tous les q_k sauf de q_i et où $A_{ji} = 0$, $j = 1, 2, \dots, p$.

§ 15. Les équations (18) permettent de former dans certains cas particuliers, une intégrale première du mouvement de la forme :

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial q'_i} = C^{te}.$$

Supposons, en effet, que les liaisons imposées à Σ soient indépendantes du temps et que pour un indice i déterminé, on ait : $\alpha_{ji} = 0$, $j = 1, 2, \dots, p$ et $Q_i = 0$; admettons de plus que T ne dépende pas de q_i. Moyennant ces hypothèses, l'équation (18″) relative au paramètre q_i se réduit à

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial q'_i}\right) = 0$$

équivalente à la relation à justifier.

§ 16. Nous allons maintenant déduire des équations (18) une identité qui constitue l'extension aux systèmes non holonomes de la formule bien connue de Painlevé. Un artifice, classique dans la théorie des équations de Lagrange, permet d'écrire [cf. (11')] :

$$q_i' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i'}\right) = \frac{d}{dt}\left(q_i' \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i'}\right) - q_i''\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} + \frac{\partial T}{\partial q_{n+j}'}\alpha_{ji}\right).$$

Dans le cas général, les liaisons imposées à Σ dépendent du temps; $\overline{T}$ se présente alors comme une somme $\overline{T}_2 + \overline{T}_1 + \overline{T}_0$, dont chaque terme est une forme homogène en q_i', de degré égal à son indice. Donc, comme il est bien connu :

$$q_i' \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i'} = 2\overline{T}_2 + \overline{T}_1.$$

D'autre part, eu égard à (7), il vient :

$$\frac{d\overline{T}}{dt} = \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_i'} q_i'' + \frac{\partial T}{\partial q_{n+j}'}\left(\alpha_{ji} q_i'' + \frac{d\alpha_{ji}}{dt} q_i' + \frac{d\alpha_j}{dt}\right)$$
$$+ \frac{\partial T}{\partial q_i} q_i' + \frac{\partial T}{\partial q_{n+j}}(\alpha_{ji} q_i' + \alpha_j) + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Cela étant, multiplions chaque relation (18') par q_i' et ajoutons les résultats membre à membre. Dans la somme ainsi obtenue, remplaçons le terme $q_i' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i'}\right)$ par sa valeur ci-dessus et $\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i}$ par leurs valeurs (13'); on trouve (6) :

$$\frac{d(2\overline{T}_2 + \overline{T}_1)}{dt} - q_i''\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} + \frac{\partial T}{\partial q_{n+j}'}\alpha_{ji}\right)$$
$$- \frac{\partial T}{\partial q_i'} q_i' - \frac{\partial T}{\partial q_{n+j}'}\frac{d\alpha_{ji}}{dt} q_i' - \frac{\partial T}{\partial q_{n+j}}\alpha_{ji} q_i' = Q_i q_i'.$$

(6) Observons que la fonction $T = T_2 + T_1 + T_0$ vérifie toujours (c'est-à-dire quel que soit p) l'identité :

$$\frac{d}{dt}(T_2 - T_0) = \mathfrak{Q}_l q_l' - \frac{\partial T}{\partial t}, \quad l = 1, 2, \ldots, (n+p)$$

ou

$$\mathfrak{Q}_l = \int \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\,\frac{\partial \vec{f}}{\partial q_l}\,dm$$

comme l'a montré M. Brelot (cf. B, p. 18). Mais, bien entendu, le coefficient $\mathfrak{Q}_l$, ainsi défini, n'a pas la même signification que le Q_i du texte, en sorte que l'identité ci-dessus paraît moins utile dans la recherche des intégrales premières du mouvement de Σ.

En combinant les deux dernières égalités, on parvient aisément à la relation :

$$(19) \qquad \frac{d}{dt}(\overline{T}_2 - \overline{T}_0) = Q_i q'_i - \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial q_{n+j}} \alpha_j - \frac{\partial T}{\partial q'_{n+j}} \frac{d\alpha_j}{dt},$$

ce qui constitue une des extensions au cas non holonome de la relation bien connue de Painlevé ([7]).

