ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

HENRI CARTAN

Théorie générale du balayage en potentiel newtonien

Annales de l'université de Grenoble, tome 22 (1946), p. 221-280

<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1946__22__221_0>

THÉORIE GÉNÉRALE DU BALAYAGE EN POTENTIEL NEWTONIEN

par Henri **CARTAN** (Paris-Strasbourg).

INTRODUCTION

L'exposé général qui va suivre (1), et dont la conception remonte à deux années, concerne la théorie générale du « balayage » pour ensembles absolument quelconques (c'est-à-dire non nécessairement fermés, ou ouverts). L'opération que j'appelle balayage est essentiellement la même que celle que M. Brelot nomme « extrémisation » ([3], [5]) (2); la même opération a aussi été étudiée par A. F. Monna [12].

L'opération de balayage a été introduite pour la première fois par H. Poincaré en vue du problème de Dirichlet. Mais Poincaré procédait en une suite infinie d'étapes, sans chercher ce que devenaient à la limite les masses balayées. C'est de La Vallée Poussin (*Annales de l'Institut H. Poincaré,* 1930, p. 171-232) qui semble avoir vu le premier que la distribution de masses limite donnait la solution du problème de Dirichlet (à donnée continue), tout au moins lorsqu'on faisait des hypothèses restrictives sur les frontières. En fait, ces hypothèses étaient superflues, comme l'ont montré Frostman ([8], [9]) et de La Vallée Poussin lui-même [15], avec leur théorie générale du balayage sur ensembles *fermés* ; la solution du problème de Dirichlet pour un ensemble ouvert s'obtient en balayant une masse ponctuelle sur le *complémentaire* de cet ensemble.

Le « balayage » étudié ici s'applique à des ensembles quelconques. La théorie qui va être exposée englobe plusieurs théories antérieures d'aspects divers, qui s'étaient peu à peu constituées de manière plus

(1) Une partie de cet exposé a fait l'objet d'une conférence à l'Université de Zürich, le 28 mai 1946.

(2) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cette Introduction.

ou moins autonome, et dont chacune avait ses notions et sa terminologie : notions de point régulier ou irrégulier, de point stable ou instable ([2 *bis*]). L'ensemble était d'autant plus hétéroclite que, sur ces questions, la terminologie varie avec les auteurs ; cela tient notamment au fait que certains fixent plutôt leur attention sur l'ensemble A sur lequel s'effectue le balayage, d'autres sur le complémentaire de A ([3]) (comme il est naturel dans l'étude du problème de Dirichlet). Il était donc impossible, dans le présent travail, d'adopter une terminologie qui fût en accord avec toutes celles utilisées auparavant. Celle qui a été choisie est cohérente ; elle est, en gros, conforme à celle de DE LA VALLÉE POUSSIN [16], bien que cet auteur n'utilise pas le terme de balayage dans un sens aussi général que celui qui est adopté ici (son « opération régularisante » est un cas particulier de notre balayage).

Les problèmes envisagés ici sont au fond les mêmes que ceux traités par M. BRELOT dans un mémoire récent [5], dont la conception est d'ailleurs contemporaine de celle du présent travail. Mais les points de vue sont différents : au lieu d'opérer directement sur les distributions de masses, Brelot opère sur les potentiels (plus généralement, sur les fonctions surharmoniques $\geqslant 0$; ou plutôt il se place au point de vue opposé des fonctions sousharmoniques $\leqslant 0$), et il axe sa théorie sur une propriété extrémale ([3 *bis*]) que nous donnerons ci-dessous (n° 19, corollaire des théorèmes 1 et 1 *bis*). Toutefois, si différents que soient les points de vue initiaux, il existe nécessairement de nombreuses interférences entre le mémoire de Brelot et le mien, notamment aux paragraphes V et VI ci-dessous. Je saisis d'ailleurs cette occasion pour remercier M. Brelot qui m'a aimablement tenu au courant de ses recherches et de ses résultats, et

([2 *bis*]) On en trouvera un exposé historique succinct chez BRELOT ([3], n° 5).

([3]) On en arrive par exemple au paradoxe que, chez un même auteur, le problème *intérieur* conduit à la capacité *extérieure*, et vice-versa. Notons aussi que la notion de « point frontière irrégulier *d'*un ensemble ouvert » selon Brelot, est entièrement différente de celle de « point frontière irrégulier *pour* un ensemble ouvert » chez De la Vallée Poussin [16].

([3 *bis*]) BRELOT reprend là une idée déjà utilisée par lui dans un mémoire antérieur [1], consacré à l'extrémisation pour ensembles *fermés* (c'est-à-dire, dans notre terminologie actuelle, au balayage pour ensembles *ouverts*), ou tout au moins pour ensembles fermés bornés. La transposition de ces idées au cas général se fait chez Brelot [5] grâce à l'utilisation systématique d'un théorème que j'avais annoncé dans une Note aux *Comptes Rendus* (214, 1942, p. 944 ; voir énoncé et démonstration dans [7], n^{os} 8 et 10) ; ce théorème concerne la borne inférieure d'une famille quelconque de fonctions surharmoniques $\geqslant 0$. A l'inverse de Brelot, je n'utiliserai pas ce théorème ici, car sa démonstration nécessite précisément une grande partie de la théorie de la capacité ; or ici je ne présuppose pas connue la théorie de la capacité, que je fonde à nouveau en application du balayage.

m'a largement fait profiter de sa profonde érudition en ces matières.

L'originalité du présent travail consiste surtout en ce que les problèmes sont abordés systématiquement du point de vue des *distributions de masses*. Tout d'abord, pour le cas des distributions d'*énergie finie*, je reprends les méthodes de *minimum* dont l'idée initiale remonte à GAUSS, et qui ont été remises en honneur par O. FROSTMAN [8] et DE LA VALLÉE POUSSIN [15]. Mais, contrairement à ces auteurs, je cherche la solution des problèmes de minimum en utilisant les techniques modernes de l'*espace de Hilbert*, ce qui permet d'éliminer toute hypothèse superflue et d'éviter le principe de choix. Ensuite, je ramène le cas des distributions *quelconques* à celui des distributions d'énergie finie, grâce à l'introduction d'une nouvelle *topologie* dans l'ensemble des distributions de masses (voir, au § 2, la définition de la « topologie fine »). De cette manière, la théorie des points *irréguliers* (4) suit, au lieu de la précéder, la théorie générale du balayage ; elle en découle pour ainsi dire naturellement.

Ce qui va suivre est un *exposé d'ensemble* destiné en principe à se suffire à lui-même. Il doit, autant que possible, éviter au lecteur de rechercher dans des mémoires spécialisés la démonstration, souvent compliquée, de tel théorème ; c'est à ce prix que, sans être préalablement initié, le lecteur peut se faire une idée d'ensemble de la question et dominer les problèmes. Toutefois, j'aurai à renvoyer aux premiers paragraphes d'un mémoire antérieur [7], où les notions de base (distributions de masses, potentiels, fonctions surharmoniques, énergie) sont exposées avec un peu plus de détails. Par contre, la théorie de la *capacité* est entièrement reprise ici, car elle est intimement liée aux problèmes de « balayage ».

J'ai laissé systématiquement de côté ce qui concerne les applications au problème de Dirichlet, qui du reste ne présentent pas de difficulté essentielle, une fois mise sur pied la théorie du balayage (4 *bis*). D'une manière générale, j'ai évité autant que possible d'insister sur les particularités de la théorie « newtonienne » (par exemple sur le fait que le balayage des masses sur un ensemble A ne modifie pas les masses portées par l'intérieur de A ; fait qui est lié au caractère *local* de l'harmonicité ou de la surharmonicité) : aussi la théorie,

(4) A laquelle ont été consacrés de très nombreux travaux, tels ceux de LEBESGUE (qui a introduit cette notion à propos du problème de Dirichlet), BOULIGAND, WIENER, KELLOGG, EVANS, DE LA VALLÉE POUSSIN, BRELOT, FROSTMAN, VASILESCO, pour n'en citer qu'une partie.

(4 *bis*) Toutefois, le problème de Dirichlet « ramifié » nécessite des développements spéciaux. Voir sur ce sujet l'article de M. Brelot dans ce même fascicule du présent périodique.

telle qu'on la trouve ici, peut-elle s'étendre à d'autres sortes de potentiels, comme par exemple les « potentiels d'ordre α » de M. RIESZ [14] et FROSTMAN [8], au moins pour $0 < \alpha < 2$. On sait qu'à ces potentiels correspond une notion de *fonction surharmonique* (« d'ordre α ») [10], mais cette notion n'a plus un caractère *local*. Néanmoins, l'essentiel des résultats du présent travail vaut encore dans ce cas; en effet, les notions de base qui servent aux développements des paragraphes II à VII valent aussi bien pour les « potentiels d'ordre α » ($\alpha < 2$) que pour le potentiel newtonien. C'est seulement pour alléger l'exposé que j'ai préféré, au paragraphe I, me placer dans le cas « newtonien » pour établir les notions de base; le cas des « potentiels d'ordre α » nécessiterait des modifications dans les démonstrations de ce paragraphe.

Même en se bornant au cas newtonien, il importe de ne pas perdre de vue que la « fonction fondamentale » servant à définir le potentiel (n° 2) pourrait être remplacée par la « fonction de Green » relative à un ensemble *ouvert* Ω, en même temps que Ω deviendrait l'espace dans lequel sont envisagés distributions et potentiels. Les potentiels pris par rapport à la fonction de Green jouissent, eux aussi, des propriétés de base qui permettent une théorie du « balayage » et de la « capacité ». Si néanmoins je me suis abstenu d'en traiter explicitement, c'est parce que la notion de fonction de Green est elle-même subordonnée au balayage dans le cas du potentiel newtonien classique.

Enfin, le lecteur désireux d'étendre la validité de la théorie à des ensembles ouverts Ω pouvant contenir le « point à l'infini » que M. BRELOT adjoint à l'espace euclidien, pourra se reporter au mémoire fondamental de cet auteur [4]. D'ailleurs, dans son mémoire ultérieur [5], consacré au problème de l'extrémisation, BRELOT se place précisément dans le cas général d'un ensemble ouvert Ω pouvant contenir le point à l'infini.

BIBLIOGRAPHIE [5]

[1] M. BRELOT, Critères de régularité et de stabilité (*Bull. Acad. Roy. de Belgique*, 1939, p. 125-137).

[2] M. BRELOT, Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel (*Journal de Math.*, 19, 1940, p. 319-337).

[5] Cette bibliographie sommaire ne saurait évidemment avoir la prétention d'être complète sur un pareil sujet. Nous nous sommes efforcé de citer, parmi les travaux relativement récents, les plus caractéristiques; notre rôle n'est pas de faire une histoire encyclopédique du développement de la théorie dans tous ses menus détails.

[3] M. Brelot, Sur les ensembles effilés (*Bull. Sciences Math.*, 2ᵉ série, 68, 1944, p. 12-36).
[4] M. Brelot, Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques (*Ann. E. N. S.*, 3ᵉ série, 61, 1944, p. 301-332).
[5] M. Brelot, Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités (*Journal de Math.*, 24, 1945, p. 1-32).
[6] H. Cartan, Sur les fondements de la théorie du potentiel (*Bull. Soc. Math. France*, 69, 1941, p. 71-96).
[7] H. Cartan, Théorie du potentiel newtonien : énergie, capacité, suites de potentiels (*Bull. Soc. Math. France*, 73, 1945, p. 74-106).
[8] O. Frostman, *Thèse* (Lund, 1935).
[9] O. Frostman, Sur le balayage des masses (*Acta Szeged*, 9, 1938, p. 43-51).
[10] O. Frostman, Sur les fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire (*Arkiv for Mat., Astr. och Fysik*, 26 A, 1939).
[11] A. F. Monna, Sur la capacité des ensembles (*Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch.*, Amsterdam, 43, 1940, p. 81-86).
[12] A. F. Monna, Extension du problème de Dirichlet pour ensembles quelconques (*ibid.*, 43, 1940, p. 497-511).
[13] A. F. Monna, Sur un principe de variation dû à Gauss, etc. (*ibid.*, 49, 1946, p. 54-62).
[14] M. Riesz, Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels (*Acta Szeged*, 9, 1938, p. 1-42).
[15] De la Vallée Poussin, Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel, etc. (*Actual. scient. et ind.*, fasc. 578, Hermann, 1937).
[16] De la Vallée Poussin, Points irréguliers, détermination des masses par les potentiels (*Bull. Ac. Royale de Belgique*, 1938, p. 368-384 et p. 672-689).
[17] F. Vasilesco, Sur la notion de capacité d'un ensemble borné quelconque (*Bull. Sciences Math.*, 2ᵉ série, 67, 1943, p. 49-68).

Enfin, pour les notions de topologie générale utilisées dans ce travail, nous renvoyons le lecteur au Traité de N. Bourbaki, dont nous adoptons la terminologie :

[18] N. Bourbaki, Topologie générale, chap. I et II (*Actualités scient. et ind.*, fascicule 858, 1940).

I. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1. — Distributions de masses.

Nous nous plaçons une fois pour toutes dans l'espace euclidien à n dimensions R^n(n entier quelconque $\geqslant 3$), ou (dans le cas de *deux* dimensions) dans le cercle $|z| < 1$ du plan de la variable complexe z. Dans un cas comme dans l'autre, on a affaire à un espace localement compact([5 bis]), et par suite on a une théorie des « distributions de masses positives » ou « mesures de Radon positives », et de l'intégrale des fonctions par rapport à de telles mesures. Nous nous bornons ici à renvoyer à deux mémoires antérieurs ([6] et [7]) et à rappeler quelques notations et notions essentielles.

$\mathcal{C}^+$ désignera l'ensemble des fonctions f *continues,* à valeurs numériques réelles $\geqslant 0$, et telles que l'on ait $f(x) = 0$ en tout point x extérieur à un ensemble *compact* ([5 bis]) convenable de l'espace envisagé (ensemble qui dépend de la fonction f). Une *distribution de masses positives,* ou mesure de Radon positive, est une fonctionnelle qui, à chaque $f \in \mathcal{C}^+$, fait correspondre un nombre $\mu(f) \geqslant 0$, de manière que

$$\mu(f_1 + f_2) = \mu(f_1) + \mu(f_2)$$

quelles que soient les fonctions f_1 et f_2 de $\mathcal{C}^+$; d'où résulte facilement

$$\mu(af) = a\mu(f)$$

pour toute constante $a > 0$. Il est essentiel de préciser que le nombre $+\infty$ est exclu aussi bien des valeurs que peuvent prendre les fonctions de $\mathcal{C}^+$, que des valeurs que peut prendre $\mu(f)$.

Par contre, lorsqu'on considère l'ensemble $\mathcal{J}^+$ des fonctions *semi-continues inférieurement* $\geqslant 0$, on n'exclut pas la valeur $+\infty$ de l'ensemble des valeurs que peuvent prendre ces fonctions. Ces fonctions ne sont autres que les *limites croissantes* de fonctions de $\mathcal{C}^+$. Pour $g \in \mathcal{J}^+$, on définit

$$\int g\,d\mu, \qquad \text{noté aussi} \qquad \int g(x)\,d\mu(x),$$

comme la borne supérieure (finie *ou infinie*) de $\mu(f)$ pour toutes les fonctions f de $\mathcal{C}^+$ telles que $f \leqslant g$ [c'est-à-dire $f(x) \leqslant g(x)$ en tout point x]. On est donc amené à noter $\int f\,d\mu$ la quantité $\mu(f)$ attachée, par définition, à une fonction de f de $\mathcal{C}^+$. On prouve que

$$\int (g_1 + g_2)\,d\mu = \int g_1\,d\mu + \int g_2\,d\mu$$

quelles que soient les fonctions g_1 et g_2 de $\mathcal{J}^+$.

On définit ensuite l'*intégrale supérieure* d'une fonction $h \geqslant 0$ quel-

([5 bis]) Nous nous conformons à la terminologie de N. Bourbaki [18]. En fait, les sous-ensembles *compacts* de R^n (ou du cercle-unité du plan) ne sont autres que les ensembles *fermés bornés.*

conque (à valeurs finies ou infinies) comme la borne inférieure de $\int g d\mu$ lorsque g parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{J}^+$ qui sont $\geqslant h$; on la note

$$\overline{\int} h d\mu \qquad \text{ou} \qquad \overline{\int} h(x) d\mu(x).$$

On voit facilement que

$$\overline{\int}(h_1 + h_2) d\mu \leqslant \overline{\int} h_1 d\mu + \overline{\int} h_2 d\mu$$

(propriété de « convexité »).

Lorsque h est la *fonction caractéristique* d'un ensemble A (fonction égale à 1 en tout point de A, à 0 ailleurs), $\overline{\int} h d\mu$ s'appelle la *mesure extérieure* de l'ensemble A. On appelle *ensemble de mesure nulle* (pour μ) tout ensemble dont la mesure extérieure est nulle. La réunion d'une famille finie ou dénombrable d'ensembles de mesure nulle est un ensemble de mesure nulle. Pour que l'intégrale supérieure $\overline{\int} h d\mu$ d'une fonction $h \geqslant 0$ quelconque soit nulle, il faut et il suffit que l'ensemble des points x où $h(x) > 0$ soit de mesure nulle ; on dit alors que h est *nulle presque partout* (pour μ).

On dit qu'une distribution μ est *portée par un ensemble* B (ou que B *est un noyau de* μ) si le complémentaire de B est de mesure nulle pour μ. Parmi les ensembles fermés F tels que μ soit portée par F, il en est un contenu dans tous les autres (c'est le complémentaire du plus grand ensemble ouvert de mesure nulle) ; on l'appelle le *noyau fermé* de la distribution μ.

Nous ne revenons pas ici sur la théorie de l'intégrale des fonctions numériques (« sommables » pour μ), ou de la mesure des ensembles (« mesurables » pour μ) ; pas plus que sur les intégrales *doubles* (pour un couple de mesures μ et ν). Les ensembles « boréliens » (qui constituent la plus petite famille contenant les ensembles ouverts et les ensembles fermés, et jouissant des deux propriétés : le complémentaire d'un ensemble de la famille appartient à la famille, toute réunion dénombrable d'ensembles de la famille appartient à la famille) sont mesurables pour *toute* distribution μ. Si A est un ensemble borélien, et μ une distribution, on notera μ_A la distribution, « restriction de μ à l'ensemble A », définie de la manière suivante : pour $f \in \mathcal{C}^+$, on pose

$$\int f d\mu_A = \int f \varphi_A d\mu,$$

φ_A désignant la fonction caractéristique de l'ensemble A. L'intégrale $\int f d\mu_A$ se note aussi $\int_A f d\mu$.

Rappelons encore que la *masse totale* d'une distribution positive μ est la mesure de l'espace, ou, ce qui revient au même, l'intégrale $\int d\mu$ de la constante 1 ; elle est finie ou infinie.

Enfin, on dit qu'une mesure μ est la somme de deux mesures μ' et μ'' si

$$\int f d\mu = \int f d\mu' + \int f d\mu'' \qquad \text{pour toute } f \in \mathcal{C}^+,$$

ce qui entraîne la même relation pour toute f de $\mathcal{J}^+$.

2. — Potentiel newtonien.

Rappelons quelques définitions et propriétés classiques (voir [7]). Dans l'espace R^n $(n \geqslant 3)$, on considère la « fonction fondamentale »

$$\varphi(x, y) = |x - y|^{2-n}$$

du couple de points x, y [on note $x - y$ le vecteur d'origine x et d'extrémité y, et $|x - y|$ la longueur euclidienne de ce vecteur]. Dans le cas du cercle $|z| < 1$ $(n = 2)$, on prend comme « fonction fondamentale »

$$\varphi(x, y) = \log\left|\frac{1 - \bar{x}y}{x - y}\right| \qquad (|x| < 1, |y| < 1)$$

($\bar{x}$ désigne le nombre complexe conjugué de x).

Dans un cas comme dans l'autre, la fonction fondamentale $\varphi(x, y)$ est symétrique $[\varphi(x, y) = \varphi(y, x)]$; pour chaque y, c'est une fonction de x, *harmonique* pour $x \neq y$, infinie pour $x = y$, et « nulle à l'infini » [pour chaque y, on a

$$\lim_{|x| \to \infty} \varphi(x, y) = 0 \qquad \text{si} \qquad n \geqslant 3,$$

$$\lim_{|x| \to 1} \varphi(x, y) = 0 \qquad \text{si} \qquad n = 2].$$

Le *potentiel* d'une distribution positive μ est la fonction de x

$$U^\mu(x) = \int \varphi(x, y) d\mu(y),$$

qui a une valeur bien déterminée ($\geqslant 0$, finie ou infinie) en chaque point x. C'est une fonction *semi-continue inférieurement* de x.

Rappelons la définition de *l'énergie mutuelle* de deux distributions positives μ et ν : on a l'égalité

$$\int U^{\mu} d\nu = \int U^{\nu} d\mu \qquad \text{(loi de réciprocité)},$$

car chacune de ces intégrales est égale à l'intégrale double

$$\int\int \varphi(x, y) d\mu(x) d\nu(y).$$

Leur valeur commune (qui est finie ou infinie) s'appelle l'énergie mutuelle de μ et ν.