Si les liaisons imposées à Σ sont indépendantes du temps, les α_j $\left(\text{donc les } \frac{d\alpha_j}{dt}\right)$ et $\frac{\partial T}{\partial t}$ sont nuls ; on a de plus : $\overline{T} = \overline{T}_2$. La relation (19) redonne alors le classique théorème des forces vives.

Il faut remarquer que :

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial q'_{n+j}} \left(\frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial t} q'_i + \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} \right),$$

en sorte qu'en général, $\frac{\partial T}{\partial t} \neq \frac{\partial \overline{T}}{\partial t}$.

On pourrait tirer de (18) diverses autres conséquences, en partie nouvelles. Mais nous préférons nous en tenir à ces indications.

Chapitre III. — Applications à deux problèmes classiques.

§ 17. Appliquons les équations (18) à l'étude de deux exemples classiques : ceux du cerceau et de la sphère pesants, roulant et pivotant sans glisser sur un plan horizontal fixe H (cf. A, pp. 244-254).

L'espace sera rapporté à un trièdre de référence trirectangle $Ox_1y_1z_1$ que, pour nous conformer aux notations d'Appell et de M. G. Bouligand (les références aux Compléments et Exercices sur la mécanique des solides, 2e édition, de cet auteur seront notées G. B.), nous prendrons de sens négatif; Ox_1y_1 sera dans H, Oz_1 sera orienté suivant la verticale ascendante.

La position d'un solide homogène Σ, de révolution autour de l'axe Gz (G étant le centre de gravité de Σ) et assujetti à rester en contact avec H sera repéré à l'aide des cinq paramètres : $q_1 = \psi$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \theta$, $q_4 = \xi$, $q_5 = \eta$; θ, φ et ψ sont les angles d'Euler du trièdre trirectangle gauche $Gxyz$, invariablement lié à Σ ; ξ et η sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée de G ; enfin la cote ζ de ce point est une fonction de θ seul.

([7]) Voir note page précédente.

§ 18. Supposons maintenant que Σ soit un cerceau de rayon a et de masse M ; alors $\zeta = a \sin\theta$. La condition de non-glissement de Σ sur H se traduit par les deux relations [cf. G. B., pp. 22-25 ; formules (6) et (7)] :

$$(20)\qquad \begin{cases} \xi' = a(\psi' \cos\theta \cos\psi - \theta' \sin\theta \sin\psi + \varphi' \cos\psi), \\ \eta' = a(\psi' \cos\theta \sin\psi + \theta' \sin\theta \cos\psi + \varphi' \sin\psi), \end{cases}$$

qui sont bien de la forme (3). On remarquera que la liaison imposée à Σ est indépendante du temps, en sorte qu'ainsi les α_j sont nuls et les α_{ji} ne contiennent pas t. D'après cela, $n = 3$, $p = 2$. Rappelons que (cf. G. B., p. 22) :

$$(21)\qquad 2T = M(\xi'^2 + \eta'^2 + a^2 \cos^2\theta\theta'^2) + \frac{1}{2} Ma^2(\psi'^2 \sin^2\theta + \theta'^2) + Ma^2(\psi' \cos\theta + \varphi')^2.$$

Enfin, le poids étant la seule force active, on a

$$(22)\qquad Q_1 = Q_2 = 0 ; \qquad Q_3 = -Mg\cos\theta.$$

D'après ce qu'on a vu au § 11, (20), (21) et (22) définissent entièrement le mouvement. On a d'abord [cf. (20) et (21)] :

$$(23)\quad 2\overline{T} = Ma^2\left[2(\psi' \cos\theta + \varphi')^2 + \frac{3}{2}\theta'^2 + \frac{1}{2}\psi'^2 \sin^2\theta\right].$$