Nous appellerons *distribution sphérique* toute distribution positive répartie uniformément sur une sphère (6) Σ, c'est-à-dire telle que l'intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{C}^+$ soit proportionnelle à la valeur moyenne de f sur Σ ; le coefficient de proportionnalité, indépendant de f, est la masse totale m de la distribution sphérique. Le potentiel d'une telle distribution est constant à l'intérieur de Σ, et, à l'extérieur, c'est le même que celui d'une masse m placée au centre (7) de Σ.

Le potentiel U^{μ} d'une distribution positive μ peut être la constante $+\infty$. Hors ce cas, c'est une fonction *harmonique* (et, en particulier, finie) dans tout ensemble ouvert ne portant pas de masses de μ (c'est-à-dire de mesure nulle pour μ).

PROPOSITION 1. — *Pour qu'un potentiel U^{μ} ne soit pas identiquement infini, il faut et il suffit que l'énergie mutuelle $\int U^{\lambda} d\mu$ soit* FINIE *pour toute distribution sphérique λ ; d'ailleurs, si cette énergie mutuelle est finie pour une distribution sphérique particulière (non nulle), elle l'est pour toute distribution sphérique.*

La condition est évidemment *suffisante*, car si $\int U^{\mu} d\lambda$ est *fini* pour une λ sphérique particulière (non nulle), U^{μ} ne peut être identiquement infini. Reste à montrer que si U^{μ} n'est pas identiquement infini, $\int U^{\lambda} d\mu$ est fini pour toute distribution sphérique λ. Considérons une sphère Σ' concentrique à la sphère Σ qui porte λ, et de rayon plus grand ; soient μ' la restriction de μ à la boule fermée

(6) Nous appelons *sphère* de centre a et de rayon ρ l'ensemble des points x tels que $|x - a| = \rho$; *boule fermée* de centre a et de rayon ρ l'ensemble des points x tels que $|x - a| \leqslant \rho$.

(7) On dit qu'une distribution μ est formée d'une masse m placée en un point a si $\int f d\mu = m f(a)$ pour toute $f \in \mathcal{C}^+$, et par suite pour toute $f \in \mathcal{J}^+$.

limitée par Σ', et μ'' la restriction de μ à l'extérieur de cette boule. On a

$$\int U^\lambda d\mu = \int U^\lambda d\mu' + \int U^\lambda d\mu''.$$

La première intégrale du second membre est finie (puisque U^λ est une fonction continue bornée) ; la seconde est égale à $\int U^{\mu''} d\lambda$, c'est-à-dire proportionnelle à la moyenne, sur Σ, de la fonction $U^{\mu''}$ qui est harmonique à l'intérieur de Σ' ; elle est donc finie. C. Q. F. D.

Désormais, nous concentrerons notre intérêt sur les distributions positives μ dont le potentiel n'est pas identiquement infini, c'est-à-dire par rapport auxquelles les potentiels U^λ (λ sphérique) sont *sommables* (d'intégrale finie). *Nous désignerons par $\mathfrak{M}$ l'ensemble de ces distributions*. On remarquera que *toute distribution de masse totale finie appartient à $\mathfrak{M}$*, d'après la proposition 1 ; en effet, U^λ est une fonction *bornée* si λ est une distribution sphérique.

Définition. — *On désigne par $\mathfrak{L}$ l'ensemble des distributions positives λ telles que l'énergie mutuelle $\int U^\mu d\lambda$ soit finie pour toute $\mu \in \mathfrak{M}$.*

Les distributions sphériques appartiennent à la famille $\mathfrak{L}$.

Proposition 2. — *Pour qu'une distribution ν appartienne à $\mathfrak{L}$, il faut et il suffit qu'il existe une distribution sphérique dont le potentiel majore le potentiel U^ν.*

Montrons, d'une façon précise : *soit λ une distribution sphérique donnée à l'avance (non nulle) ; pour que $\nu \in \mathfrak{L}$, il faut et il suffit qu'il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$U^\nu(x) \leqslant k U^\lambda(x) \qquad \text{pour tout } x.$$

La condition est évidemment *suffisante*, car elle entraîne

$$\int U^\nu d\mu \leqslant k \int U^\lambda d\mu < +\infty \qquad \text{pour toute } \mu \in \mathfrak{M}.$$

Montrons qu'elle est *nécessaire* : supposons-la non remplie, et fabriquons une $\mu \in \mathfrak{M}$ telle que $\int U^\nu d\mu$ soit infinie. Il existe une suite de points x_p tels que

$$U^\nu(x_p) \geqslant 2^p U^\lambda(x_p).$$

De deux choses l'une : ou bien x_p s'éloigne « à l'infini » quand p augmente indéfiniment, ou bien il existe une sous-suite infinie de x_p situés dans un sous-ensemble compact de l'espace. Dans la deuxième éventualité, U^ν n'est pas borné, et il existe une suite de points y_p

tels que $U^{\nu}(y_p) \geqslant 2^p$; la distribution μ obtenue en plaçant une masse $1/2^p$ en chaque point y_p est telle que $\int U^{\nu} d\mu = +\infty$, et elle appartient à $\mathfrak{M}$ puisque sa masse totale est finie. Dans la première éventualité, plaçons une masse $1/U^{\nu}(x_p)$ en x_p ; l'ensemble de ces masses constitue une distribution μ, car il n'y en a qu'un nombre *fini* sur chaque ensemble compact ; on a $\int U^{\nu} d\mu = +\infty$, et μ appartient à $\mathfrak{M}$, car

$$\int U^{\lambda} d\mu = \sum_p U^{\lambda}(x_p)/U^{\nu}(x_p) \leqslant \sum_p 1/2^p < +\infty.$$

3. — Conditions d'égalité de deux distributions de la famille $\mathfrak{M}$.

Considérons deux sphères concentriques Σ et Σ' de rayons ρ et ρ' ($\rho < \rho'$), et les distributions sphériques correspondantes λ et λ', de masse totale 1. La différence $U^{\lambda} - U^{\lambda'}$ est nulle à l'extérieur de Σ', continue et $\geqslant 0$ en tout point, donc c'est une fonction de la famille $\mathcal{C}^+$ (n° 1). Les différences telles que $U^{\lambda} - U^{\lambda'}$ forment un sous-ensemble $\mathfrak{D}$ *total* de $\mathcal{C}^+$ (voir [7], p. 77) : pour toute $f \in \mathcal{C}^+$, pour tout voisinage V du compact en dehors duquel s'annule f, et pour tout nombre $\varepsilon > 0$, existe une combinaison linéaire g de fonctions de $\mathfrak{D}$, à coefficients positifs, qui est nulle hors de V et satisfait partout à $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$. De là résulte (cf. lemme 3 du mémoire cité) : *si deux distributions positives μ et ν sont telles que*

$$\int U^{\lambda} d\mu = \int U^{\lambda} d\nu$$

pour toute distribution sphérique λ, les distributions μ et ν sont identiques.

Conséquence : *si deux distributions μ et ν de $\mathfrak{M}$ donnent naissance à des potentiels U^{μ} et U^{ν} partout égaux, elles sont identiques.* En effet, on a alors $\int U^{\mu} d\lambda = \int U^{\nu} d\lambda$ pour toute distribution sphérique λ.

4. — Fonctions surharmoniques.

Rappelons la notion classique, due essentiellement à F. Riesz, de fonction *surharmonique* dans un ensemble ouvert non vide A ; c'est une fonction V(x) définie dans A, semi-continue inférieurement (donc pouvant prendre la valeur $+\infty$, mais non la valeur $-\infty$), telle que :

1° V ne soit identiquement infinie dans aucun sous-ensemble ouvert non vide de A ;

2° pour chaque boule fermée contenue dans A, la valeur de V au centre de la boule soit au moins égale à la valeur moyenne de V sur la sphère frontière de la boule.

Une fonction H est harmonique si H et — H sont surharmoniques. La borne inférieure inf (V, W) de deux fonctions surharmoniques V et W est surharmonique [inf (V, W) désigne la fonction égale, en chaque point x, à la plus petite des valeurs $V(x)$ et $W(x)$].

En fait, nous n'envisagerons ici que des fonctions surharmoniques *dans tout l'espace* R^n (si $n \geqslant 3$) ou *dans tout le cercle* $|z| < 1$ (si $n = 2$).

Tout potentiel U^μ est surharmonique (conséquence immédiate, par la loi de réciprocité, du fait que le potentiel d'une distribution sphérique de masse totale $+1$ est majoré par le potentiel d'une masse $+1$ placée au centre de la sphère). On peut même caractériser [8] les potentiels comme les *fonctions surharmoniques* $\geqslant 0$ *dont la moyenne,* sur une sphère de centre O (origine) et de rayon ρ, *tend vers zéro* quand ρ tend vers l'infini (resp. quand ρ tend vers 1, pour le cas du plan $n = 2$). D'ailleurs, pour $n \geqslant 3$, toute fonction surharmonique $\geqslant 0$ (dans tout l'espace) est la somme d'un potentiel et d'une constante $\geqslant 0$.

Du critère précédent résulte notamment ceci : si V est une fonction surharmonique $\geqslant 0$ majorée par un potentiel U^μ, V est identique à un potentiel U^ν. De même, la borne inférieure inf (V, U^μ) d'une fonction surharmonique $V \geqslant 0$ (par exemple : une constante positive) et d'un potentiel U^μ est identique à un potentiel U^ν. Pour la même raison, la limite d'une suite *croissante* de potentiels U^{μ_p} (« croissante » signifie que $U^{\mu_{p+1}}(x) \geqslant U^{\mu_p}(x)$ pour tout x) est identique à un potentiel pourvu qu'elle soit majorée par un potentiel.

[8] Voir par exemple [7], proposition 1, p. 83. Je profite de cette occasion pour rectifier une incorrection dans la démonstration : lignes 4 et 5 du bas de la p. 83, il faut, au lieu de « comme sa moyenne sur la sphère de centre O et de rayon ρ tend vers zéro quand ρ tend vers R », lire « comme sa limite inférieure, quand x tend vers R, est 0 ». Signalons encore que la caractérisation dont il s'agit vaut encore pour les « potentiels d'ordre α » de M. Riesz (on trouvera en [14], p. 37, des indications sur la possibilité de cette extension).

5. — Énergie.

On a défini (n° 2) l'énergie mutuelle de deux distributions positives μ et ν. Lorsque $\nu = \mu$, on obtient *l'énergie* d'une distribution

$$\int U^{\mu} d\mu.$$

Nous désignerons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des *distributions positives dont l'énergie est finie*. On remarquera que la famille $\mathcal{L}$ (n° 2) est *contenue dans* $\mathcal{E}$; car si $\nu \in \mathcal{L}$, on a $\int U^{\nu} d\mu < +\infty$ pour toute $\mu \in \mathfrak{M}$, et en particulier pour $\mu = \nu$. En particulier, les distributions sphériques sont des distributions d'énergie finie.

L'inégalité fondamentale

$$\left(\int U^{\mu} d\nu\right)^2 \leqslant \left(\int U^{\mu} d\mu\right) \cdot \left(\int U^{\nu} d\nu\right) \text{ (9)}$$

permet de définir *l'énergie d'une différence* $\mu - \nu$, lorsque $\mu \in \mathcal{E}$ et $\nu \in \mathcal{E}$; cette énergie

$$\int (U^{\mu} - U^{\nu})(d\mu - d\nu) = \int U^{\mu} d\mu + \int U^{\nu} d\nu - 2\int U^{\mu} d\nu$$

est *toujours* $\geqslant 0$.

Nous désignerons par $\overline{\mathcal{E}}$ l'ensemble des différences $\mu - \nu$ (où $\mu \in \mathcal{E}$, $\nu \in \mathcal{E}$), où l'on identifie $\mu - \nu$ et $\mu' - \nu'$ si $\mu + \nu' = \nu + \mu'$. L'ensemble $\overline{\mathcal{E}}$ est pourvu d'une structure *d'espace vectoriel* sur le corps des nombres réels, d'une manière évidente ; en outre, on peut y définir un *produit scalaire* (α, α') de la manière suivante : si $\alpha = \mu - \nu$, $\alpha' = \mu' - \nu'$, on pose

$$\begin{aligned}(\alpha, \alpha') &= \int (U^{\mu} - U^{\nu})(d\mu' - d\nu') \\ &= \int U^{\mu} d\mu' + \int U^{\nu} d\nu' - \int U^{\mu} d\nu' - \int U^{\nu} d\mu'.\end{aligned}$$

(α, α') est une *fonction bilinéaire* de α et α', *symétrique* $[(\alpha, \alpha') = (\alpha', \alpha)]$, et, pour tout $\alpha \in \overline{\mathcal{E}}$, (α, α) est $\geqslant 0$. Nous définissons la *norme* $\|\alpha\|$ d'un élément α de $\overline{\mathcal{E}}$, par

$$\|\alpha\|^2 = (\alpha, \alpha).$$

(9) Voir une démonstration de cette inégalité dans [14], p. 5.

On a l'inégalité dite « de Schwarz » :

$$(5,\ 1) \qquad |(\alpha, \alpha')| \leqslant \|\alpha\| \cdot \|\alpha'\|,$$

qui résulte du fait que la forme quadratique en u et v

$$\|u\alpha + v\alpha'\|^2$$

est toujours $\geqslant 0$. De (5, 1) résulte facilement

$$(5,\ 2) \qquad \|\alpha + \alpha'\| \leqslant \|\alpha\| + \|\alpha'\|.$$

Montrons que *la norme* $\|\alpha\|$ *ne peut être nulle que si* $\alpha = 0$. (C'est le théorème classique, suivant lequel l'*énergie* de $\mu - \nu$ ne peut être *nulle* que si μ et ν sont identiques.) En effet, soient deux distributions $\mu \in \mathcal{E}$ et $\nu \in \mathcal{E}$ telles que $\|\mu - \nu\| = 0$; l'inégalité (5, 1) prouve que

$$(\mu - \nu,\ \lambda) = 0$$

pour toute distribution $\lambda \in \mathcal{E}$, c'est-à-dire

$$\int U^\lambda d\mu = \int U^\lambda d\nu.$$

Cette égalité ayant lieu notamment chaque fois que λ est une « distribution sphérique », il s'ensuit (cf. n° 3) que $\mu = \nu$. C. Q. F. D.

Ainsi, le produit scalaire (α, α') et la norme $\|\alpha\|$ qui s'en déduit définissent sur $\bar{\mathcal{E}}$ une *structure préhilbertienne* ; en « complétant » $\bar{\mathcal{E}}$, on obtiendrait un véritable espace de Hilbert (réel). L'espace $\bar{\mathcal{E}}$ lui-même n'est pas complet (voir [7], p. 87) ; autrement dit, il peut exister, dans $\bar{\mathcal{E}}$, des *suites de Cauchy* qui ne convergent (¹⁰) vers aucun élément de $\bar{\mathcal{E}}$.

Le fait que $\int (U^\mu - U^\nu)(d\mu - d\nu)$ est toujours $\geqslant 0$ pour $\mu \in \mathcal{E}$, $\nu \in \mathcal{E}$, et ne peut s'annuler que si $\mu = \nu$, comporte la conséquence suivante (¹¹) : si une distribution positive μ, *d'énergie finie*, et une fonction V surharmonique $\geqslant 0$ satisfont à l'inégalité

$$U^\mu(x) \leqslant V(x)$$

en tout point x d'un noyau de μ, l'inégalité a lieu en tout point sans exception. Lorsque V est une *constante* positive, c'est le « principe du maximum » de Frostman (¹²).

(¹⁰) Une suite (α_p) est une *suite de Cauchy* si $\lim\limits_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}} \|\alpha_p - \alpha_q\| = 0$. Une suite (α_p) *converge* vers α si $\lim\limits_{p\to\infty} \|\alpha - \alpha_p\| = 0$.

(¹¹) Démonstration dans [7], p. 87.

(¹²) [8], p. 68.

II. — DIVERSES TOPOLOGIES SUR L'ENSEMBLE DES DISTRIBUTIONS DE MASSES POSITIVES

6. — Définition des divers modes de convergence.

Nous emploierons un langage intuitif, et parlerons d'une distribution *variable* μ qui « tend », ou « converge » vers une distribution fixe μ_0, dite *limite* de la distribution μ. Derrière ce langage se cache la notion de *filtre* ; le lecteur désireux de l'approfondir pourra consulter le traité de N. Bourbaki ([18], chap. I). Le lecteur qu'une telle étude rebuterait se contentera, lorsque nous parlerons de limite d'une distribution *variable* μ, de penser au cas d'une *suite* de distributions $\mu_1, \ldots, \mu_p, \ldots$ dont on envisage la limite.

Mais il s'agit justement de préciser quand on dira qu'une distribution μ_0 est *limite* d'une distribution variable μ ; or, il y a plusieurs définitions possibles, non équivalentes ; chacune d'elles définit une *topologie* sur l'ensemble des mesures positives.

L'utilité que présente la considération de telles topologies tient à ceci : dans les problèmes qui se posent en théorie du potentiel, il faut souvent prouver l'*existence* (et aussi, en général, *l'unicité*) d'une distribution possédant certaines propriétés ; or, on prouve cette existence en « construisant » la distribution cherchée comme « limite » (dans un sens à préciser) de distributions connues.

Premier mode de convergence : convergence vague *des distributions positives quelconques.* — On dit que μ_0 est limite *vague* de μ variable si, pour chaque $f \in \mathcal{C}^+$, l'intégrale $\int f d\mu_0$ est limite de $\int f d\mu$. C'est le mode de convergence envisagé classiquement, le seul qu'utilisent, en général, les divers auteurs qui s'occupent de la théorie du potentiel. Mais son utilisation en vue des théorèmes d'existence nécessite un « principe de choix » (De La Vallée Poussin).

Si on identifie un point de l'espace R^n ($n \geqslant 2$) à la distribution formée d'une masse $+1$ en ce point, l'espace R^n est identifié à une partie de l'ensemble des distributions positives ; la convergence vague induit donc, sur R^n, un mode de convergence, qui d'ailleurs n'est autre que la convergence au sens de la topologie habituelle de R^n.

Remarque. — Si F est un sous-ensemble *fermé* de R^n, toute distribution μ_0 qui est limite vague de distributions portées par F, est elle-même portée par F ; autrement dit, l'ensemble des distributions portées par F constitue un sous-ensemble *fermé* (pour la topologie vague) de l'ensemble de toutes les distributions. Nous dirons : *vaguement fermé*.

Pour que μ converge vaguement vers μ_0, il *suffit* que l'on ait

$$\int U^\lambda d\mu_0 = \lim_{\mu} \int U^\lambda d\mu \tag{6, 1}$$

pour chaque « distribution sphérique » λ (voir lemme 3 du mémoire [7]). Cela tient au fait que l'ensemble $\mathfrak{D}$ (défini au n° 3) est *total* dans $\mathcal{C}^+$.

Deuxième mode de convergence : convergence fine *des distributions de la famille* $\mathfrak{M}$.

Ici, il s'agit seulement de distributions positives μ dont le potentiel n'est pas identiquement infini (cf. ci-dessus, n° 2). Alors l'intégrale $\int U^\lambda d\mu$ est *finie* pour toute $\lambda \in \mathfrak{L}$. Par définition, $\mu_0 \in \mathfrak{M}$ est *limite fine* de μ variable ($\mu \in \mathfrak{M}$) si on a

$$\int U^\lambda d\mu_0 = \lim_{\mu} \int U^\lambda d\mu \qquad \text{pour chaque } \lambda \in \mathfrak{L}. \tag{6, 2}$$

En particulier, cette relation a lieu pour chaque distribution sphérique λ, et la condition (6, 1) est donc remplie. Ainsi : *la convergence fine entraîne la convergence vague* (ou, comme on dit, elle est « plus fine » que la convergence vague, d'où précisément son nom).

A titre d'exemple, supposons qu'un potentiel U^μ ($\mu \in \mathfrak{M}$) soit limite d'une suite *croissante* de potentiels U^{μ_p} ; dans ces conditions, μ *est limite fine de la suite* (μ_p), et, à fortiori, limite *vague* de la suite (μ_p). En effet, on a évidemment

$$\int U^\mu d\lambda = \lim_{p \to \infty} \int U^{\mu_p} d\lambda \qquad \text{pour } \lambda \in \mathfrak{L},$$

ce qui s'écrit aussi

$$\int U^\lambda d\mu = \lim_{p \to \infty} \int U^\lambda d\mu_p \qquad \text{pour } \lambda \in \mathfrak{L}.$$

Si nous identifions, comme plus haut, chaque point de l'espace R^n à la distribution formée d'une masse $+1$ en ce point, l'espace R^n est identifié à une partie de $\mathfrak{M}$, et se trouve ainsi muni d'une *topologie fine*. En explicitant la définition, on voit que la topologie fine de R^n est la moins fine des topologies rendant continues [13] toutes

[13] Voir N. Bourbaki ([18], chap. 1).

les fonctions U^{λ} (où λ parcourt $\mathcal{L}$) ([13 bis]). Cette topologie joue un rôle important dans l'étude du problème de Dirichlet et des points « irréguliers » (voir notamment ci-dessous, paragraphe VI). La notion de limite, au sens de la topologie fine de R^n, a été récemment utilisée par Brelot sous le nom de *pseudo-limite*. (Voir [3] et, dans ce même fascicule du présent périodique, ses deux articles sur « le problème de Dirichlet ramifié » et l' « étude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques > 0 au voisinage d'un point-frontière irrégulier »).

Troisième mode de convergence : convergence forte *des distributions de la famille* $\mathcal{E}$.

Ici n'interviennent que les distributions positives *d'énergie finie*. Par définition, $\mu_0 \in \mathcal{E}$ est limite forte de μ variable ($\mu \in \mathcal{E}$) si la distance $\|\mu - \mu_0\|$, déduite de la norme dans $\mathcal{E}$, tend vers zéro.

Quatrième mode de convergence : convergence faible *des distributions de* $\mathcal{E}$.

C'est, par définition, la convergence faible au sens de la structure préhilbertienne de $\mathcal{E}$. Autrement dit, $\mu_0 \in \mathcal{E}$ est limite faible de μ variable ($\mu \in \mathcal{E}$) si : 1° $\|\mu\|$ reste bornée ; 2° pour chaque $\nu \in \mathcal{E}$, le produit scalaire (μ_0, ν) est limite de (μ, ν).

7. — Comparaison des divers modes de convergence.

Il ne peut, bien entendu, être question de comparer deux modes de convergence que sur un ensemble de distributions où ils sont tous deux définis. Nous avons déjà vu que, sur $\mathcal{M}$, *la convergence fine entraîne la convergence vague*. D'autre part, sur $\mathcal{E}$, *la convergence forte entraîne la convergence faible* ; c'est là une propriété classique des espaces hilbertiens, et elle résulte immédiatement de l'inégalité (5, 1), dite « de Schwarz ».

En outre, sur $\mathcal{E}$, *la convergence faible entraîne la convergence fine*, car si μ_0 est limite faible de μ, on a en particulier

$$(\mu_0, \lambda) = \lim (\mu, \lambda) \qquad \text{pour toute } \lambda \in \mathcal{L},$$

(puisque $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$), ce qui n'est autre chose que la condition (6, 2).

([13 bis]) On verra au n° 26 que la topologie fine de R^n rend aussi *continus* tous les potentiels sans exception.

On peut résumer schématiquement une partie de ces résultats :

Sur $\mathcal{E}$, forte $\rightarrow$ faible $\rightarrow$ fine $\rightarrow$ vague.

Mais il y a plus : plaçons-nous sur une *boule* de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire sur l'ensemble des $\mu \in \mathcal{E}$ telles que $\|\mu\|$ soit majoré par un nombre fini fixe. Je dis que, dans ces conditions, les trois modes de convergence

faible, fine, vague

sont *identiques*. Il suffit de montrer que, sur une boule de $\mathcal{E}$, la convergence vague de μ vers μ_0 entraîne la convergence faible de μ vers μ_0. Or, ce fait se trouve démontré dans mon mémoire [7] (p. 90, réciproque de la proposition 3).

Enfin, considérons une *suite de Cauchy* formée d'éléments μ_p de $\mathcal{E}$. Pour qu'une μ_0 soit limite forte des μ_p, il faut et il suffit que μ_0 soit limite faible des μ_p (propriété valable dans tout espace préhilbertien ; cf. [7], p. 88) ; d'après ce qu'on vient de voir, il revient au même de dire que μ_0 est limite vague de la suite (μ_p). Or on montre précisément qu'il existe toujours une limite vague par une suite de Cauchy formée d'éléments de $\mathcal{E}$ ([7], p. 91). Il en résulte : toute suite de Cauchy, sur $\mathcal{E}$, converge fortement vers un élément de $\mathcal{E}$. Autrement dit, l'espace $\mathcal{E}$ est *complet* pour la norme ([14]).

C'est là un résultat fondamental pour toute la théorie. La suite de ce travail montrera le parti qu'on en peut tirer : les principaux théorèmes d'existence en découlent.

Signalons en passant : si U^μ ($\mu \in \mathcal{E}$) est limite d'une suite *croissante* de U^{μ_p}, μ est limite *forte* des μ_p ; en effet, la suite (μ_p) est une suite de Cauchy (car, pour $U^{\mu_p} \leqslant U^{\mu_q}$, on a $\|\mu_p - \mu_q\|^2 \leqslant \|\mu_q\|^2 - \|\mu_p\|^2$, et la relation

$$\int U^\mu d\nu = \lim_{p\to\infty} \int U^{\mu_p} d\nu \qquad \text{pour toute } \nu \in \mathcal{E},$$

prouve que μ est limite faible de la suite (μ_p) ; d'où le résultat. Il précise celui donné plus haut : en supposant seulement $\mu \in \mathfrak{M}$, et U^μ limite croissante des U^{μ_p}, on trouvait que μ était limite *fine* de la suite (μ_p).

([14]) Mais ce serait une erreur de croire que $\bar{\mathcal{E}}$ soit complet. A ce sujet, voir une Note récente de J. Deny (*Comptes Rendus*, 222, 1946, p. 1374-1376).

III. — BALAYAGE D'UNE DISTRIBUTION D'ÉNERGIE FINIE

8. — Principe général.

Nous voulons aborder les problèmes de balayage par le cas où la distribution μ étudiée est *d'énergie finie*, de manière à pouvoir faire usage de la convergence forte, et utiliser le fait que l'espace $\mathcal{E}$ (nº 5) est *complet*. Il en résulte que tout sous-ensemble *fermé* de $\mathcal{E}$ est complet (fermé s'entendant au sens de la convergence forte).

Nous mettrons à la base le principe général suivant, qui utilise seulement le fait que $\mathcal{E}$ est une partie *convexe* d'un espace préhilbertien, et *complète* au sens de la norme :

Principe (15) : étant donné un sous-ensemble $\mathcal{F}$ *fermé convexe* (16), non vide, de $\mathcal{E}$, et un point μ de $\mathcal{E}$, il existe, dans $\mathcal{F}$, un point $\mu_{\mathcal{F}}$ *et un seul* qui minimise la distance au point μ ; autrement dit, tel que

$$\|\mu-\nu\|>\|\mu-\mu_{\mathcal{F}}\| \qquad \text{pour tout } \nu\in\mathcal{F} \text{ tel que } \nu\neq\mu_{\mathcal{F}}.$$

C'est là un théorème bien connu, dont la démonstration, fort simple, remonte essentiellement à F. Riesz. Elle repose sur la propriété classique du triangle en géométrie euclidienne : étant donnés 3 points μ, α, β, et le milieu γ du segment de droite joignant α et β, on a

$$(8,\ 1)\qquad \|\mu-\alpha\|^2+\|\mu-\beta\|^2=2\|\mu-\gamma\|^2+\frac{1}{2}\|\alpha-\beta\|^2.$$

Alors, μ étant donné, ainsi que le sous-ensemble fermé convexe $\mathcal{F}$, soit m la borne inférieure de $\|\mu-\alpha\|$ lorsque α parcourt $\mathcal{F}$; m se nommera la *distance* de μ à $\mathcal{F}$. Si $\alpha\in\mathcal{F}$ et $\beta\in\mathcal{F}$ sont tels que

$$\|\mu-\alpha\|^2\leqslant m^2+a, \qquad \|\mu-\beta\|^2\leqslant m^2+a \qquad (a>0),$$

on a $\gamma\in\mathcal{F}$ (puisque $\mathcal{F}$ est convexe), d'où $\|\mu-\gamma\|\geqslant m$, et par suite, d'après (8, 1),

$$(8,\ 2)\qquad \|\alpha-\beta\|^2\leqslant 4a.$$

(15) J'ai utilisé ce principe en théorie du potentiel dès mon mémoire [6] (p. 91 du mémoire).

(16) Pour un ensemble convexe, on sait que les deux propriétés de *fortement fermé* et de *faiblement fermé* sont équivalentes.

Toute suite (α_p) telle que $\|\mu - \alpha_p\|$ tende vers m est donc une suite de Cauchy, et par conséquent elle converge fortement vers un élément $\mu_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$, tel que $\|\mu - \mu_{\mathcal{F}}\| = m$; et c'est le seul élément de $\mathcal{F}$ dont la distance à μ soit égale à m, à cause de (8, 2).

Le point $\mu_{\mathcal{F}}$ ainsi défini s'appellera la *projection* de μ sur $\mathcal{F}$. Voyons comment cette projection varie quand varie $\mathcal{F}$, μ restant fixe.

PROPOSITION 3. — *Si $\mathcal{F}$, supposé non vide, est l'intersection d'une suite décroissante d'ensembles fermés convexes $\mathcal{F}_p$* (ou, plus généralement, l'intersection d'une *famille filtrante décroissante* [17] d'ensembles fermés convexes), *la projection de μ sur $\mathcal{F}$ est limite forte des projections de μ sur les $\mathcal{F}_p$.*

PROPOSITION 3 *bis*. — *Si $\mathcal{F}$ est l'adhérence* [18] *de la réunion d'une suite croissante d'ensembles fermés convexes non vides $\mathcal{F}_p$* (ou, plus généralement, l'adhérence de la réunion d'une *famille filtrante croissante* d'ensembles fermés convexes), *la projection de μ sur $\mathcal{F}$ est limite forte des projections de μ sur les $\mathcal{F}_p$.*

Démontrons, par exemple, la proposition 3, en raisonnant, pour fixer les idées, dans le cas d'une *suite* décroissante d'ensembles $\mathcal{F}_p$. Soit m_p la distance de μ à l'ensemble $\mathcal{F}_p$, et notons (pour simplifier) μ_p la projection de μ sur $\mathcal{F}_p$. La suite (m_p) est croissante, et majorée par la distance m de μ à $\mathcal{F}$. Or, pour $p > q$ ($\mathcal{F}_p \subset \mathcal{F}_q$) on a, d'après la relation (8, 1) appliquée à $\alpha = \mu_p$, $\beta = \mu_q$ (d'où $\gamma \in \mathcal{F}_q$),

$$\frac{1}{2}\|\mu_p - \mu_q\|^2 \leqslant (m_p)^2 - (m_q)^2.$$

Donc la suite (μ_p) est une *suite de Cauchy* ; par suite, elle converge fortement vers un point ν tel que

$$\|\mu - \nu\| = \lim_p \|\mu - \mu_p\| = \lim_p m_p \leqslant m.$$

Or ν est limite d'éléments de $\mathcal{F}_p$, et cela pour tout p ; donc ν appar-

[17] Une famille d'ensembles $\mathcal{F}_p$ (où p parcourt un ensemble d'indices I absolument quelconque) est dite *filtrante décroissante* si, quels que soient les indices p et q dans I, il existe dans I un indice r tel que $\mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}_p$ et $\mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}_q$. Définition analogue pour une famille *filtrante croissante*, le signe $\subset$ étant remplacé par $\supset$. Définition analogue pour une famille filtrante de *fonctions numériques*, le signe $\subset$ (ou $\supset$) étant remplacé par $\leqslant$ (ou $\geqslant$).

[18] Conformément à la terminologie de N. BOURBAKI, l'*adhérence* d'un ensemble A désigne le plus petit ensemble fermé contenant A.

tient à tous les $\mathcal{F}_p$, c'est-à-dire à $\mathcal{F}$. Puisque $\|\mu-\nu\| \leqslant m$, il s'ensuit que ν est la projection de μ sur $\mathcal{F}$.

On démontrerait d'une manière analogue la proposition 3 *bis*.

Corollaire : dans le cas de la proposition 3 comme dans celui de la proposition 3 *bis*, *la distance de μ à $\mathcal{F}$ est égale à la limite de la distance de μ à $\mathcal{F}_p$.*

9. — Caractérisation de la distribution minimisante.

Pour qu'un élément ν de $\mathcal{E}$ soit égal à $\mu_{\mathcal{F}}$, *il faut et il suffit que le produit scalaire* $(\mu-\nu, \lambda-\nu)$ *soit* $\leqslant 0$ *pour tout* $\lambda \in \mathcal{F}$ (en langage géométrique d'espace de Hilbert : les deux vecteurs $\mu-\nu$ et $\lambda-\nu$ doivent faire un angle obtus ou droit). En effet, écrivons

$$\|\mu-\lambda\|^2 \geqslant \|\mu-\nu\|^2 \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathcal{F},$$

ce qui équivaut à

$$(9, 1) \qquad 2(\mu-\nu, \lambda-\nu) \leqslant \|\lambda-\nu\|^2 \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathcal{F}.$$

Tout point λ' tel que $\lambda'-\nu = k(\lambda-\nu)$ (où $0 < k \leqslant 1$) appartient encore à $\mathcal{F}$, puisque $\mathcal{F}$ est convexe ; (9, 1) entraîne donc

$$2k(\mu-\nu, \lambda-\nu) \leqslant k^2 \|\lambda-\nu\|^2 \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathcal{F} \text{ et tout } k \leqslant 1,$$

ce qui donne, en divisant par k et faisant tendre k vers 0,

$$(9, 2) \qquad (\mu-\nu, \lambda-\nu) \leqslant 0 \qquad \text{pout tout } \lambda \in \mathcal{F}.$$

Réciproquement, (9, 2) entraîne évidemment (9, 1). Ainsi, la condition

$$(9, 3) \qquad (\mu-\mu_{\mathcal{F}}, \lambda-\mu_{\mathcal{F}}) \leqslant 0 \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathcal{F}$$

caractérise la projection $\mu_{\mathcal{F}}$ parmi toutes les distributions de $\mathcal{F}$.

Transformons cette condition en faisant désormais sur $\mathcal{F}$ l'hypothèse supplémentaire (qui sera toujours vérifiée dans les applications que nous ferons) : $\mathcal{F}$ *contient l'élément* 0, *et la somme de deux éléments de* $\mathcal{F}$ *est un élément de* $\mathcal{F}$. Alors, si $\nu \in \mathcal{F}$, $\lambda = \mu_{\mathcal{F}} + \nu$ appartient à $\mathcal{F}$, d'où, d'après (9, 3),

$$(a) \qquad (\mu-\mu_{\mathcal{F}}, \nu) \leqslant 0 \qquad \text{pour tout } \nu \in \mathcal{F} ;$$

d'autre part, pour $\lambda = 0$, (9, 3) donne $(\mu-\mu_{\mathcal{F}}, \mu_{\mathcal{F}}) \geqslant 0$, ce qui, compte tenu de (a), donne

(b) $$(\mu - \mu_{\mathcal{F}}, \mu_{\mathcal{F}}) = 0.$$

Réciproquement, (a) et (b) entraînent évidemment (9, 3); par suite *l'ensemble des conditions* (a) *et* (b) *caractérise* $\mu_{\mathcal{F}}$ *parmi toutes les distributions de* $\mathcal{F}$, moyennant les hypothèses faites sur $\mathcal{F}$.

Cela va nous permettre de comparer $\mu_{\mathcal{F}}$ et $\mu_{\mathcal{F}'}$ lorsque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux ensembles satisfaisant aux conditions ci-dessus. Je dis que l'on a

(9, 4) $$\| \mu_{\mathcal{F}} - \mu_{\mathcal{F}'} \|^2 \leqslant \| \mu_{\mathcal{F}} \|^2 - \| \mu_{\mathcal{F}'} \|^2 \qquad \text{pour } \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}.$$

En effet, cela revient à

$$(\mu_{\mathcal{F}}, \mu_{\mathcal{F}'}) \geqslant \| \mu_{\mathcal{F}'} \|^2 \qquad \text{pour } \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}.$$

Or

$$(\mu_{\mathcal{F}}, \mu_{\mathcal{F}'}) = (\mu_{\mathcal{F}} - \mu, \mu_{\mathcal{F}'}) + (\mu, \mu_{\mathcal{F}'});$$

et, d'après (b) appliqué à $\mathcal{F}'$,

$$(\mu, \mu_{\mathcal{F}'}) = \| \mu_{\mathcal{F}'} \|^2,$$

tandis que, d'après (a) appliqué à $\mathcal{F}$ et à la distribution $\nu = \mu_{\mathcal{F}'} \in \mathcal{F}$,

$$(\mu_{\mathcal{F}} - \mu, \mu_{\mathcal{F}'}) \geqslant 0;$$

d'où l'inégalité à démontrer.

Pour terminer, indiquons une *forme équivalente du problème du minimum* qui vient d'être traité. Introduisons la quantité

$$I_\mu(\nu) = (\nu - 2\mu, \nu)$$

qui, en théorie du potentiel, s'explicite comme suit

$$I_\mu(\nu) = \int (U^\nu - 2U^\mu)\, d\nu.$$

On a

$$\| \mu - \nu \|^2 = I_\mu(\nu) + \| \mu \|^2,$$

et par suite, lorsque μ est donné, la recherche du minimum de $\| \mu - \nu \|$ revient à la recherche du minimum de $I_\mu(\nu)$ lorsque ν parcourt $\mathcal{F}$. Le minimum est égal à

$$I_\mu(\mu_{\mathcal{F}}) = (\mu_{\mathcal{F}} - 2\mu, \mu_{\mathcal{F}}),$$

ce qui, compte tenu de (b), donne

$$I_\mu(\mu_{\mathcal{F}}) = -\| \mu_{\mathcal{F}} \|^2 = -(\mu, \mu_{\mathcal{F}}).$$

Introduisons la quantité

$$(9, 5) \qquad c_\mu(\mathcal{F}) = \|\mu_{\mathcal{F}}\|^2 = (\mu, \mu_{\mathcal{F}})\,;$$

alors le minimum de $I_\mu(\nu)$ est égal à $-c_\mu(\mathcal{F})$, et la relation (9, 4) s'écrit

$$(9, 6) \qquad \|\mu_{\mathcal{F}} - \mu_{\mathcal{F}'}\|^2 \leqslant c_\mu(\mathcal{F}) - c_\mu(\mathcal{F}') \qquad \text{pour } \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}.$$

Il en résulte que, si $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, on a $c_\mu(\mathcal{F}') \leqslant c_\mu(\mathcal{F})$, et si l'égalité $c_\mu(\mathcal{F}) = c_\mu(\mathcal{F}')$ a lieu, on a nécessairement $\mu_{\mathcal{F}} = \mu_{\mathcal{F}'}$.

Si $\mathcal{F}$ est l'intersection d'une famille *filtrante décroissante* d'ensembles $\mathcal{F}_p$, $c_\mu(\mathcal{F})$ est égal à la *borne inférieure* de la famille (filtrante décroissante) des $c_\mu(\mathcal{F}_p)$, d'après la proposition 3 ; de même, si $\mathcal{F}$ est l'adhérence de la réunion d'une famille *filtrante croissante* d'ensemble $\mathcal{F}_p$, $c_\mu(\mathcal{F})$ est égal à la *borne supérieure* de la famille (filtrante croissante) des $c_\mu(\mathcal{F}_p)$.

10. — Balayage d'une distribution d'énergie finie : cas d'un ensemble compact.

Nous allons définir plusieurs sortes de balayages ; tout d'abord, le balayage sur un ensemble *compact*.

Soit K un ensemble compact de l'espace euclidien R^n $(n \geqslant 3)$ (resp. du cercle $|z| \leqslant 1$ si $n = 2$). Considérons l'ensemble $\mathcal{E}_K$ des distributions positives d'énergie finie *portées par* K ; il est convexe et fermé (car, étant *vaguement* fermé, il est, a fortiori, *fortement fermé*). Nous pouvons appliquer à $\mathcal{E}_K$ le principe général des n^{os} 8 et 9, principe qui vaut pour tout sous-ensemble fermé convexe de $\mathcal{E}$. Pour chaque $\mu \in \mathcal{E}$, nous noterons μ_K la « projection » de μ sur $\mathcal{E}_K$; la distribution μ_K, qui est portée par K, est dite *obtenue par balayage* de μ sur l'ensemble K. Pour la caractériser parmi toutes les distributions de $\mathcal{E}_K$, exprimons les conditions (a) et (b) du n° 9 ; elles s'écrivent ici

$$\text{(a)} \qquad \int (U^{\mu_K} - U^\mu)\, d\lambda \geqslant 0 \qquad \text{pour toute distribution } \lambda \in \mathcal{E}_K\,;$$

$$\text{(b)} \qquad \int (U^{\mu_K} - U^\mu)\, d\mu_K = 0.$$

(a) entraîne : l'ensemble des points $x \in K$ où $U^\mu(x) < U^{\mu_K}(x)$ est de mesure nulle pour toute distribution ν de $\mathcal{E}_K$; car si $\nu \in \mathcal{E}_K$, soit λ la restriction de ν à cet ensemble; on a $\lambda \in \mathcal{E}_K$, et (a) prouve que l'ensemble envisagé est de mesure nulle pour λ, donc pour ν.

Nous dirons (définition provisoire, qui sera reprise au n° 16) qu'une propriété des points de l'espace euclidien a lieu *à peu près partout sur* K (en abrégé : à p. p. p. sur K) si l'ensemble des points de K où elle n'a pas lieu est de *mesure nulle pour toute distribution d'énergie finie.* On vient de prouver que l'on a $U^{\mu}(x) \geqslant U^{\mu_K}(x)$ à peu près partout sur K.