On en tire :

$$\frac{1}{Ma^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_1'}\right) = 2\left[\frac{d}{dt}(\psi' \cos\theta + \varphi')\right] \cos\theta - \psi'\theta' \sin\theta \cos\theta - 2\varphi'\theta' \sin\theta + \frac{\sin^2\theta}{2}\psi'',$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_2'}\right) = 2Ma^2 \frac{d}{dt}(\psi' \cos\theta + \varphi').$$

Ensuite (21) donne :

$$\frac{\partial T}{\partial q_4} = \frac{\partial T}{\partial q_5} = 0,$$

et :

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_4'} = Ma(\psi' \cos\theta \cos\psi - \theta' \sin\theta \sin\psi + \varphi' \cos\psi) \ ;$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_5'} = Ma(\psi' \cos\theta \sin\psi + \theta' \sin\theta \cos\psi + \varphi' \sin\psi).$$

Enfin, en combinant les deux dernières relations avec (20) et eu égard aux conventions d'écriture (3), on trouve :

$$\frac{\overline{\partial T}}{\partial q_1} + \frac{d\alpha_{j_1}}{dt}\frac{\overline{\partial T}}{\partial q'_{n+j}} = -\mathrm{M}a^2\varphi'\theta' \sin\theta,$$

$$\frac{\overline{\partial T}}{\partial q_2} + \frac{d\alpha_{j_2}}{dt}\frac{\overline{\partial T}}{\partial q'_{n+j}} = \mathrm{M}a^2\psi'\theta' \sin\theta.$$

L'ensemble de ces résultats permet de former les équations (18″) relatives aux paramètres $q_1 = \psi$ et $q_2 = \varphi$; on trouve [cf. (22)]

$$(24)\left\{\begin{aligned} &\left[2\frac{d}{dt}(\psi'\cos\theta + \varphi') - \psi'\theta'\sin\theta\right]\cos\theta - \varphi'\theta'\sin\theta + \frac{\sin^2\theta}{2}\psi'' = 0,\\ &2\frac{d}{dt}(\psi'\cos\theta + \varphi') - \psi'\theta'\sin\theta = 0.\end{aligned}\right.$$

Compte tenu de la deuxième équation (24), la première se réduit à [8] :

$$(24') \qquad \psi''\sin^2\theta - 2\varphi'\theta' = 0$$

relations identiques à G. B. (9) ; la deuxième équation du système (24) ne diffère pas de G. B. (10′).

Il est inutile d'écrire l'équation (18) relative à $q_3 = \theta$; d'après la théorie générale du paragraphe 16, le théorème des forces vives fournit l'intégrale première [cf. (22) et (23)] :

$$(25) \quad 2(\psi'\cos\theta + \varphi')^2 + \frac{3}{2}\theta'^2 + \frac{1}{2}\psi'^2\sin^2\theta = 2\left(h - \frac{g}{a}\sin\theta\right),$$

où h est une constante arbitraire. C'est la relation (8) de G. B., qui remplace l'équation (18) en θ.

L'ensemble des équations (24_2), (24′), (25) et des conditions (20) donne les équations du mouvement cherchées du cerceau Σ.

§ 19. Respectons les notations du paragraphe 17 ; mais supposons maintenant que Σ est une sphère de rayon R. Les conditions de non-glissement prennent ici la forme (cf. G. B., p. 8).

$$(26) \qquad \left\{\begin{aligned} \xi' &= -\mathrm{R}(\varphi'\sin\theta\cos\psi - \theta'\sin\psi),\\ \eta' &= -\mathrm{R}(\varphi'\sin\theta\sin\psi + \theta'\cos\psi).\end{aligned}\right.$$

C'est le système (3) relatif à notre problème. D'autre part M étant

[8] Nous écartons la solution banale $\sin\theta = 0$.

toujours la masse de Σ, on a ici :

$$(27)\quad 2T = M(\xi'^2 + \eta'^2) + \frac{2}{5} MR^2(\psi'^2 + \theta'^2 + \varphi'^2 + 2\psi'\varphi' \cos\theta).$$

On en déduit, eu égard à (26) :

$$(27')\quad 2T = MR^2\left[\left(\frac{2}{5} + \sin^2\theta\right)\varphi'^2 + \frac{7}{5}\theta'^2 + \frac{2}{5}\psi'^2 + \frac{4}{5}\psi'\varphi'\cos\theta\right].$$

Enfin, $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$.