Mais (b) prouve alors que l'on a $U^{\mu_K}(x) = U^{\mu}(x)$ sur un noyau de μ_K, et par suite (cf. fin du n° 5) $U^{\mu_K}(x) \leqslant U^{\mu}(x)$ en tout point sans exception. Résumons :

On a $U^{\mu_K}(x) \leqslant U^{\mu}(x)$ *partout, et* $U^{\mu_K}(x) = U^{\mu}(x)$ *à peu près partout sur* K.

Ces conditions sont caractéristiques pour μ_K (parmi les distributions de $\mathcal{E}_K$), car elles entraînent (a) et (b); d'une façon plus précise, elles entraînent

$$\int (U^{\mu_K} - U^{\mu})d\lambda = 0 \qquad \text{pour toute } \lambda \in \mathcal{E}_K,$$

ce qui s'écrit encore, en notation de produit scalaire,

$$(10, 1) \qquad (\mu_K - \mu, \lambda) = 0 \qquad \text{pour toute } \lambda \in \mathcal{E}_K.$$

Cette relation exprime, en langage géométrique d'espace hilbertien, que le « vecteur » $\mu - \mu_K$ est « orthogonal » au sous-espace vectoriel (de $\mathcal{E}$) engendré par $\mathcal{E}_K$; autrement dit, μ_K est le « pied de la perpendiculaire » menée de μ sur ce sous-espace vectoriel.

11. — Balayage intérieur et extérieur pour un ensemble quelconque.

Envisageons maintenant, au lieu d'un ensemble compact K, un ensemble *quelconque* A. Nous allons définir, relativement à A, deux modes de balayages ; chacun d'eux correspondra à un sous-ensemble *fermé convexe* de $\mathcal{E}$, défini en fonction de A.

1) *Balayage intérieur* ([19]) : on prend pour $\mathcal{F}$ l'ensemble, que nous noterons $\mathcal{E}^i_A$, adhérence forte (dans $\mathcal{E}$) de l'ensemble des distribu-

([19]) Le « balayage intérieur » a, sous un autre nom, été envisagé par F. VASILESCO [17], par des procédés assez compliqués qui font intervenir la notion préalable de *point irrégulier* ; en outre, cet auteur supposait A borné et U^{μ} borné.

tions de $\mathcal{E}$ *portées par* A. On vérifie sans peine que $\mathcal{E}_A^i$ est aussi l'adhérence forte de la réunion des $\mathcal{E}_K$ relatifs aux compacts K contenus dans A. Pour chaque $\mu \in \mathcal{E}$, on notera μ_A^i la « projection » de μ sur $\mathcal{E}_A^i$, et on dira que μ_A^i est obtenue par balayage intérieur de μ relativement à l'ensemble A. Cette distribution μ_A^i n'est pas nécessairement portée par A; on peut seulement affirmer que toute distribution de $\mathcal{E}_A^i$ est portée par l'adhérence $\bar{A}$ de A, mais cette propriété ne suffit pas à caractériser les distributions de la famille $\mathcal{E}_A^i$. La signification de cette famille s'éclaircira plus tard avec la notion de « point intérieurement régulier », qu'elle contient en germe (voir n° 23).

2) *Balayage extérieur :* on prend pour $\mathcal{F}$ l'ensemble, que nous noterons $\mathcal{E}_A^e$, intersection des ensembles $\mathcal{E}_B^i$ relatifs aux ensembles *ouverts* B contenant A. C'est bien un sous-ensemble fermé convexe de $\mathcal{E}$. Pour chaque $\mu \in \mathcal{E}$, on notera μ_A^e la « projection » de μ sur $\mathcal{E}_A^e$, et on dira que μ_A^e est obtenue par balayage extérieur de μ relativement à l'ensemble A. La distribution μ_A^e, comme toutes celles de $\mathcal{E}_A^e$, est portée par $\bar{A}$, car elle est portée par l'adhérence $\bar{B}$ de n'importe quel ouvert B contenant A. La signification de la famille $\mathcal{E}_A^e$ s'éclaircira avec la notion de « point extérieurement régulier ».

Il est clair que les distributions μ de $\mathcal{E}_A^i$ (resp. de $\mathcal{E}_A^e$) sont précisément celles telles que $\mu = \mu_A^i$ (resp. $\mu = \mu_A^e$).

D'autre part, si $A \subset B$, on a $\mathcal{E}_A^i \subset \mathcal{E}_B^i$ et $\mathcal{E}_A^e \subset \mathcal{E}_B^e$. On en déduit aussitôt $\mathcal{E}_A^i \subset \mathcal{E}_A^e$ pour tout ensemble A. Lorsque les familles $\mathcal{E}_A^i$ et $\mathcal{E}_A^e$ sont identiques, on les note $\mathcal{E}_A$ simplement; on a alors $\mu_A^i = \mu_A^e$ pour toute μ, et on note μ_A l'unique distribution balayée. Ceci est le cas, notamment, lorsque A est *ouvert*, d'après les définitions; c'est aussi le cas lorsque A est *fermé*, car alors $\mathcal{E}_A^i$ n'est autre que l'ensemble (fermé) des distributions portées par A, et d'autre part, on a vu que toute distribution de $\mathcal{E}_A^e$ est portée par $\bar{A}$, donc ici par A, d'où

$$\mathcal{E}_A^e \subset \mathcal{E}_A^i. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

12. — Propriétés des distributions balayées.

Appliquons les propositions 3 et 3 *bis* (n° 8) aux familles $\mathcal{E}_A^e$ et $\mathcal{E}_A^i$ respectivement. Tout d'abord, puisque $\mathcal{E}_A^i$ est l'adhérence de la réunion des $\mathcal{E}_K$ relatifs aux compacts K contenus dans A, la proposition 3 *bis* montre que μ_A^i *est limite forte des distributions* μ_K *relatives* *aux compacts* K *contenus dans* A. Cela signifie, d'une façon précise : pour tout $a > 0$ existe un compact $H \subset A$ tel que, pour tout compact K tel que $H \subset K \subset A$, on ait $\|\mu_A^i - \mu_K\| \leqslant a$.

Pour une raison analogue, μ_A^e *est limite forte des* μ_B *relatives aux ouverts* B *contenant* A.

Notons encore ceci : si un compact K est l'intersection d'une suite décroissante de compacts K_p (ou, plus généralement, d'une famille filtrante décroissante de compacts), $\mathcal{E}_K$ est l'intersection des $\mathcal{E}_{K_p}$, donc μ_K *est limite forte des* μ_{K_p}. De même, si un ouvert B est réunion d'une suite croissante d'ouverts B_p (ou, plus généralement, d'une famille filtrante croissante), $\mathcal{E}_B$ est l'adhérence de la réunion des $\mathcal{E}_{B_p}$, donc μ_B *est limite forte des* μ_{B_p}.

Soit de nouveau A un ensemble quelconque. On a vu (n° 10) que, pour tout compact K contenu dans A, on a partout $U^{\mu_K}(x) \leqslant U^{\mu}(x)$. A la limite [20], il vient

$$(12, 1) \qquad U^{\mu_A^i}(x) \leqslant U^{\mu}(x) \text{ partout.}$$

Ce résultat étant acquis, on a, pour tout ouvert B contenant A, $U^{\mu_B}(x) \leqslant U^{\mu}(x)$, d'où, à la limite,

$$(12, 2) \qquad U^{\mu_A^e}(x) \leqslant U^{\mu}(x) \text{ partout.}$$

Nous caractériserons la distribution μ_A^i, parmi toutes les distributions de $\mathcal{E}_A^i$, en exprimant les conditions (a) et (b) du n° 9, qui s'écrivent ici

$$\text{(a)} \qquad \int (U^{\mu_A^i} - U^{\mu})d\lambda \geqslant 0 \qquad \text{pour toute } \lambda \in \mathcal{E}_A^i,$$

$$\text{(b)} \qquad \int (U^{\mu_A^i} - U^{\mu})d\mu_A^i = 0.$$

Compte tenu de (12, 1), (a) donne

$$\int (U^{\mu_A^i} - U^{\mu})d\lambda = 0 \qquad \text{pour toute } \lambda \in \mathcal{E}_A^i,$$

condition qui entraîne d'ailleurs (b). En notation de produit scalaire :

$$(12, 3) \qquad (\mu_A^i - \mu, \lambda) = 0 \qquad \text{pour toute } \lambda \in \mathcal{E}_A^i.$$

[20] μ_A^i est limite vague des μ_K (cf. n° 7), et par suite, d'après une propriété classique,

$$U^{\mu_A^i}(x) \leqslant \liminf U^{\mu_K}(x)$$

en chaque point x.

On démontre de même

$$(12, 4) \qquad (\mu_A^e - \mu, \lambda) = 0 \qquad \text{pour toute } \lambda \in \mathcal{E}_A^e.$$

Les conditions caractéristiques (12, 3) et (12, 4) expriment que μ_A^i (resp. μ_A^e) est le pied de la perpendiculaire menée de μ sur le sous-espace vectoriel (de $\overline{\mathcal{E}}$) engendré par $\mathcal{E}_A^i$ (resp. par $\mathcal{E}_A^e$).

De là résulte d'abord la *transitivité* de l'opération de balayage : si A et B sont deux ensembles quelconques tels que $A \subset B$, μ_A^i s'obtient par balayage intérieur de μ_B^i relativement à A, μ_A^e s'obtient par balayage extérieur de μ_B^e relativement à A, et enfin μ_A^i s'obtient par balayage intérieur de μ_A^e relativement à A. En effet, cela résulte des relations $\mathcal{E}_A^i \subset \mathcal{E}_B^i$, $\mathcal{E}_A^e \subset \mathcal{E}_B^e$, $\mathcal{E}_A^i \subset \mathcal{E}_A^e$, et de la transitivité de l'opération qui consiste à projeter un point orthogonalement sur un sous-espace vectoriel.

En outre, μ_A^i et μ_A^e sont des fonctions *linéaires* de μ [et, en particulier, *additives* : $(\mu+\nu)_A^i = \mu_A^i + \nu_A^i$, $(\mu+\nu)_A^e = \mu_A^e + \nu_A^e$] ; et ce sont des fonctions *continues* de μ pour la topologie forte, car, d'une façon précise,

$$(12, 5) \qquad \|\mu_A^i - \nu_A^i\| \leqslant \|\mu_A^e - \nu_A^e\| \leqslant \|\mu - \nu\|.$$

13. — Une caractérisation des potentiels des distributions balayées.

Proposition 4. — *Le potentiel de μ_A^i est, parmi les potentiels des distributions de $\mathcal{E}_A^i$, le plus grand de ceux qui sont partout $\leqslant U^\mu$.*

Il suffit de montrer : si $\nu \in \mathcal{E}_A^i$, et si $U^\nu(x) \leqslant U^\mu(x)$ partout, on a $U^\nu(x) \leqslant U^{\mu_A^i}(x)$ partout. Or, d'après (12, 3), on a $U^{\mu_A^i}(x) = U^\mu(x)$ sur un noyau de ν, donc l'inégalité $U^\nu(x) \leqslant U^{\mu_A^i}(x)$ a lieu sur un noyau de ν, et par suite partout (cf. fin du n° 5).

On démontre de la même manière :

Proposition 4 *bis*. — *Le potentiel de μ_A^e est, parmi les potentiels des distributions de $\mathcal{E}_A^e$, le plus grand de ceux qui sont partout $\leqslant U^\mu$.*

Comme conséquence de ces propositions, on voit que si μ et ν sont deux distributions de $\mathcal{E}$ telles que $U^\mu \leqslant U^\nu$ partout, on a partout

$$U^{\mu_A^i} \leqslant U^{\nu_A^i}, \qquad U^{\mu_A^e} \leqslant U^{\nu_A^e}.$$

Si on a une suite de distributions $\mu_p \in \mathcal{E}$, dont les potentiels forment une suite *croissante* de limite U^{μ} (telle que $\mu \in \mathcal{E}$), alors les potentiels des distributions balayées $(\mu_p)^i_A$ [resp. $(\mu_p)^e_A$] forment une suite *croissante* dont la limite est précisément le potentiel de μ^i_A (resp. de μ^e_A) ; en effet, μ est limite forte des μ_p (cf. fin du n° 7), donc μ^i_A est limite forte des $(\mu_p)^i_A$, et μ^e_A limite forte des $(\mu_p)^e_A$.

D'autre part, les propositions 4 et 4 *bis* entraînent :

Si $A \subset B$, on a $U^{\mu^i_A} \leqslant U^{\mu^i_B}$, $U^{\mu^e_A} \leqslant U^{\mu^e_B}$ partout ; en outre, pour tout ensemble A,

$$U^{\mu^i_A} \leqslant U^{\mu^e_A} \text{ partout.}$$

IV. — APPLICATION A LA THÉORIE DE LA CAPACITÉ

14. — Capacités ; distributions capacitaires.

Supposons que la distribution $\mu \in \mathcal{E}$ que l'on veut balayer jouisse, vis-à-vis de l'ensemble A considéré, de la propriété suivante : on a $U^{\mu}(x) = 1$ sauf sur un ensemble qui est de mesure nulle pour toute distribution de $\mathcal{E}^i_A$ (resp. de $\mathcal{E}^e_A$). Alors l'intégrale $I_{\mu}(\nu)$ à minimiser est égale à

$$\int (U^{\nu} - 2)d\nu \qquad \text{pour } \nu \in \mathcal{E}^i_A \text{ (resp. pour } \nu \in \mathcal{E}^e_A).$$

C'est la célèbre *intégrale de Gauss* : elle est indépendante de la μ particulière choisie (si une telle μ existe). Donc la distribution balayée μ^i_A (resp. μ^e_A) ne dépend pas non plus de μ ; nous la noterons γ^i_A (resp. γ^e_A), et l'appellerons la *distribution capacitaire intérieure* (resp. *distribution capacitaire extérieure*) de l'ensemble A. Elle n'est pas portée par A, en général, mais par son adhérence $\bar{A}$. Le potentiel de γ^i_A (resp. de γ^e_A) est égal à 1 sauf sur un ensemble qui est de mesure nulle pour toute distribution de $\mathcal{E}^i_A$ (resp. de $\mathcal{E}^e_A$) ; il est d'ailleurs partout $\leqslant 1$.

Les définitions précédentes ne valent qu'à la condition qu'il existe au moins une distribution μ satisfaisant à la condition posée. Nous dirons que A satisfait à la condition Cp^i (resp. à la condition Cp^e) s'il existe une distribution $\mu \in \mathcal{E}$ telle que $U^{\mu}(x) = 1$ sauf sur un ensemble qui est de mesure nulle pour toute distribution de $\mathcal{E}^i_A$ (resp. de $\mathcal{E}^e_A$) ; la distribution capacitaire γ^i_A (resp. γ^e_A) satisfait alors, en particulier, à cette condition. Par exemple, tout ensemble *borné* A satisfait aux conditions Cp^i et Cp^e : il suffit de prendre pour μ une

« distribution sphérique » de masse totale convenable, portée par une sphère contenant l'adhérence $\bar{A}$ de A (méthode de DE LA VALLÉE POUSSIN pour la distribution capacitaire d'un ensemble compact).

Lorsque A satisfait à Cp^i, la valeur commune de $\|\gamma_A^i\|^2$ et de $\int d\gamma_A^i$ se note $c^i(A)$ [cf. la définition de $c_\mu(\mathcal{F})$, formule (9, 5)]; on l'appelle la *capacité intérieure* de A. De même, lorsque A satisfait à Cp^e, la valeur commune de $\|\gamma_A^e\|^2$ et de $\int d\gamma_A^e$ se note $c^e(A)$ et s'appelle la *capacité extérieure* de A. L'inégalité (9, 4), appliquée à $\mathcal{F} = \mathcal{E}_A^e$ et $\mathcal{F}' = \mathcal{E}_A^i$, donne ici

$$(14, 1) \qquad \|\gamma_A^i - \gamma_A^e\|^2 \leqslant c^e(A) - c^i(A);$$

on a même, à vrai dire, l'égalité. On voit que $c^i(A) \leqslant c^e(A)$, et que si l'égalité est atteinte, les deux distributions capacitaires γ_A^i et γ_A^e sont identiques. Dans ce cas, on note γ_A l'unique distribution capacitaire, et on note $c(A)$ la valeur commune de $c^i(A)$ et $c^e(A)$, qui prend le nom de *capacité* (tout court) de l'ensemble A. Lorsque $\mathcal{E}_A^i = \mathcal{E}_A^e$, on est sûr que $\gamma_A^i = \gamma_A^e$, et par suite $c^i(A) = c^e(A)$; c'est notamment le cas si A est *ouvert* (21) ou *fermé* (22).

D'après la fin du n° 9 et les résultats du n° 12, on voit que : $c^i(A)$ est égale à la borne supérieure des capacités $c(K)$ des compacts K contenus dans A; $c^e(A)$ est égale à la borne inférieure des capacités $c(B)$ des ouverts B contenant A; si un compact K est l'intersection d'une famille filtrante *décroissante* de compacts K_p, $c(K)$ est égale à la borne inférieure des $c(K_p)$; si un ouvert B est la réunion d'une famille filtrante *croissante* d'ouverts B_p et satisfait à la condition Cp^e, $c(B)$ est égale à la borne supérieure des $c(B_p)$.

La capacité intérieure $c^i(A)$ n'a encore été définie que pour les ensembles A satisfaisant à la condition Cp^i; elle est donc toujours *finie*, puisque $c^i(A) = \|\gamma_A^i\|^2$. Mais nous pouvons maintenant donner, de $c^i(A)$, une nouvelle définition qui soit valable pour *tout* ensemble A : la capacité intérieure $c^i(A)$ sera, par définition, la *borne supérieure des capacités des ensembles compacts contenus dans* A (23). Cette

(21) La distribution capacitaire d'un ensemble ouvert a été considérée en premier lieu par DE LA VALLÉE POUSSIN, au moins dans le cas d'un ensemble ouvert borné ([16], p. 685).

(22) Cas classique envisagé depuis longtemps; on a étudié initialement le cas des ensembles fermés bornés à frontière suffisamment régulière.

(23) C'est au fond la définition de DE LA VALLÉE POUSSIN, et c'est celle donnée explicitement par MONNA [11] et BRELOT [2], qui définissent aussi la capacité *extérieure*, comme on va le faire à la fin de ce n° 14.

définition est justifiée, puisque, pour un A qui satisfait à Cp^i, elle est en accord avec la définition antérieure. Mais nous allons montrer:

Pour qu'un ensemble A *satisfasse à la condition* Cp^i, *il faut et il suffit que sa capacité intérieure* $c^i(A)$ *soit finie.*

En effet, on vient de voir que la condition est nécessaire. Réciproquement, supposons $c^i(A)$ fini, et considérons la famille filtrante croissante des compacts contenus dans A; si K et H sont deux compacts tels que $H \subset K$, on a, d'après (9, 6),

$$\|\gamma_K - \gamma_H\|^2 \leqslant c(K) - c(H) \qquad \text{(il y a même égalité).}$$

Or, étant donné $a > 0$, il existe un compact $H \subset A$ tel que

$$c(H) \geqslant c^i(A) - a;$$

donc pour tout compact K tel que $H \subset K \subset A$, on a

$$\|\gamma_K - \gamma_H\|^2 \leqslant a.$$

De là résulte que γ_K converge fortement vers une distribution limite quand $c(K)$ tend vers $c^i(A)$ (parce que $\mathcal{E}$ est *complet*). Soit μ cette distribution limite; son potentiel U^μ sera limite de la famille croissante des potentiels U^{μ_K} relatifs aux compacts $K \subset A$; donc, si une ν est portée par un compact contenu dans A, on a

$$\int (U^\mu - 1)\,d\nu = 0.$$

Cette relation ayant lieu pour des ν partout denses dans $\mathcal{E}^i_A$, on aura, à la limite, pour chaque $\lambda \in \mathcal{E}^i_A$,

$$\int (U^\mu - 1)\,d\lambda \geqslant 0,$$

et comme $U^\mu(x) \leqslant 1$ partout, on voit que $U^\mu(x)$ est égal à 1 sauf aux points d'un ensemble qui est de mesure nulle pour toute $\lambda \in \mathcal{E}^i_A$. L'existence d'une telle μ exprime précisément que A satisfait à la condition Cp^i; il en résulte d'ailleurs que cette μ n'est autre que la distribution capacitaire intérieure γ^i_A.

De la même manière, on peut définir, pour tout ensemble A, la *capacité extérieure* $c^e(A)$ comme la *borne inférieure des capacités des ensembles ouverts contenant* A ([23 bis]). Cette définition est en accord avec celle antérieurement donnée dans le cas où A satisfait à Cp^e. Et

([23 bis]) Définition donnée tout d'abord par M. Brelot (*Comptes Rendus*, t. 209, 1939, p. 828), puis indépendamment par A. F. Monna [11].

l'on prouve : *pour que* A *satisfasse à la condition* $\mathrm{C}p^e$, *il faut et il suffit que la capacité extérieure* $c^e(\mathrm{A})$ *soit finie.*

15. — Capacités généralisées.

Au n° 9, on a introduit, d'une manière générale, la quantité

$$c_\mu(\mathcal{F}) = \|\mu_{\mathcal{F}}\|^2 = \int \mathrm{U}^\mu d\mu_{\mathcal{F}} \qquad [\text{formule } (9,\ 5)].$$

Dans le cas où $\mathcal{F}$ est $\mathcal{E}_\mathrm{A}^i$ (resp. $\mathcal{E}_\mathrm{A}^e$), et où $\mathrm{U}^\mu(x) = 1$ sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute distribution de $\mathcal{E}_\mathrm{A}^i$ (resp. de $\mathcal{E}_\mathrm{A}^e$), $c_\mu(\mathcal{F})$ n'est autre que la capacité intérieure $c^i(\mathrm{A})$ [resp. la capacité extérieure $c^e(\mathrm{A})$]. Dans le cas général d'une μ *quelconque* de $\mathcal{E}$, $c_\mu(\mathcal{F})$ sera notée $c_\mu^i(\mathrm{A})$ lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{E}_\mathrm{A}^i$, et $c_\mu^e(\mathrm{A})$ lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{E}_\mathrm{A}^e$. Le nombre $c_\mu^i(\mathrm{A})$ prendra le nom de *μ-capacité intérieure* ([24]) de l'ensemble A, et $c_\mu^e(\mathrm{A})$ le nom de *μ-capacité extérieure* de A.

Ainsi, $c_\mu^i(\mathrm{A})$ est la valeur commune de l'intégrale $\int \mathrm{U}^\mu d\mu_\mathrm{A}^i$ et de l'énergie $\|\mu_\mathrm{A}^i\|^2$; $c_\mu^e(\mathrm{A})$ est la valeur commune de l'intégrale $\int \mathrm{U}^\mu d\mu_\mathrm{A}^e$ et de l'énergie $\|\mu_\mathrm{A}^e\|^2$. L'inégalité (9, 6) donne ici

$$
\begin{array}{lll}
(15,\ 1) & \|\mu_\mathrm{A}^e - \mu_\mathrm{A}^i\|^2 \leqslant c_\mu^e(\mathrm{A}) - c_\mu^i(\mathrm{A}), & \\
(15,\ 2) & \|\mu_\mathrm{B}^i - \mu_\mathrm{A}^i\|^2 \leqslant c_\mu^i(\mathrm{B}) - c_\mu^i(\mathrm{A}) & \text{pour } \mathrm{A} \subset \mathrm{B}, \\
(15,\ 3) & \|\mu_\mathrm{B}^e - \mu_\mathrm{A}^e\|^2 \leqslant c_\mu^e(\mathrm{B}) - c_\mu^e(\mathrm{A}) & \text{pour } \mathrm{A} \subset \mathrm{B}.
\end{array}
$$

A vrai dire, ce sont même ici des *égalités*. En particulier, on a toujours $c_\mu^i(\mathrm{A}) \leqslant c_\mu^e(\mathrm{A})$; pour que l'égalité ait lieu, il faut et il suffit que $\mu_\mathrm{A}^i = \mu_\mathrm{A}^e$; on note alors $c_\mu(\mathrm{A})$ la valeur commune des deux μ-capacités.

Les relations (15, 1), (15, 2), (15, 3) valent en particulier pour les distributions capacitaires et les capacités proprement dites.

Comme dans le cas des capacités proprement dites, $c_\mu^i(\mathrm{A})$ est égal à la borne supérieure des $c_\mu(\mathrm{K})$ pour les compacts K contenus dans A ; $c_\mu^e(\mathrm{A})$ est égal à la borne inférieure des $c_\mu(\mathrm{B})$ pour les ouverts B contenant A ; etc.

Proposition 5. — *La μ-capacité intérieure (resp. extérieure) d'un ensemble* A *est égale à la borne supérieure de l'intégrale* $\int \mathrm{U}^\mu d\nu$ *et de*

([24]) La notion de μ-capacité *intérieure* a d'abord été envisagée par Vasilesco [17], dans le cas particulier d'un ensemble A *borné* et d'un potentiel U^μ *borné*. Brelot ([5], n° 18) considère les *deux* sortes de μ-capacités dans le cas général.

l'énergie $\|\nu\|^2$ *relatives à toutes les distributions* ν *de* $\mathcal{E}_A^i$ *(resp. de* $\mathcal{E}_A^e$*) telles que* $U^\nu(x) \leqslant U^\mu(x)$ *partout* (dans le cas de la capacité proprement dite, il faut remplacer, dans cet énoncé, le potentiel U^μ par la constante 1).

Il suffit d'établir la double inégalité

$$(15, 4) \qquad \|\nu - \mu_A^i\|^2 \leqslant c_\mu^i(A) - \int U^\mu d\nu \leqslant c_\mu^i(A) - \|\nu\|^2,$$

valable pour $\nu \in \mathcal{E}_A^i$ et $U^\nu \leqslant U^\mu$; de même

$$(15, 5) \qquad \|\nu - \mu_A^e\|^2 \leqslant c^\mu(A) - \int U^\mu d\nu \leqslant c_\mu^e(A) - \|\nu\|^2$$

pour $\nu \in \mathcal{E}_A^e$ et $U^\nu \leqslant U^\mu$.

Établissons par exemple (15, 4). On a

$$\|\nu - \mu_A^i\|^2 = \int U^\nu d\nu - 2\int U^{\mu_A^i} d\nu + \|\mu_A^i\|^2;$$

or $\|\mu_A^i\|^2 = c_\mu^i(A)$; en outre, en vertu de (12, 3), on a

$$\int U^{\mu_A^i} d\nu = \int U^\mu d\nu \qquad \text{pour } \nu \in \mathcal{E}_A^i;$$

enfin, $\int U^\nu d\nu \leqslant \int U^\mu d\nu$ puisque $U^\nu \leqslant U^\mu$. D'où l'inégalité (15, 4).

Les inégalités (15, 4) et (15, 5) prouvent, en outre, que $\int U^\mu d\nu$ et $\|\nu\|^2$ ne peuvent atteindre leur borne supérieure $c_\mu^i(A)$ [resp. $c_\mu^e(A)$] que si $\nu = \mu_A^i$ (resp. $\nu = \mu_A^e$); si $\nu \in \mathcal{E}_A^i$ (resp. $\nu \in \mathcal{E}_A^e$) varie de manière que $\int U^\mu d\nu$ ou $\|\nu\|^2$ tende vers $c_\mu^i(A)$ [resp. vers $c_\mu^e(A)$], la distribution ν *converge fortement* vers μ_A^i (resp. vers μ_A^e).

Corollaire. — *La* μ*-capacité intérieure d'un ensemble borélien* A *est égale à la borne supérieure des intégrales* $\int_A U^\mu d\nu$ *relatives aux distributions positives* ν *telles que* $U^\nu(x) \leqslant U^\mu(x)$ *partout* (pour la capacité proprement dite, remplacer le potentiel U^μ par la constante 1; on a alors à envisager la borne supérieure de la masse $\int_A d\nu$ portée par A).

En effet, montrons que si $U^\nu \leqslant U^\mu$, on a $\int_A U^\mu d\nu \leqslant c_\mu^i(A)$. Or, soit λ la restriction de ν à A; on a $U^\lambda \leqslant U^\mu$ et $\lambda \in \mathcal{E}_A^i$, d'où (prop. 5)

$$\int U^\mu d\lambda \leqslant c_\mu^i(A). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On en déduit la propriété (classique, au moins dans le cas de la capacité proprement dite) : si A est une réunion d'une famille *finie ou dénombrable d'ensembles boréliens* A_p, on a

$$(15, 6) \qquad c^i_\mu(A) \leqslant \sum_p c^i_\mu(A_p).$$

En effet, cela résulte de l'inégalité

$$\int_A U^\mu d\nu \leqslant \sum_p \int_{A_p} U^\mu d\nu,$$

valable pour chaque ν.

On peut étendre un peu le domaine de validité de (15, 6) ; il suffit que les A_p soient les intersections d'ensemble *boréliens* B_p avec un ensemble fixe C, non nécessairement borélien ; en effet, tout compact K contenu dans $A = B \cap C$ (B désigne la réunion des B_p) est alors la réunion des $K \cap B_p$ boréliens, d'où

$$c_\mu(K) \leqslant \sum_p c^i_\mu(K \cap B_p) \leqslant \sum_p c^i_\mu(A_p),$$

et comme $c^i_\mu(A)$ est la borne supérieure des $c_\mu(K)$, on obtient (15, 6).

Quant à la capacité *extérieure,* elle jouit de la propriété importante : si A est réunion *finie ou dénombrable* d'ensembles A_p *quelconques* (non nécessairement boréliens), on a

$$(15, 7) \qquad c^e_\mu(A) \leqslant \sum_p c^e_\mu(A_p).$$

Cela se démontre en enfermant les A_p dans des *ouverts* B_p, auxquels on applique (15, 6).

16. — Ensembles de capacité nulle.

Proposition 6. — *Pour que la famille $\mathcal{E}^i_A$ (resp. $\mathcal{E}^e_A$) se réduise à la distribution nulle, il faut et il suffit que la capacité intérieure $c^i(A)$ [resp. la capacité extérieure $c^e(A)$] soit nulle.*

Faisons la démonstration pour $\mathcal{E}^i_A$ et la capacité intérieure. Si $\mathcal{E}^i_A = (0)$, A satisfait évidemment à la condition Cp^i (prendre $\mu = 0$), et γ^i_A est nulle puisque $\gamma^i_A \in \mathcal{E}^i_A$; donc $c^i(A) = \|\gamma^i_A\|^2 = 0$. Réciproquement, si $c^i(A) = 0$, γ^i_A est nulle, et comme $U^{\gamma^i_A}(x) = 1$ sauf sur un ensemble dont la mesure est nulle pour toute distribution de $\mathcal{E}^i_A$, il s'ensuit que toute distribution de $\mathcal{E}^i_A$ est nulle.

On aurait une proposition analogue en envisageant, au lieu de la capacité proprement dite, la μ-capacité relative à une distribut on particulière μ supposée non nulle. Il en résulte : si $c^i(A) = 0$, on a $c^i_\mu(A) = 0$ pour toute μ ; réciproquement, si $c^i_\mu(A) = 0$ pour *une* $\mu \in \mathcal{E}$, non nulle, alors $c^i(A) = 0$. Proposition analogue pour les capacités extérieures.

D'après (15, 7), *toute réunion finie ou dénombrable d'ensembles de capacité extérieure nulle a une capacité extérieure nulle;* on a un résultat analogue pour la capacité *intérieure,* à condition de faire des hypothèses restrictives sur la nature *borélienne* des ensembles envisagés, de manière à pouvoir appliquer (15, 6).

PROPOSITION 7. — *Si* A *contient* B, *et si la différence* A — B *est de capacité extérieure nulle, les deux familles* $\mathcal{E}^e_A$ *et* $\mathcal{E}^e_B$ *coïncident.*

Il revient au même de montrer que $\mu^e_A = \mu^e_B$ pour toute $\mu \in \mathcal{E}$. Or, on a, d'après (15, 3),

$$\|\mu^e_A - \mu^e_B\|^2 \leqslant c^e_\mu(A) - c^e_\mu(B),$$

et d'après (15, 7),

$$c^e_\mu(A) - c^e_\mu(B) \leqslant c^e_\mu(A - B).$$

D'autre part, $c_\mu(A - B) = 0$ puisque A — B est de capacité extérieure nulle. D'où le résultat.

Notons encore : pour qu'un ensemble *borélien* A soit de capacité intérieure nulle, il faut et il suffit qu'il soit de *mesure nulle pour toute distribution d'énergie finie.* En effet, $\mathcal{E}^i_A = (0)$ signifie que $\mathcal{E}_K = (0)$ pour tout compact K contenu dans A ; or $\mathcal{E}_K = (0)$ signifie que K est de mesure nulle pour toute distribution d'énergie finie.

Introduisons maintenant une terminologie commode, déjà utilisée couramment par M. BRELOT :

1° On dira qu'une propriété *borélienne* [25] des points de l'espace *a lieu à peu près partout* [25 bis] *sur un ensemble* A (quelconque) [en abrégé: à p. p. p. sur A], si l'ensemble des points de A qui ne la possèdent pas est de *capacité intérieure nulle.* Lorsque A est borélien, cela revient à dire que l'ensemble (borélien) des points de A qui ne possèdent pas la propriété est de mesure nulle pour toute distribution d'énergie finie. Donc, si A est compact, la définition est en accord avec celle donnée antérieurement (n° 10). Pour un ensemble A quelconque, on a la proposition : pour qu'une propriété borélienne

(25) Une propriété des points de l'espace est dite *borélienne* si l'ensemble des points qui la possèdent est borélien.

(25 *bis*) Locution introduite par DE LA VALLÉE POUSSIN [16].

ait lieu à peu près partout sur A, il faut et il suffit qu'elle ait lieu à peu près partout sur tout compact contenu dans A.

2° On dira qu'une propriété borélienne des points de l'espace a lieu *quasi-partout sur* A (en abrégé : q. p. sur A) si l'ensemble des points de A qui ne la possèdent pas est de *capacité extérieure nulle.*

Dans le cas où A est l'espace entier, lorsqu'on dit qu'une propriété borélienne a lieu à peu près partout (resp. quasi partout), on entend que l'ensemble des points de l'espace où elle n'a pas lieu est de capacité intérieure (resp. extérieure) nulle.

17. — Nouvelles propriétés des potentiels des distributions balayées.

Proposition 8. — *Le potentiel de* μ_A^i *est égal à la borne supérieure des potentiels des distributions* μ_K *relatives aux compacts* K *contenus dans* A, *et est égal à* U^μ *à peu près partout sur* A.

La première partie de l'énoncé résulte du fait que les U^{μ_K} forment une famille filtrante croissante majorée par U^μ, et du fait que μ_A^i est limite forte des μ_K. Quant à la seconde partie, on doit montrer que $U^{\mu_A^i}(x) = U^\mu(x)$ à p. p. p. sur chaque compact K contenu dans A ; or $U^{\mu_K} \leqslant U^{\mu_A^i} \leqslant U^\mu$, et $U^{\mu_K}(x) = U^\mu(x)$ à p. p. p. sur K (n° 10), d'où le résultat.

Proposition 8 *bis*. — *Le potentiel de* μ_A^e *est égal quasi partout à la borne inférieure des potentiels des* μ_B *relatives aux ouverts* B *contenant* A, *et est égal à* U^μ *quasi partout sur* A.

Tout d'abord, si B est un ensemble *ouvert,* $U^{\mu_B}(x)$ est égal à $U^\mu(x)$ *en tout point de* B sans exception. Car, d'après la proposition 8, $U^{\mu_B}(x)$ est égal à $U^\mu(x)$ à p. p. p. sur B ; mais alors, en faisant des moyennes sphériques pour U^μ et U^{μ_B}, puis passant à la limite, on trouve l'égalité en tout point de B. Cette remarque vaut aussi pour le potentiel capacitaire d'un ensemble ouvert B (supposé de capacité finie) ; il est *égal à* 1 *en tout point de* B.

Cela posé, prouvons la proposition 8 *bis*. Les U^{μ_B} relatifs aux ouverts B contenant A forment une famille filtrante décroissante, et μ_A^e est limite forte des μ_B. Soit $V(x)$ la borne inférieure, en chaque point x, des $U^{\mu_B}(x)$. Puisque μ_A^e est limite vague des μ_B, on a $U^{\mu_A^e} \leqslant V$ partout. De plus, soit $a > 0$ arbitraire ; l'ensemble des points x où l'on a

$$U^{\mu_B}(x) > U^{\mu_A^e}(x) + a$$

a une capacité extérieure [26] $\leqslant \frac{1}{a^2} \| \mu_B - \mu_A^e \|^2$, donc l'ensemble des points où $V(x) > U^{\mu_A^e}(x) + a$ a une capacité extérieure arbitrairement petite, c'est-à-dire nulle. Ceci vaut pour tout $a > 0$, et par suite on a $V(x) \leqslant U^{\mu_A^e}(x)$ quasi partout.

Pour achever la démonstration, observons que $U^{\mu}(x) = U^{\mu_B}(x)$ en tout point de B, donc en tout point de A, d'où $V(x) = U^{\mu}(x)$ en tout point de A. Puisque $U^{\mu_A^e}(x) = V(x)$ quasi partout, on a $U^{\mu_A^e}(x) = U^{\mu}(x)$ quasi partout sur A. Rappelons d'ailleurs que $U^{\mu_A^e}(x) \leqslant U^{\mu}(x)$ partout [formule (12, 2)].

V. — BALAYAGE DANS LE CAS GÉNÉRAL

18. — Définition du balayage.

Revenons à la relation (12, 3). Elle prouve que, si λ et μ sont deux distributions positives d'énergie finie, on a

$$(\lambda_A^i - \lambda, \mu_A^i) = 0, \qquad (\mu_A^i - \mu, \lambda_A^i) = 0,$$

d'où par comparaison,

$$(\lambda, \mu_A^i) = (\mu, \lambda_A^i),$$

ce qui s'écrit aussi

$$(18, 1) \qquad \int U^{\mu_A^i} d\lambda = \int U^{\mu} d\lambda_A^i.$$

Cette relation va nous permettre d'étendre la définition du balayage au cas d'une distribution μ quelconque de $\mathfrak{M}$, non plus nécessairement d'énergie finie. Je dis : $\mu \in \mathfrak{M}$ *étant donnée, il existe une* $\nu \in \mathfrak{M}$ *et une seule telle que*

$$(18, 2) \qquad \int U^{\nu} d\lambda = \int U^{\mu} d\lambda_A^i \qquad \text{pour toute } \lambda \in \mathcal{E}.$$

Une fois que ceci aura été prouvé, nous *définirons* la distribution μ_A^i comme l'unique distribution ν satisfaisant à (18, 2); cette défi-

[26] Voir [7], lemme 5, p. 98. La démonstration, que nous nous dispensons de reproduire ici, est simple et ne fait intervenir que les notions déjà exposées dans le présent travail.

nition sera bien d'accord avec l'ancienne définition dans le cas où $\mu \in \mathcal{E}$, en vertu de (18, 1).

Plus généralement, nous allons prouver : V *étant une fonction surharmonique* $\geqslant 0$, *il existe une fonction* W *surharmonique* $\geqslant 0$ *et une seule qui satisfasse à*

$$(18, 3) \qquad \int W d\lambda = \int V d\lambda_A^i \qquad \text{pour toute } \lambda \in \mathcal{E}.$$

En effet W, si elle existe, est *unique*, car $\int W d\lambda$ a une valeur déterminée pour toute λ sphérique ; et l'on sait que, en un point a, $W(a)$ est limite des moyennes de W sur des sphères de centre a dont les rayons tendent vers zéro. Reste à prouver *l'existence* d'une W satisfaisant à (18, 3). Or V est limite d'une suite *croissante* de potentiels U^{μ_p}, avec $\mu_p \in \mathcal{E}$ ([27]) ; la suite des potentiels des $(\mu_p)_A^i$ est *croissante* (n° 13), donc sa limite W est surharmonique ; et W satisfait à (18, 3), qui résulte de

$$\int U^{(\mu_p)_A^i} d\lambda = \int U^{\mu_p} d\lambda_A^i$$

par un passage à la limite.

L'unique fonction W surharmonique $\geqslant 0$ qui satisfait à (18, 3) se notera V_A^i. D'après ce qui précède, $V_A^i(x) \leqslant V(x)$ partout. Lorsque V est un potentiel $U^\mu(\mu \in \mathfrak{M})$, V_A^i est le potentiel de la distribution balayée μ_A^i.

Tout ce qui précède peut se transposer au cas du balayage *extérieur*. On aura ainsi les relations caractéristiques

$$(18, 4) \qquad \int V_A^i d\lambda = \int V d\lambda_A^i, \qquad \int V_A^e d\lambda = \int V d\lambda_A^e \qquad \text{pour } \lambda \in \mathcal{E};$$

$$(18, 5) \qquad \int U^\lambda d\mu_A^i = \int U^{\lambda_A^i} d\mu, \qquad \int U^\lambda d\mu_A^e = \int U^{\lambda_A^e} d\mu \qquad \text{pour } \lambda \in \mathcal{E}.$$

Ces relations prouvent que l'opération qui fait passer de V à V_A^i (resp. V_A^e), ou de μ à μ_A^i (resp. μ_A^e) est *linéaire* ; notamment, si V est une somme X + Y (X et Y surharmoniques $\geqslant 0$), on a

$$V_A^i = X_A^i + Y_A^i, \qquad V_A^e = X_A^e + Y_A^e.$$

Pour les distributions :

$$(\mu + \nu)_A^i = \mu_A^i + \nu_A^i, \qquad (\mu + \nu)_A^e = \mu_A^e + \nu_A^e.$$

([27]) Par exemple, soit μ une distribution fixe de $\mathcal{E}$, non nulle ; il suffit de poser
$U^{\mu_p} = \inf(V, pU^\mu)(p = 1, 2, \ldots)$.