Formons les équations (18″) relatives aux paramètres

$$q_1 = \psi \qquad \text{et} \qquad q_2 = \varphi.$$

On vérifie d'abord aisément que :

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} + \frac{\partial T}{\partial q'_4}\frac{d\alpha_{11}}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q'_5}\frac{d\alpha_{21}}{dt} = 0,$$

en observant que $\alpha_{11} = \alpha_{21} = 0$; comme par ailleurs $\dfrac{\partial T}{\partial \xi} = \dfrac{\partial T}{\partial \eta} = 0$, l'équation (18″) relative à ψ, se réduit à l'équation de Lagrange :

$$\frac{1}{MR^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) = \frac{2}{5}\frac{d}{dt}(\varphi'\cos\theta + \psi') = 0,$$

qui fournit aussitôt l'intégrale première :

$$(28)\qquad \varphi'\cos\theta + \psi' = K = C^{te}.$$

L'interprétation de ce résultat, aisé à prévoir a priori, est immédiate : le moment cinétique de Σ par rapport à la verticale issue de G est constant ; (28) est aussi un corollaire du théorème du paragraphe 15.

Passons à l'équation en φ. On trouve [cf. (28)] :

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial T}{\partial q'_4}\frac{d\alpha_{12}}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q'_5}\frac{d\alpha_{22}}{dt} = MR^2\theta'\sin\theta(\varphi'\cos\theta + \psi') = MR^2 K \sin\theta\theta',$$

de sorte que la relation (18″) correspondante s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left[\sin^2\theta\varphi' + \frac{2}{5}(\psi'\cos\theta + \varphi')\right] + K\frac{d\cos\theta}{dt} = 0.$$

On en déduit, eu égard à (28), l'intégrale première :

$$(29)\qquad \psi'\cos\theta + \varphi' = C,$$

C étant une constante. (29) exprime la constance du moment cinétique de Σ par rapport à Gz. Nous remplaçons encore l'équation en θ par l'intégrale première des forces vives (cf. le paragraphe 16) :

$$(30)\quad \left(\frac{2}{5}+\sin^2\theta\right)\varphi'^2+\frac{7}{5}\theta'^2+\frac{2}{5}\psi'^2+\frac{4}{5}\psi'\varphi'\cos\theta=h,$$

h étant une constante.

Les relations (28), (29) et (30), jointes aux équations de liaison (26), donnent l'ensemble des équations du mouvement. Nous n'en poursuivrons pas l'étude et nous nous bornerons aux remarques suivantes.

Notre méthode nous a fourni les équations en θ, φ, ψ ; il semble que la marche suivie conduise plus rapidement au but que le procédé habituel, basé sur l'emploi des théorèmes généraux. Mais, il est plus difficile d'interpréter cinématiquement les résultats acquis. Aussi les méthodes classiques, qui consistent à prendre pour inconnues intermédiaires les composantes p_1, q_1, r_1 du vecteur rotation instantanée de la sphère Σ suivant les axes du trièdre fixe sont-elles ici préférables ; on sait qu'on aboutit ainsi aux intégrales premières $p_1=C^{te}$, $q_1=C^{te}$, $r_1=C^{te}$ [donc, d'après (26) à $\xi'=C^{te}$, $\eta'=C^{te}$], qui permettent de se rendre compte de l'allure du mouvement. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que (28), (29) et (30) forment un système de relations équivalentes aux intégrales premières en cause.