L'inégalité $V \leqslant W$ (c'est-à-dire $V(x) \leqslant W(x)$ en tout point x) entre deux fonctions V et W surharmoniques $\geqslant 0$ entraîne

$$V_A^i \leqslant W_A^i \quad \text{et} \quad V_A^e \leqslant W_A^e.$$

En effet, il suffit de montrer que, pour toute distribution sphérique λ, on a

$$\int V_A^i d\lambda \leqslant \int W_A^i d\lambda, \qquad \int V_A^e d\lambda \leqslant \int W_A^e d\lambda;$$

or, d'après (18, 4), cela revient à

$$\int V d\lambda_A^i \leqslant \int W d\lambda_A^i, \qquad \int V d\lambda_A^e \leqslant \int W d\lambda_A^e,$$

ce qui a lieu évidemment.

Si V est limite d'une suite *croissante* de V_p surharmoniques $\geqslant 0$ (ou plus généralement, d'une famille *filtrante croissante*), V_A^i (resp. V_A^e) est limite de la suite croissante (ou de la famille filtrante croissante) des $(V_p)_A^i$ [resp. des $(V_p)_A^e$]. En effet, cela résulte de la caractérisation (18, 4), grâce à un passage à la limite sous le signe d'intégration.

Pour que V_A^i (ou V_A^e) soit un potentiel, il *suffit* que V soit un potentiel, mais ce n'est pas nécessaire. Par exemple, si V est la constante 1, V_A^i ou V_A^e peut être un potentiel; la distribution correspondante, lorsqu'elle existe, se notera γ_A^i (resp. γ_A^e); on l'appelle la *distribution capacitaire intérieure* (resp. *extérieure*) de l'ensemble A. On a vu au n° 14 qu'elle existe si la capacité intérieure $c^i(A)$ [resp. la capacité extérieure $c^e(A)$] est *finie*, mais cette condition suffisante n'est pas nécessaire pour l'existence d'une distribution capacitaire (voir plus loin, n° 29).

19. — Propriétés extrémales des potentiels des distributions balayées.

D'une manière générale, nous allons étudier les fonctions V_A^i et V_A^e obtenues à partir d'une fonction V surharmonique $\geqslant 0$.

THÉORÈME 1. — *On a* $V_A^i \leqslant V$ *partout, et* $V_A^i(x) = V(x)$ *à p. p. p. sur* A. *Toute fonction* W *surharmonique* $\geqslant 0$ *qui satisfait à*

$$W(x) \geqslant V(x) \qquad \text{à p. p. p. sur A}$$

satisfait à

$$W(x) \geqslant V_A^i(x) \qquad \text{partout.}$$

V peut être considérée comme limite d'une suite croissante de potentiels U^{μ_p} ($\mu_p \in \mathcal{E}$); alors V^i_A est limite de la suite croissante des $(U^{\mu_p})^i_A$. Une fois le théorème 1 démontré pour les potentiels U^{μ_p}, il s'ensuivra pour V, d'une manière évidente [28].

Démontrons donc le théorème 1 lorsque V est le potentiel U^μ d'une $\mu \in \mathcal{E}$. La première partie du théorème résulte de la proposition 8. De plus, si W surharmonique $\geqslant 0$ satisfait à $U^\mu(x) \leqslant W(x)$ à p. p. p. sur A, on a, pour tout compact K contenu dans A,

$$U^{\mu_K}(x) \leqslant W(x)$$

à p. p. p. sur K, donc sur un noyau de μ_K, donc partout. Or $U^{\mu^i_A}$ est la borne supérieure des U^{μ_K} (prop. 8), d'où $U^{\mu^i_A} \leqslant W$ partout.

C. Q. F. D.

Théorème 1 *bis*. — *On a* $V^e_A \leqslant V$ *partout, et* $V^e_A(x) = V(x)$ *quasi partout sur* A. *Toute fonction* W *surharmonique* $\geqslant 0$ *qui satisfait à*

$$W(x) \geqslant V(x) \qquad \text{quasi partout sur A,}$$

satisfait à

$$W(x) \geqslant V^e_A(x) \qquad \text{partout.}$$

Ici encore, il suffira de faire la démonstration lorsque V est le potentiel U^μ d'une $\mu \in \mathcal{E}$. On pourra même se borner au cas où U^μ est une fonction *continue*, puisque tout potentiel est limite d'une suite croissante de potentiels continus.

La première partie du théorème résulte de la proposition 8 *bis* [28 bis]. Soit alors B l'ensemble des points x de A où $U^\mu(x) \leqslant W(x)$; puisque A — B est, par hypothèse, de capacité extérieure nulle, on a $\mu^e_A = \mu^e_B$ (n° 16, prop. 7). Nous voulons montrer que l'on a $U^{\mu^e_B}(x) \leqslant W(x)$ partout, sachant que $U^\mu(x) \leqslant W(x)$ sur B. Soit $a > 0$; désignons

(28) Le seul point un peu délicat consiste à montrer que $V^i_A = V$ à p. p. p. sur A. Or, l'ensemble des points de l'espace où $V^i_A(x) < V(x)$ est contenu dans la réunion B des ensembles (boréliens) B_p où le potentiel de $(\mu_p)^i_A$ est $< U^{\mu_p}$. D'après (15,6), on a

$$c^i(A \cap B) \leqslant \sum_p c^i(A \cap B_p),$$

et ici chaque terme du second membre est nul, donc le premier membre est nul.

C. Q. F. D.

(28 *bis*) Il faut prendre garde que la proposition 8 *bis*, valable pour une μ *d'énergie finie*, cesse d'être vraie dans le cas général (tandis que la proposition 8 s'étend au cas général, comme on le vérifie sans peine). Par exemple, soit A un ensemble réduit à un point a, et soit μ la distribution formée d'une masse $+1$ placée en a; on a évidemment $\mu^e_A = 0$, tandis que $\mu_B = \mu$ pour tout *ouvert* B contenant A; donc le potentiel de μ^e_A n'est pas, même quasi partout, la borne inférieure des potentiels des μ_B.

par C l'ensemble des x tels que $U^{\mu}(x) < W(x) + a$, ensemble qui contient B et est *ouvert*, en vertu de la continuité de U^{μ}. D'après le théorème 1 appliqué à C, on a partout

$$U^{\mu_C}(x) \leqslant W(x) + a$$

et *a fortiori*

$$U^{\mu_B^e}(x) \leqslant W(x) + a \qquad \text{partout.}$$

Ceci vaut pour tout $a > 0$, d'où finalement

$$U^{\mu_B^e}(x) \leqslant W(x) \qquad \text{partout.}$$

C. Q. F. D.

Les théorèmes 1 et 1 *bis* fournissent la caractérisation suivante :

Corollaire. — V_A^i *(resp.* V_A^e*) est la plus petite des fonctions surharmoniques* $\geqslant 0$ *qui majorent* V *à peu près partout (resp. quasi partout) sur* A. C'est la propriété qui sert de *définition* dans la théorie de M. Brelot ([5], p. 10). D'où le nom *d'extrémisation* donné à l'opération qui fait passer de V à V_A^i ou V_A^e : V_A^i se nommera *l'extrémale intérieure,* V_A^e *l'extrémale extérieure* de V relativement à l'ensemble A ([28 ter]). Il est clair que $V_A^i \leqslant V_A^e$.

Théorème 2. — *Pour deux fonctions* V *et* W *surharmoniques* $\geqslant 0$, *les conditions suivantes sont toutes équivalentes :*

α) $V(x) \leqslant W(x)$ sauf sur un ensemble qui est de mesure nulle pour toute distribution de $\mathcal{E}_A^i$ (resp. de $\mathcal{E}_A^e$) ;
β) $V(x) \leqslant W(x)$ à p. p. p. sur A (resp. q. p. sur A) ;
γ) $V_A^i(x) \leqslant W(x)$ partout [resp. $V_A^e(x) \leqslant W(x)$ partout] ;
δ) $V_A^i(x) \leqslant W_A^i(x)$ partout [resp. $V_A^e(x) \leqslant W_A^e(x)$ partout].

Tout d'abord, δ) entraîne évidemment γ) ; inversement, si γ) a lieu, on a partout $(V_A^i)_A^i \leqslant W_A^i$, c'est-à-dire $V_A^i \leqslant W_A^i$; démonstration analogue pour les extrémales extérieures.

Ainsi, γ) et δ) sont équivalentes. D'autre part, le théorème 1 (resp. 1 *bis*) affirme que β) et γ) sont équivalents. Il suffira donc de montrer que α) entraîne δ) et que γ) entraîne α).

α) entraîne δ) : en effet, prouver δ) revient à prouver que, pour toute distribution sphérique λ, on a

$$\int V_A^i d\lambda \leqslant \int W_A^i d\lambda,$$

([28 ter]) C'est ce que M. Brelot [5] nomme l'extrémale relative au *complémentaire* de A.

inégalité dont les deux membres sont finis, et égaux respectivement à $\int V d\lambda_A^i$ et $\int W d\lambda_A^i$; d'après l'hypothèse α), on a $V \leqslant W$ sauf sur un ensemble de mesure nulle pour λ_A^i, d'où l'inégalité cherchée. Démonstration analogue pour les extrémales extérieures.

Enfin, γ) entraîne α) : comme V est limite croissante d'une suite de potentiels de distributions d'énergie finie, il suffit de faire la démonstration lorsque $V = U^\mu$ ($\mu \in \mathcal{E}$). Or, on sait que, pour toute $\lambda \in \mathcal{E}_A^i$, on a alors $U^{\mu_A^i}(x) = U^\mu(x)$ sauf sur un ensemble de mesure nulle pour λ, d'où $U^\mu(x) \leqslant W(x)$ sauf sur un ensemble de mesure nulle pour λ. Démonstration analogue pour l'extrémale extérieure.

La démonstration du théorème 2 est ainsi achevée.

Corollaire. — *Pour deux fonctions* V *et* W *surharmoniques positives, les conditions suivantes sont équivalentes :*

α) $V(x) = W(x)$ sauf sur un ensemble qui est de mesure nulle pour toute distribution de $\mathcal{E}_A^i$ (resp. de $\mathcal{E}_A^e$) ;

β) $V(x) = W(x)$ à p. p. p. sur A (resp. q. p. sur A) ;

δ) $V_A^i(x) = W_A^i(x)$ partout [resp. $V_A^e(x) = W_A^e(x)$ partout].

Remarque. — La condition α) du théorème 2 entraîne que

$$V(x) \leqslant W(x)$$

en tout point *intérieur* à A ; car $\int V d\lambda \leqslant \int W d\lambda$ pour toute λ sphérique portée par la frontière de toute boule fermée intérieure à A (puisqu'une telle λ appartient à $\mathcal{E}_A^i$) ; donc, si a est un point intérieur à A, on trouve, en faisant des médiations sur des sphères de centre a et passant à la limite, $V(a) \leqslant W(a)$.

En particulier, si A est un ensemble *ouvert*, $V_A(x)$ est égal à $V(x)$ en tout point x de A. Ceci vaut, notamment, si V est la constante 1 et si A possède une distribution capacitaire : le potentiel de cette dernière est *égal à* 1 en tout point de A si A est *ouvert*.

20. — Balayage et topologie fine.

Les relations (18, 5) montrent que si $\lambda \in \mathfrak{L}$ [voir, au n° 2, la définition de $\mathfrak{L}$], les intégrales $\int U^{\lambda_A^i} d\mu$ et $\int U^{\lambda_A^e} d\mu$ sont *finies* pour toute $\mu \in \mathfrak{M}$, donc λ_A^i et λ_A^e appartiennent à $\mathfrak{L}$. Ceci résulte aussi du fait que $U^{\lambda_A^i} \leqslant U^\lambda$ et $U^{\lambda_A^e} \leqslant U^\lambda$, et du critère de la proposition 2.

Cela étant, considérons, dans $\mathfrak{M}$, la *topologie fine* définie au n° 6.

Supposons qu'une μ variable converge finement vers ν; alors, pour chaque $\lambda\in\mathcal{L}$, $\int U^{\mu}d\lambda_A^i$ et $\int U^{\mu}d\lambda_A^e$ tendent vers $\int U^{\nu}d\lambda_A^i$ et $\int U^{\nu}d\lambda_A^e$ respectivement. D'après (18, 5), c'est dire $\int U^{\mu_A^i}d\lambda$ et $\int U^{\mu_A^e}d\lambda$ tendent vers $\int U^{\nu_A^i}d\lambda$ et $\int U^{\nu_A^e}d\lambda$; donc μ_A^i converge finement vers ν_A^i et μ_A^e vers ν_A^e. En d'autres termes, considérons μ_A^i (resp. μ_A^e) comme une fonction de $\mu\in\mathfrak{M}$, à valeurs dans $\mathfrak{M}$; alors cette fonction est *continue* lorsqu'on munit $\mathfrak{M}$ de la topologie *fine*.

Ceci permet d'interpréter le *balayage* : savoir balayer (intérieurement ou extérieurement), c'est savoir déterminer la valeur de la fonction précédente. Cette fonction étant supposée connue lorsque μ est *d'énergie finie* (par la méthode des n^{os} 11 et 12), il suffit de la *prolonger par continuité* à $\mathfrak{M}$, muni de la topologie fine. Or $\mathcal{E}$ est partout dense dans $\mathfrak{M}$: toute μ de $\mathfrak{M}$ est limite fine d'au moins une suite de $\mu_p\in\mathcal{E}$, puisque U^{μ} est limite d'une suite croissante de U^{μ_p} ($\mu_p\in\mathcal{E}$).

Ceci nous conduit à définir les deux sous-ensembles suivants de $\mathfrak{M}$: *l'adhérence fine* de $\mathcal{E}_A^i$ sera notée $\mathfrak{M}_A^i$, l'adhérence fine de $\mathcal{E}_A^e$ sera notée $\mathfrak{M}_A^e$. Il est clair que $\mathfrak{M}_A^i\subset\mathfrak{M}_A^e$. On remarquera que $\mathfrak{M}_A^i$ est l'adhérence fine de l'ensemble des distributions positives *d'énergie finie* portées par A ; car $\mathcal{E}_A^i$ est l'adhérence forte de cet ensemble.

Toute distribution balayée μ_A^i *(resp.* μ_A^e*) appartient à* $\mathfrak{M}_A^i$ *(resp.* $\mathfrak{M}_A^e$*)* ; car si μ est limite fine de distributions de $\mathcal{E}$, μ_A^i (resp. μ_A^e) est limite fine des distributions balayées, qui appartiennent à $\mathcal{E}_A^i$ (resp. $\mathcal{E}_A^e$).

$\mathfrak{M}_A^i$ *(resp.* $\mathfrak{M}_A^e$*) est précisément l'ensemble des distributions de* $\mathfrak{M}$ *identiques à leur balayée intérieurement (resp. extérieurement).* Car si $\mu=\mu_A^i$, μ appartient à $\mathfrak{M}_A^i$ d'après ce qui précède ; réciproquement, si $\mu\in\mathfrak{M}_A^i$, μ est limite fine de distributions ν de $\mathcal{E}_A^i$; donc telles que $\nu=\nu_A^i$; d'où, à la limite, $\mu=\mu_A^i$. Démonstration analogue pour $\mathfrak{M}_A^e$.

$\mathcal{E}_A^i$ *(resp.* $\mathcal{E}_A^e$*) n'est autre que l'ensemble des distributions de* $\mathfrak{M}_A^i$ *(resp. de* $\mathfrak{M}_A^e$*) dont l'énergie est finie.* Car si $\mu\in\mathfrak{M}_A^i\cap\mathcal{E}$, on a $\mu=\mu_A^i$, et puisque $\mu\in\mathcal{E}$, cela exige $\mu\in\mathcal{E}_A^i$.

De là résulte : *pour que* $\mathfrak{M}_A^i=\mathfrak{M}_A^e$, *il faut et il suffit que* $\mathcal{E}_A^i=\mathcal{E}_A^e$. D'après le théorème 2, cela revient aussi à dire que l'inégalité $V(x)\leqslant W(x)$ *à peu près partout sur* A entraîne $V(x)\leqslant W(x)$ *quasi partout sur* A lorsque V et W sont surharmoniques $\geqslant 0$ [29]. Il

[29] Voici une application de ce critère. Considérons une famille finie ou dénombrable d'ensembles A_p pour chacun desquels les deux balayages (intérieur et extérieur) sont iden-

revient au même de dire que, pour toute V, $V_A^i(x)$ est égal à $V(x)$ quasi partout sur A, c'est-à-dire $V_A^i = V_A^e$.

On ignore si $\mathcal{E}_A^i = \mathcal{E}_A^e$ pour tout ensemble *borélien* A. S'il en était ainsi, tout ensemble borélien de capacité *intérieure* nulle serait de capacité *extérieure* nulle (cf. prop. 6, n° 16). Réciproquement, supposons qu'on puisse démontrer que tout ensemble borélien de capacité intérieure nulle est de capacité extérieure nulle ; soit alors un borélien quelconque A : si $V(x) \leqslant W(x)$ à p. p. p. sur A, on conclut $V(x) \leqslant W(x)$ q. p. sur A ; on pourrait donc conclure que $\mathcal{E}_A^i = \mathcal{E}_A^e$ pour tout A borélien, et en particulier que les deux capacités $c^i(A)$ et $c^e(A)$ sont *égales* pour tout ensemble borélien.

21. — Caractérisation des familles $\mathfrak{M}_A^i$ et $\mathfrak{M}_A^e$.

Nous allons donner une condition *nécessaire* pour qu'une μ de $\mathfrak{M}$ appartienne à $\mathfrak{M}_A^i$ (resp. $\mathfrak{M}_A^e$) ; puis une condition *suffisante,* apparemment plus faible que la condition nécessaire. Il en résultera que chacune des deux conditions est nécessaire et suffisante.

Pour que $\mu \in \mathfrak{M}_A^i$ *(resp.* $\mu \in \mathfrak{M}_A^e$*), il faut que*

$$\int V d\mu = \int V_A^i d\mu \qquad \left(\text{resp. } \int V d\mu = \int V_A^e d\mu\right)$$

ponr toute V *surharmonique* $\geqslant 0$. En effet, c'est une conséquence immédiate de (18, 4).

Pour que $\mu \in \mathfrak{M}_A^i$ *(resp.* $\mu \in \mathfrak{M}_A^e$*), il suffit que, pour une distribution* α *de* $\mathfrak{L}$ *convenablement choisie, on ait*

$$\int U^\alpha d\mu = \int U^{\alpha_A^i} d\mu \qquad \left(\text{resp. } \int U^\alpha d\mu = \int U^{\alpha_A^e} d\mu\right)$$

(le choix de α, qui va être indiqué, est indépendant de μ et de l'ensemble A).

Faisons par exemple la démonstration pour $\mathfrak{M}_A^i$. Pour que $\mu = \mu_A^i$, il *suffit* que

$$\int U^\lambda d\mu = \int U^\lambda d\mu_A^i$$

tiques. Alors *les deux balayages sont identiques pour leur réunion* A. En effet, soient V et W surharmoniques $\geqslant 0$, et soit B l'ensemble des x tels que $V(x) > W(x)$. Supposons que l'ensemble $A - (A \cap B)$ soit de capacité *intérieure* nulle et montrons qu'il est de capacité *extérieure* nulle. Or, c'est la réunion des $A_p - (A_p \cap B)$, dont chacun est de capacité intérieure nulle, donc de capacité *extérieure* nulle, puisque pour A_p les deux balayages coïncident.

pour toute distribution sphérique λ (cf. n° 3). Il suffit même d'exprimer cette condition pour une famille *dénombrable* convenable de λ_p (par exemple les distributions sphériques dont le centre a des coordonnées rationnelles et le rayon est rationnel), car alors on aura $\int f d\mu = \int f d\mu_A^i$ pour des $f \in \mathcal{C}^+$ formant un ensemble *total* (cf. n° 3). Il suffit donc d'écrire

$$\int U^{\mu} d\lambda_p = \int U^{\mu_A^i} d\lambda_p \tag{21, 1}$$

pour des λ_p convenables ($p = 1, 2, \ldots$). Choisissons des constantes numériques $a_p > 0$ telles que $\sum_p a_p \lambda_p$ appartienne à $\mathfrak{L}$, ce qui est possible d'après la proposition 2 (n° 2). Soit α la distribution obtenue ; la relation

$$\int U^{\mu} d\alpha = \int U^{\mu_A^i} d\alpha$$

entraîne, à elle seule, toutes les relations (21, 1) puisque $U^{\mu_A^i} \leqslant U^{\mu}$ partout. Donc elle exprime que $\mu = \mu_A^i$; mais, en vertu de (18, 5) appliquée à μ et α, elle s'écrit aussi

$$\int U^{\alpha} d\mu = \int U^{\alpha_A^i} d\mu.$$

C. Q. F. D.

Remarque : puisque les U^{λ_p} sont *continus*, et qu'on peut choisir les a_p de manière à assurer la convergence uniforme de la série $\sum_p a_p U^{\lambda_p}$, on peut choisir α de manière que son potentiel U^{α} soit *continu*.

22. — Points réguliers, points irréguliers.

Désignons par ε_x la distribution formée d'une masse 1 au point x. Si on sait balayer les distributions ε_x, on sait balayer toute distribution, et même calculer l'extrémale de toute V surharmonique $\geqslant 0$, par les formules

$$V_A^i(x) = \int V(y) d(\varepsilon_x)_A^i(y), \qquad V_A^e(x) = \int V(y) d(\varepsilon_x)_A^e(y)$$

qui résultent de (18, 4) appliqué à $\lambda = \varepsilon_x$.

Lorsque $V = U^{\mu}$, on obtient aussi

$$U^{\mu_A^i}(x) = \int G_A^i(x, y) d\mu(y), \qquad U^{\mu_A^e}(x) = \int G_A^e(x, y) d\mu(y),$$

en posant

$$G^i_A(x, y) = U^{(\varepsilon_x)^i_A}(y), \qquad G^e_A(x, y) = U^{(\varepsilon_x)^e_A}(y).$$

Ces deux fonctions de deux variables x et y, qu'on peut appeler *fonctions de Green* intérieure et extérieure (relatives à l'ensemble A, ou plutôt à son complémentaire), sont *symétriques* en x et y ; en effet, en appliquant (18, 5) aux distributions ε_x et ε_y, on obtient

$$\int U^{(\varepsilon_x)^i_A}(z)\,d\varepsilon_y(z) = \int U^{(\varepsilon_y)^i_A}(z)\,d\varepsilon_x(z),$$

c'est-à-dire

$$G^i_A(x, y) = G^i_A(y, x);$$

démonstration analogue pour G^e_A.

Définition : un point x de l'espace sera dit *intérieurement régulier* (resp. *extérieurement régulier*) pour l'ensemble A, si $(\varepsilon_x)^i_A = \varepsilon_x$ [resp. $(\varepsilon_x)^e_A = \varepsilon_x$] ; condition équivalente : $\varepsilon_x \in \mathfrak{M}^i_A$ (resp. $\varepsilon_x \in \mathfrak{M}^e_A$).

Les critères du n° 21 donnent : *si x est intérieurement (resp. extérieurement) régulier, on a*

$$V^i_A(x) = V(x) \qquad [\text{resp. } V^e_A(x) = V(x)]$$

pour toute V *surharmonique* ≥ 0. Pour que x soit intérieurement (resp. extérieurement) régulier, il *suffit* que la condition précédente soit vérifiée pour la fonction $V = U^\alpha$ (α désigne la distribution définie au n° 21) ; cette condition est alors vérifiée pour toute V.

Les points de l'espace qui ne sont pas intérieurement (resp. extérieurement) réguliers sont dits intérieurement (resp. extérieurement) *irréguliers* pour A.

Puisque l'on a $U^{\alpha^i_A}(x) = U^\alpha(x)$ à peu près partout sur A (théorème 1), on voit que l'ensemble des points intérieurement irréguliers *qui appartiennent à* A est de *capacité intérieure nulle*. De même, l'ensemble des points extérieurement irréguliers qui appartiennent à A est de *capacité extérieure nulle*.

Puisque $\mathfrak{M}^i_A \subset \mathfrak{M}^e_A$, tout point intérieurement régulier est extérieurement régulier. Tout point x *intérieur* à A est *intérieurement régulier,* car ε_x est limite fine de distributions sphériques portées par A, donc appartient à $\mathfrak{M}^i_A$. Tout point x *extérieurement régulier* appartient à l'adhérence de A, car ε_x appartient à $\mathfrak{M}^e_A$, et toute distribution de $\mathfrak{M}^e_A$ est portée par $\bar{A}$ (comme limite fine de distributions de $\mathcal{E}^e_A$, portées par $\bar{A}$).

Désignons par A^i (resp. A^e) l'ensemble des points intérieurement (resp. extérieurement) *réguliers*. Ce qui précède montre que

$$\mathring{A} \subset A^i \subset A^e \subset \overline{A}$$

($\mathring{A}$ désigne l'intérieur de A). Les ensembles A^i et A^e sont *boréliens*, puisqu'ils sont définis respectivement par les relations

$$U^{\alpha^i_A}(x) = U^\alpha(x), \qquad U^{\alpha^e_A}(x) = U^\alpha(x).$$

23. — Nouvelle interprétation des familles $\mathfrak{M}^i_A$ et $\mathfrak{M}^e_A$.

Théorème 3. — *Les distributions de* $\mathfrak{M}^i_A$ *(identiques à leur balayée intérieurement) sont les distributions portées par l'ensemble* A^i *des points intérieuremsnt réguliers. Les distributions de* $\mathfrak{M}^e_A$ *(identiques à leur balayée extérieurement) sont les distributions portées par l'ensemble* A^e *des points extérieurement réguliers.*

Faisons la démonstration pour $\mathfrak{M}^i_A$. Pour que $\mu \in \mathfrak{M}^i_A$, il faut et il suffit que

$$\int U^\alpha d\mu = \int U^{\alpha^i_A} d\mu$$

(n° 21), donc que l'ensemble des points x où $U^{\alpha^i_A}(x) < U^\alpha(x)$ soit de mesure nulle pour μ ; or, le complémentaire de cet ensemble est précisément A^i. C. Q. F. D.

Le raisonnement précédent est correct, parce que les intégrales envisagées sont *finies* : cela tient à ce que α appartient à $\mathfrak{L}$.

Corollaire. — *Les distributions de* $\mathcal{E}^i_A$ *ne sont autres que les distributions d'énergie finie portées par* A^i *; les distributions de* $\mathcal{E}^e_A$ *ne sont autres que les distributions d'énergie finie portées par* A^e.

Remarque : la condition $A^i = A^e$ est nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{M}^i_A = \mathfrak{M}^e_A$, c'est-à-dire pour que les deux balayages, intérieur et extérieur, coïncident pour l'ensemble A. Cette condition est notamment remplie lorsque A est *ouvert*, ou *fermé*. Lorsque $A^i = A^e$, on parle simplement de points *réguliers*, ou de points *irréguliers* pour l'ensemble A.

Le théorème 2, compte tenu des interprétations que l'on vient d'obtenir pour l'ensemble des points réguliers, conduit aux deux propositions suivantes :

Proposition 9. — *Pour deux fonctions* V *et* W *surharmoniques* $\geqslant 0$, *les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

β) $V(x) \leqslant W(x)$ à peu près partout sur A (resp. quasi partout sur A);

β') $V(x) \leqslant W(x)$ en tout point de A^i (resp. de A^e).

En effet, β') entraîne β) puisque l'ensemble des points intérieurement (resp. extérieurement) irréguliers *de* A est de capacité intérieure (resp. extérieure) nulle. Inversement, reportons-nous au théorème 2 (n° 19); β) entraîne la condition γ) de ce théorème, et puisque $V_A^i(x) = V(x)$ en tout point de A^i (resp. $V_A^e(x) = V(x)$ en tout point de A^e), on trouve que β') a lieu.

Proposition 10. — *Si l'inégalité* $U^\mu(x) \leqslant V(x)$ (entre le potentiel d'une $\mu \in \mathfrak{M}$ et une fonction V surharmonique $\geqslant 0$) *a lieu à peu près partout sur* A *(resp. quasi partout sur* A*), et si* μ *est portée par* A^i *(resp. par* A^e*), cette inégalité a lieu partout.*

En effet, d'après le théorème 2, on a partout $U^{\mu_A^i} \leqslant V$ (resp. $U^{\mu_A^e} \leqslant V$); or, si μ est portée par A^i, on a $\mu_A^i = \mu$ (resp. : si μ est portée par A^e, on a $\mu_A^e = \mu$).

Un cas particulier de cette proposition fournit le *théorème d'unicité :*

Théorème 4. — *Si deux distributions de* $\mathfrak{M}$ *sont portées par l'ensemble* A^i *des points intérieurement réguliers et donnent naissance à des potentiels à peu près partout égaux sur* A, *elles sont identiques.* Enoncé analogue avec A^e et « quasi partout ».

En particulier, μ_A^i *est la seule distribution portée par* A^i *dont le potentiel soit égal à* U^μ *à peu près partout sur* A *;* μ_A^e *est la seule distribution portée par* A^e *dont le potentiel soit égal à* U^μ *quasi partout sur* A.

24. — Étude du balayage pour les ensembles A^i et A^e.

A titre d'exercice montrons ceci :

Proposition 11. — *Pour l'ensemble* A^i *des points intérieurement réguliers, les deux balayages (intérieur et extérieur) sont identiques et coïncident avec le balayage intérieur relatif à* A. *Pour l'ensemble* A^e *des points extérieurement réguliers, les deux balayages (intérieur et extérieur) sont identiques et coïncident avec le balayage extérieur relatif à* A.

Cet énoncé peut se mettre en formules :

$$(24, 1) \qquad V^i_{A^i} = V^e_{A^i} = V^i_A, \qquad V^i_{A^e} = V^e_{A^e} = V^e_A ;$$

ou encore

$$(24, 2) \qquad \mathfrak{M}^i_{A^i} = \mathfrak{M}^e_{A^i} = \mathfrak{M}^i_A, \qquad \mathfrak{M}^i_{A^e} = \mathfrak{M}^e_{A^e} = \mathfrak{M}^e_A ;$$

ou encore

$$(24, 3) \qquad (A^i)^i = (A^i)^e = A^i, \qquad (A^e)^i = (A^e)^e = A^e.$$

Montrons d'abord que le balayage *intérieur* relatif à A^i (resp. à A^e) est identique au balayage intérieur (resp. extérieur) relatif à A; en formules :

$$(24, 4) \qquad \mathfrak{M}^i_{A^i} = \mathfrak{M}^i_A, \qquad \mathfrak{M}^i_{A^e} = \mathfrak{M}^e_A.$$

En effet, $\mathfrak{M}^i_{A^i}$ (resp. $\mathfrak{M}^i_{A^e}$) est l'adhérence fine de l'ensemble des distributions d'énergie finie portées par A^i (resp. par A^e) ; mais cet ensemble n'est autre que $\mathcal{E}^i_A$ (resp. $\mathcal{E}^e_A$), d'après le corollaire du théorème 3 (n° 23) ; son adhérence fine est donc $\mathfrak{M}^i_A$ (resp. $\mathfrak{M}^e_A$), ce qui établit (24, 4).

Reste à prouver que, pour toute V surharmonique $\geqslant 0$, on a

$$V^i_{A^i} = V^e_{A^i}, \qquad V^i_{A^e} = V^e_{A^e} ;$$

autrement dit, que l'extrémale $V^i_{A^i}$ (resp. $V^i_{A^e}$) est égale à V *quasi partout* sur A^i (resp. sur A^e). Or cette extrémale, on vient de le montrer, n'est autre que V^i_A (resp. V^e_A), et par suite elle est égale à V en tout point de A^i (resp. de A^e). C. Q. F. D.

Remarque : lorsque $A \supset A^e$, on peut affirmer que $A^i = A^e$, car on a alors $A^i \supset (A^e)^i$, et $(A^e)^i = A^e$ d'après (24, 3) ; d'où $A^i \supset A^e$, et par suite $A^i = A^e$. Il en est ainsi, par exemple, lorsque A est *fermé*. De même, lorsque $A \subset A^i$, on prouve que $A^i = A^e$; il en est ainsi notamment lorsque A est *ouvert*.

25. — Une propriété des points réguliers.

Nous raisonnerons sur le cas du balayage *intérieur*, mais les raisonnements et les résultats seraient les mêmes pour le balayage extérieur.

On a vu que μ^i_A est fonction *continue* de μ pour la topologie fine (n° 20). En particulier, si un point variable y tend *finement* vers un point *intérieurement régulier* x, la distribution $(\varepsilon_y)_A^i$ converge *finement* vers la distribution ponctuelle ε_x. Nous allons montrer qu'on a une proposition analogue pour la convergence *vague* des distributions :

THÉORÈME 5. — *Si un point variable y tend (au sens de la topologie habituelle de l'espace euclidien) vers un point x intérieurement (resp. extérieurement) régulier, la distribution balayée $(\varepsilon_y)_A^i$ [resp. $(\varepsilon_y)_A^e$] converge vaguement vers la distribution ponctuelle ε_x.*

Plus généralement : si une μ variable converge *vaguement* vers ε_x, et si le point x est intérieurement (resp. extérieurement) *régulier*, μ_A^i (resp. μ_A^e) *converge vaguement vers* ε_x.

Il suffit de prouver que, si x est intérieurement régulier,

$$\int U^\lambda d\varepsilon_x = \lim_\mu \int U^\lambda d\mu_A^i$$

pour chaque distribution *sphérique* λ (cf. n° 6). Ou encore

$$U^\lambda(x) = \lim_\mu \int U^{\lambda_A^i} d\mu,$$

et pour cela il suffit de prouver que $U^{\lambda_A^i}$ est une fonction *continue* au point x. Or ceci résulte, comme il est bien connu, du fait que $U^{\lambda_A^i}$ est semi-continue inférieurement, majorée par U^λ *continue*, et que, au point x, $U^{\lambda_A^i}(x) = U^\lambda(x)$.

Dans le cas où A est un ensemble *fermé* (son complémentaire Ω est donc *ouvert*), le théorème 5 ci-dessus conduit à la valeur de la limite, en un point frontière x de Ω qui est régulier pour A, de la solution du *problème de Dirichlet* relative à une donnée continue au point x et partout bornée.

VI. — TOPOLOGIE FINE, ENSEMBLES EFFILÉS ET POINTS IRRÉGULIERS

26. — Voisinages dans la topologie fine.

Nous considérons la topologie fine dans l'espace euclidien. On a vu (n° 6) que c'est la moins fine rendant *continus* les potentiels de distributions de $\mathcal{L}$. Elle est plus fine que la topologie habituelle de l'espace.

Tout voisinage d'un point a, au sens de la topologie *fine*, sera dit « *voisinage fin* » du point a. Lorsque nous dirons *voisinage* tout court, il s'agira de voisinage au sens de la topologie habituelle. Tout voisinage est un voisinage fin, mais la réciproque n'est pas vraie. Quand nous parlerons d'ensemble *ouvert* (tout court) il sera sous-entendu que cela signifie « ouvert » au sens de la topologie habituelle.

LEMME. — *Tout voisinage fin d'un point a contient l'intersection d'une boule* B *de centre a, et d'un ensemble défini par une inégalité*

$$(26,\ 1) \qquad U^{\mu}(x) < U^{\mu}(a) + \rho,$$

où μ *est une distribution positive, telle que* $U^{\mu}(a) < +\infty$, *et* ρ *un nombre* > 0. *Réciproquement, l'intersection d'une boule de centre a et d'un ensemble tel que* (26, 1) *est un voisinage fin de a.*

En effet, d'après la définition de la topologie la moins fine rendant continues les fonctions d'une famille donnée (voir [18]), tout voisinage fin de a contient un ensemble défini par un nombre *fini* p d'inégalités simultanées

$$(26,\ 2) \qquad -2\rho < U^{\mu_k}(x) - U^{\mu_k}(a) < 2\rho \qquad (\rho > 0,\ \mu_k \in \mathcal{L}).$$

Mais les inégalités

$$U^{\mu_k}(x) > U^{\mu_k}(a) - \frac{\rho}{p}$$

sont vérifiées dans un ensemble *ouvert* contenant a (à cause de la semi-continuité inférieure des U^{μ_k}), donc dans une *boule* B de centre a. Or, dans B, l'inégalité unique

$$\sum_k U^{\mu_k}(x) < \sum_k U^{\mu_k}(a) + \rho$$

entraîne les inégalités (26, 2). En posant $\sum\limits_k \mu_k = \mu$, on obtient (26, 1).

Reste à montrer que, réciproquement, l'intersection d'une boule B de centre a et d'un ensemble tel que (26, 1) est un *voisinage fin* de a. Il suffit de faire la démonstration lorsque $\mu \in \mathcal{L}$; car, dans le cas général, prenons une distribution sphérique λ telle que $U^{\lambda}(x)$ ait la valeur constante $U^{\mu}(a)$ sur B, et posons $U^{\nu} = \inf(U^{\mu}, U^{\lambda})$;

sur B, l'inégalité (26, 1) équivaut à

$$U^{\nu}(x) < U^{\nu}(a) + \rho,$$

et $\nu \in \mathcal{L}$. Ainsi, supposons que $\mu \in \mathcal{L}$; l'ensemble défini par (26, 1) est évidemment ouvert pour la topologie fine, puisque U^{μ} est une fonction continue pour cette topologie; donc c'est un voisinage fin de a. Comme B est aussi un voisinage fin de a, l'intersection de ces deux voisinages fins est un voisinage fin de a. C. Q. F. D.

Remarque. — Le lemme précédent prouve que tout potentiel est *continu* pour la topologie *fine*.

DÉFINITION. — *Un ensemble* A *sera dit* effilé (30) *au point* a (que a appartienne ou non à A) *s'il existe un voisinage fin de* a *qui ne rencontre pas* A *en d'autre point que* a *éventuellement*. En d'autres termes : A est effilé au point a si a est un point « *finement isolé* » de l'ensemble $A \cup \{a\}$.

Le lemme conduit alors au :

CRITÈRE D'EFFILEMENT (31) : pour que A soit *effilé* en un point a, il faut et il suffit qu'il existe une boule B de centre a, un potentiel U^{μ} fini au point a, et un nombre $\rho > 0$, tels que l'on ait

$$U^{\mu}(x) \geqslant U^{\mu}(a) + \rho$$

en tout point $x \in A \cap B$, sauf éventuellement au point a.

27. — Irrégularité et effilement.

Remarquons tout d'abord que les ensembles A^i et A^e sont fermés pour la topologie fine (nous dirons : *finement fermés*), puisqu'ils sont définis respectivement par les relations

$$U^{\alpha_A^i}(x) = U^{\alpha}(x), \qquad U^{\alpha_A^e}(x) = U^{\alpha}(x),$$

et que U^{α}, $U^{\alpha_A^i}$ et $U^{\alpha_A^e}$ sont des fonctions *continues* pour la topologie fine.

PROPOSITION 12. — *Pour qu'un point* a *soit intérieurement (resp.*

(30) La notion *d'effilement* est due à M. BRELOT [2], qui l'a introduite sans considérer la topologie fine.

(31) M. BRELOT a donné de nombreux autres critères d'effilement (voir [3]).

extérieurement) irrégulier pour un ensemble A, *il faut et il suffit qu'il existe une boule* B *de centre* a, *un potentiel* U^μ *fini au point* a, *et un nombre* $\rho > 0$, *tels que l'on ait* $U^\mu(x) \geqslant U^\mu(a) + \rho$ *à p. p. p. sur* $A \cap B$ *(resp. q. p. sur* $A \cap B$*)*.

Raisonnons, par exemple, sur un point *intérieurement* régulier. La condition est *nécessaire* (et on peut même astreindre μ à appartenir à $\mathcal{E}$) ; en effet, soit ν une distribution telle que $U^{\nu_A^i}(a) < U^\nu(a)$ (par exemple $\nu = \alpha$) ; en vertu de la semi-continuité inférieure de U^ν, on aura $U^\nu(x) \geqslant U^{\nu_A^i}(a) + \rho$ pour un $\rho > 0$ convenable et pour tout x de $A^i \cap B$ (B désignant une boule de centre a et de rayon convenable). Or, on a $U^{\nu_A^i}(x) = U^\nu(x)$ sur $A^i \cap B$; donc, en prenant $\mu = \nu_A^i$, on a $U^\mu(x) \geqslant U^\mu(a) + \rho$ à p. p. p. sur $A \cap B$.

La condition est *suffisante*. Elle entraîne, par exemple, l'existence d'une μ telle que $U^\mu(a) < 1$ et $U^\mu(x) \geqslant 1$ à p. p. p. sur $A \cap B$. Plaçons en a une masse ponctuelle assez petite pour que son potentiel $U^\nu(x)$ soit $\leqslant U^\mu(x)$ hors de B ; alors

$$\inf(U^\mu, U^\nu) \geqslant \inf(1, U^\nu)$$

a lieu à p. p. p. sur A, donc (prop. 9, n° 23) en tout point de A^i. Comme cette inégalité n'a pas lieu au point a, a est intérieurement irrégulier.

Remarque. — La proposition 12 montre le *caractère local* de l'irrégularité (intérieure ou extérieure) d'un point a pour un ensemble A : pour que a soit irrégulier intérieurement (resp. extérieurement) pour A, il faut et il suffit que a le soit pour $A \cap B$, B désignant un voisinage particulier, d'ailleurs quelconque, de a.

Dans le cas d'un point *extérieurement* régulier, on peut renforcer le résultat précédent : pour que a soit extérieurement régulier, il *faut* qu'il existe une boule B de centre a, un potentiel U^ν fini au point a, et un nombre $\rho > 0$ tels que l'on ait $U^\nu(x) \geqslant U^\nu(a) + \rho$ *en tout point* de $A \cap B$, sauf éventuellement au point a. (On peut astreindre ν à être dans $\mathcal{E}$.) Bien entendu, cette condition est suffisante, d'après la proposition 12. Pour voir qu'elle est *nécessaire*, considérons une μ telle que $U^\mu(x) \geqslant U^\mu(a) + \rho$ *quasi partout* sur $A \cap B$; on obtiendra la ν cherchée en ajoutant à μ une distribution λ (qu'on peut choisir dans $\mathcal{E}$) telle que l'on ait $U^\lambda(x) \geqslant U^\mu(a)$ sur l'ensemble C des points de $A \cap B$ où $U^\mu(x) < U^\mu(a) + \rho$, sauf au point a où l'on astreint U^λ à être arbitrairement petit. C'est parce que C est de *capacité exté-*

rieure nulle, qu'on peut facilement construire un tel potentiel U^λ ([32]).

Le résultat qu'on vient d'obtenir, et le critère d'effilement du n° 26, prouvent :

Pour qu'un point a soit extérieurement irrégulier pour A, *il faut et il suffit que* A *soit effilé au point a.* Par conséquent : il faut et il suffit que a soit un point *finement isolé* de $A \cup \{a\}$. Ou encore :

Pour qu'un point a soit *extérieurement régulier* pour A, il faut et il suffit *que tout voisinage fin de a rencontre* A *en au moins un point différent de a.* Ceci signifie que l'ensemble A^e des points extérieurement réguliers est l'ensemble des « *points d'accumulation fine* » de A (c'est-à-dire des points d'accumulation pour la topologie fine) ; ou encore, que A *est l'adhérence fine de l'ensemble obtenu en retranchant de* A *les points finement isolés de* A.

Lorsque A est *fermé* (au sens habituel), A est finement fermé ; $A^e = A^i$ se compose alors des points de A qui ne sont pas finement isolés.

28. — Critère de Wiener ([32 bis]).

Nous renvoyons à M. Brelot ([5], n° 23) pour une démonstration du « critère de Wiener », donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble A soit *effilé* en un point a : k désignant un nombre > 1 (d'ailleurs quelconque), soit S_p l'ensemble des points où le potentiel de ε_a est $> k^p$ et $\leqslant k^{p+1}$; *pour que* A *soit effilé au point a, il faut et il suffit que*

$$\sum_{p=1}^{\infty} k^p c^e(A \cap S_p) < +\infty$$

(le premier membre est une série formée avec les *capacités extérieures* des sections de A par les intersphères S_p).

Cette condition sera donc nécessaire et suffisante pour que a soit *extérieurement irrégulier pour* A. Nous allons en déduire un critère pour que a soit *intérieurement* irrégulier. En effet, A^i désignant l'en-

([32]) On coupe C par des intersphères B_p définies par

$$1/2^{p+1} \leqslant |x-a| < 1/2^p,$$

et on remarque qu'il existe une distribution de masse totale arbitrairement petite, portée par un voisinage arbitraire de B_p, dont le potentiel soit $\geqslant 1$ en tout point de $C \cap B_p$.

([32 bis]) Le « critère de Wiener » a été donné dès 1924 par Wiener pour caractériser les points *irréguliers* d'un ensemble *fermé*. Sa démonstration a été reprise et simplifiée par de nombreux auteurs ; il a été étendu par De la Vallée Poussin au cas d'un ensemble *ouvert* ([16], p. 676), puis donné par Brelot [2] pour caractériser l'*effilement* en général.

semble des points intérieurement réguliers pour A, on a

$$c^i(A \cap S_p) \leqslant c^e(A^i \cap S_p),$$

car la distribution capacitaire extérieure de $A^i \cap S_p$ est $\geqslant 1$ à p. p. p. sur $A \cap S_p$. Cela posé, si a est intérieurement irrégulier pour A, a est extérieurement irrégulier pour A^i (cf. n° 24, prop. 11), et par suite, d'après le critère de Wiener,

$$\sum_p c^i(A \cap S_p) < +\infty.$$

Mais, réciproquement, cette condition entraîne que a est intérieurement irrégulier pour A : en considérant les distributions capacitaires *intérieures* des $A \cap S_p$ pour p assez grand, on fabrique aisément un potentiel U^μ qui satisfait au critère de la proposition 12 (n° 27). En résumé :

THÉORÈME 6. — *Pour qu'un point a soit intérieurement (resp. extérieurement) irrégulier pour un ensemble* A, *il faut et il suffit que la série*

$$\sum_{p=1}^{\infty} k^p c^i(A \cap S_p) \qquad \left[\text{resp. } \sum_{p=1}^{\infty} k^p c^e(A \cap S_p)\right]$$

soit convergente.

Nous laissons au lecteur le soin d'en déduire :

COROLLAIRE 1. — *Pour qu'un point a d'un ensemble* A *soit intérieurement irrégulier pour* A, *il faut et il suffit que a soit irrégulier pour tout compact* K *tel que* $a \in K \subset A$. Le cas où a n'appartient pas à A se ramène au précédent en considérant l'ensemble $A \cup \{a\}$ qui possède les mêmes points irréguliers que A.

COROLLAIRE 2. — *Pour qu'un point a, n'appartenant pas à* A, *soit extérieurement irrégulier pour* A, *il faut et il suffit que a soit irrégulier pour au moins un ensemble ouvert* B *contenant* A. Le cas où $a \in A$ se ramène au précédent en retranchant de A le point a.

D'ailleurs, le corollaire 2 résulte aussi directement du fait qu'un ensemble A, effilé en un point a tel que a n'appartient pas à A, est contenu dans un ensemble *ouvert* effilé au point a (remarque déjà utilisée par BRELOT).

Quant à la caractérisation fournie par le corollaire 1, c'est celle que DE LA VALLÉE POUSSIN donnait comme *définition* de l'irrégularité ([33]) d'un point d'un ensemble A (cet auteur ne considérait que la notion de point *intérieurement* régulier).

Le corollaire 1 exprime aussi : pour que a soit intérieurement irrégulier pour A, il faut et il suffit que tout compact contenu dans $A \cup \{a\}$ soit effilé au point a. On retrouve la définition, donnée par BRELOT [2], d'un ensemble A *effilé intérieurement* en un point a. Le théorème 6 donne alors un critère pour l'effilement intérieur, déjà donné par BRELOT [5].

Comme les points de l'espace où A est effilé intérieurement sont aussi ceux où $A \cap A^i$ est effilé, on voit : pour que A soit *effilé intérieurement* au point a, il faut et il suffit qu'on puisse *retrancher de* A *un ensemble de capacité intérieure nulle,* de manière que l'ensemble restant soit *effilé au point* a.

29. — Usage de la transformation de Lord Kelvin.

Dans ce numéro, nous nous plaçons exclusivement dans le cas de l'espace euclidien de dimension $n \geqslant 3$, la « fonction fondamentale » étant $|x - y|^{2-n}$ ([34]). Un point O étant pris une fois pour toutes comme origine, désignons par x^{-1} le transformé du point x dans *l'inversion* de pôle O et de puissance 1. La transformation de LORD KELVIN fait, à toute fonction $f(x)$, correspondre la fonction

$$f^*(x) = |x|^{2-n} f(x^{-1}).$$

Cette transformation est *réciproque* : on a $f^{**} = f$. Elle conserve la relation d'ordre : si $f(x) \leqslant g(x)$ partout, on a $f^*(x) \leqslant g^*(x)$ partout. Elle transforme les fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ en fonctions surharmoniques $\geqslant 0$. Comme l'inversion transforme tout ensemble de capacité intérieure (resp. extérieure) nulle en un ensemble de même espèce, la transformation de lord Kelvin transforme *l'extrémale* intérieure (resp. extérieure) de V pour A en l'extrémale intérieure (resp. intérieure) de V^* pour l'ensemble A', transformé de A par l'inversion (V désigne une fonction surharmonique $\geqslant 0$).

([33]) [16], p. 377. DE LA VALLÉE POUSSIN ne considérait que des ensembles boréliens bornés, et n'envisageait que les points irréguliers *appartenant à l'ensemble*.

([34]) Toutefois, on aurait des propriétés analogues pour la fonction fondamentale $|x - y|^{\alpha - n}$, avec $0 < \alpha < 2$ (« potentiels d'ordre α » de M. RIESZ ; voir [14], pp. 13-14).

Précisons : toute fonction surharmonique $\geqslant 0$ s'écrit d'une seule manière sous la forme

$$aU^{\varepsilon} + U^{\mu} + b,$$

où a et b sont des constantes $\geqslant 0$, ε désigne la distribution formée d'une masse $+1$ à l'origine, et μ une distribution de $\mathfrak{M}$ pour laquelle l'origine ne porte pas de masse. Dans la transformation de lord Kelvin, U^{ε} devient la constante 1, et réciproquement ; U^{μ} se transforme dans le potentiel d'une distribution μ^* définie par

$$d\mu^*(x) = |x|^{n-2} d\mu(x^{-1})\,;$$

μ^* appartient à $\mathfrak{M}$ et ne comporte pas de masse à l'origine.

Cela posé, soit à interpréter la condition pour que O soit *irrégulier* (intérieurement ou extérieurement) pour un ensemble A ; nous supposerons que O n'appartient pas à A, et nous désignerons par A′ le transformé de A dans l'inversion de pôle O et de puissance 1. De deux choses l'une : ou bien O est intérieurement régulier pour A, ce qui signifie que l'extrémale intérieure de U^{ε} pour A est U^{ε} ; alors, par la transformation de lord Kelvin, l'extrémale intérieure de la constante 1 pour A′ est la constante 1 ; ou bien O est intérieurement irrégulier pour A, ce qui signifie que l'extrémale intérieure de U^{ε} pour A est le potentiel d'une distribution qui ne charge pas O (puisqu'elle est portée par l'ensemble des points intérieurement réguliers) ; alors, par la transformation de lord Kelvin, l'extrémale intérieure de la constante 1 pour A′ est un véritable *potentiel* U^{μ^*}. Dans ce dernier cas, μ^* est *la distribution capacitaire intérieure de* A′.

On raisonne de même pour l'irrégularité *extérieure*. En résumé :

Pour que l'ensemble A *soit effilé à l'origine* O *(resp. effilé intérieurement* au point O*), il faut et il suffit que l'ensemble* A′, *transformé de* A *par inversion de pôle* O, *possède une distribution capacitaire extérieure (resp. intérieure).*

D'ailleurs, la condition relative à A′ peut s'exprimer directement par un critère du type Wiener : soient k un nombre > 0 et < 1, et T_p l'ensemble des points où le potentiel de ε est $< k^p$ et $\geqslant k^{p+1}$; *pour que* A′ *possède une distribution capacitaire intérieure (resp. extérieure), il faut et il suffit que la série*

$$\sum_{p=1}^{\infty} k^p c^i(A \cap T_p) \qquad \left[\text{resp. } \sum_{p=1}^{\infty} k^p c^e(A \cap T_p)\right]$$

soit convergente.

Le critère permet de fabriquer facilement un ensemble A' qui possède une distribution capacitaire tout en ayant une *capacité infinie*; en effet, on peut voir facilement que si $c^i(A')$ [resp. $c^e(A')$] est finie, alors $c^i(A' \cap T_p)$ [resp. $c^e(A' \cap T_p)$] tend vers zéro quand p augmente indéfiniment. On construira donc un ensemble A' tel que les $c^i(A' \cap T_p)$ [resp. $c^e(A' \cap T_p)$] soient *bornés* sans tendre vers zéro (35).

VII. — APPENDICE : DIVERSES PROPRIÉTÉS EXTRÉMALES DES DISTRIBUTIONS BALAYÉES

A titre de complément, nous allons grouper ici diverses propriétés extrémales de μ_A^i et μ_A^e lorsque μ est une distribution *d'énergie finie.* Au paragraphe III, nous n'en avons indiqué qu'une partie, pour ne pas alourdir l'exposé.

Dans tout ce qui suit, μ est une distribution de $\mathcal{E}$, donnée une fois pour toutes. Rappelons la définition des μ-capacités (n° 15) :

$$c_\mu^i(A) = \int U^\mu d\mu_A^i = \|\mu_A^i\|^2,$$
$$c_\mu^e(A) = \int U^\mu d\mu_A^e = \|\mu_A^e\|^2.$$

Tous les résultats qui vont suivre vaudront aussi pour les capacités proprement dites, en remplaçant, dans les énoncés, le potentiel U^μ par la constante 1, mais à condition, bien entendu, de ne considérer que des ensembles de capacité intérieure (resp. extérieure) *finie*.

PROPRIÉTÉ I. — *La quantité* $-c_\mu^i(A)$ [*resp.* $-c_\mu^e(A)$] *est égale à la borne inférieure de*

$$I_\mu(\nu - \lambda) = \int (U^\nu - U^\lambda - 2U^\mu)(d\nu - d\lambda)$$

(cf. intégrale de Gauss) *lorsque* ν *et* λ *parcourent* $\mathcal{E}_A^i$ *(resp.* $\mathcal{E}_A^e$*). Cette borne inférieure n'est atteinte que pour* $\nu - \lambda = \mu_A^i$ (resp. $\nu - \lambda = \mu_A^e$).

(35) Dire que A' possède une capacité intérieure (resp. extérieure) *finie*, c'est dire que A' est « effilé au point à l'infini », au sens de M. BRELOT : voir en [5], p. 31, un critère qui conduit facilement à celui-ci.

Cela résulte de

$$\text{(I)} \qquad \|\nu-\lambda-\mu^i_A\|^2 = I_\mu(\nu-\lambda)+c^i_\mu(A) \qquad \text{pour } \nu\in\mathcal{E}^i_A,\ \lambda\in\mathcal{E}^i_A\,;$$
$$\text{(I')} \qquad \|\nu-\lambda-\mu^e_A\|^2 = I_\mu(\nu-\lambda)+c^e_\mu(A) \qquad \text{pour } \nu\in\mathcal{E}^e_A,\ \lambda\in\mathcal{E}^e_A.$$

La relation (I), par exemple, s'obtient immédiatement en remarquant que

$$\int U^\mu(d\lambda-d\nu)=\int U^{\mu^i_A}(d\lambda-d\nu), \qquad \|\mu^i_A\|^2=c^i_\mu(A).$$

Propriété II. — *La μ-capacité intérieure $c^i_\mu(A)$ [resp. extérieure $c^e_\mu(A)$] est égale à la borne inférieure de l'énergie $\|\nu-\lambda\|^2$ des différences de distributions de $\mathcal{E}^i_A$ (resp. de $\mathcal{E}^e_A$) telles que*

$$\int U^\mu(d\nu-d\lambda)=c^i_\mu(A) \qquad \left[\text{resp. } \int U^\mu(d\nu-d\lambda)=c^e_\mu(A)\right].$$

Cette borne inférieure ne peut être atteinte que pour $\nu-\lambda=\mu^i_A$ (resp. $\nu-\lambda=\mu^e_A$).

En effet, en tenant compte de cette relation dans l'expression de $I_\mu(\nu-\lambda)$, puis portant dans (I) [resp. (I')], on trouve

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(II)} & \|\nu-\lambda-\mu^i_A\|^2=\|\nu-\lambda\|^2-c^i_\mu(A)\\ \text{resp. (II')} & \|\nu-\lambda-\mu^e_A\|^2=\|\nu-\lambda\|^2-c^e_\mu(A)\end{array}\right\}\ \text{moyennant les hypothèses.}$$

Dans le cas où A est *compact* et où $U^\mu(x)=1$ sur A, l'interprétation physique est évidente : sur un « conducteur » A, la distribution capacitaire (distribution d'équilibre) μ_A réalise le *minimum de l'énergie* pour toutes les distributions de masses (de signe quelconque) portées par A, dont la masse totale a la valeur $c(A)$.

Propriété III. — $c^i_\mu(A)$ [*resp.* $c^e_\mu(A)$] *est égale à la borne inférieure de l'intégrale $\int U^\mu d\nu$ pour toutes les distributions positives ν telles que $U^\nu(x)\geqslant U^\mu(x)$ à peu près partout (resp. quasi partout) sur* A.

Faisons la démonstration pour la capacité *intérieure*. Si $U^\nu\geqslant U^\mu$ à p. p. p. sur A, on a (cf. n° 19, théorème 2)

$$\int U^\nu d\mu^i_A \geqslant \int U^\mu d\mu^i_A \qquad \text{puisque } \mu^i_A\in\mathcal{E}^i_A.$$

Donc

$$\int U^\mu d\nu \geqslant \int U^{\mu^i_A} d\nu = \int U^\nu d\mu^i_A \geqslant \int U^\mu d\mu^i_A = c^i_\mu(A).$$

Propriété IV. — $c^i_\mu(A)$ [*resp.* $c^e_\mu(A)$] *est égale à la borne infé-*

rieure de l'énergie $\|\nu-\lambda\|^2$ *des différences de distributions de* $\mathcal{E}^i_A$ *(resp.* $\mathcal{E}^e_A$*) telles que*

$$(h)\qquad U^\nu \geqslant U^\lambda + U^\mu \quad \text{à p. p. p. sur A (resp. q. p. sur A)};$$

cette borne inférieure n'est atteinte que si $\nu-\lambda=\mu^i_A$ [resp. $\nu-\lambda=\mu^e_A$].

Raisonnons par exemple en supposant

$$(h)\qquad U^\nu \geqslant U^\lambda + U^\mu \qquad \text{à p. p. p. sur A};$$

on a

$$\|\nu-\lambda-\mu^i_A\|^2 = \|\nu-\lambda\|^2 - 2\int (U^\nu - U^\lambda)\,d\mu^i_A + c^i_\mu(A),$$

et

$$\int (U^\nu - U^\lambda)\,d\mu^i_A \geqslant \int U^\mu\,d\mu^i_A = c^i_\mu(A) \qquad \text{(cf. théorème 2)},$$

d'où

$$(\text{IV})\quad \|\nu-\lambda-\mu^i_A\|^2 \leqslant \|\nu-\lambda\|^2 - c^i_\mu(A) \text{ moyennant l'hypothèse } (h).$$

Propriété V. — $c^i_\mu(A)$ [*resp.* $c^e_\mu(A)$] *est égale à la borne supérieure de l'énergie* $\|\nu\|^2$ *et de l'intégrale* $\int U^\mu d\nu$ *relatives aux* ν *de* $\mathcal{E}^i_A$ *(resp. de* $\mathcal{E}^e_A$*) telles que* $U^\nu \leqslant U^\mu$ *partout; cette borne n'est atteinte que pour* $\nu=\mu^i_A$ *(resp.* $\nu=\mu^e_A$*).*

C'est la proposition 5 du n° 15, qui repose sur les inégalités

$$(\text{V})\qquad \|\nu-\mu^i_A\|^2 \leqslant c^i_\mu(A) - \int U^\mu d\nu \leqslant c^i_\mu(A) - \|\nu\|^2 \quad \text{pour } \nu\in\mathcal{E}^i_A,\ U^\nu \leqslant U^\mu;$$

$$(\text{V}')\qquad \|\nu-\mu^e_A\|^2 \leqslant c^e_\mu(A) - \int U^\mu d\nu \leqslant c^e_\mu(A) - \|\nu\|^2 \quad \text{pour } \nu\in\mathcal{E}^e_A,\ U^\nu \leqslant U^\mu.$$

Propriété VI. — Considérons la famille $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) des distributions positives ν qui satisfont simultanément aux deux conditions

$$(\Gamma)\qquad U^\nu(x) \leqslant U^\mu(x) \qquad \text{partout};$$
$$(\Delta)\qquad U^\nu(x) = U^\mu(x) \qquad \text{à p. p. p. sur A}$$
$$[\text{resp. } (\Delta')\qquad U^\nu(x) = U^\mu(x) \qquad \text{q. p. sur A}].$$

Alors $-c^i_\mu(A)$ [*resp.* $-c^e_\mu(A)$] *est égal à la borne supérieure de l'intégrale* $I_\mu(\nu)$ *pour les* ν *de* $\mathcal{F}$ *(resp. de* $\mathcal{F}'$*). Cette borne n'est atteinte que pour* $\nu=\mu^i_A$ *(resp.* $\nu=\mu^e_A$*)* (36).

(36) Ces résultats complètent et précisent, en les simplifiant, un théorème de A. F. Monna [13], qui se trouve ainsi débarrassé d'hypothèses superflues sans rapport avec l'essentiel du problème.

En effet, on a

$$\text{(VI)} \qquad \|\nu - \mu_A^i\|^2 \leqslant -I_\mu(\nu) - c_\mu^i(A) \qquad \text{pour } \nu \in \mathcal{F};$$
$$\text{(VI}') \qquad \|\nu - \mu_A^e\|^2 \leqslant -I_\mu(\nu) - c_\mu^e(A) \qquad \text{pour } \nu \in \mathcal{F}'.$$

Ces relations s'écrivent encore

$$\text{(VI, } a) \qquad \|\nu - \mu_A^i\|^2 \leqslant \|\mu - \mu_A^i\|^2 - \|\mu - \nu\|^2 \qquad \text{pour } \nu \in \mathcal{F};$$
$$\text{(VI}', a) \qquad \|\nu - \mu_A^e\|^2 \leqslant \|\mu - \mu_A^e\|^2 - \|\mu - \nu\|^2 \qquad \text{pour } \nu \in \mathcal{F}'.$$

Pour les démontrer il suffit de prouver

$$(\mu - \nu, \nu) - (\mu - \nu, \mu_A^i) \geqslant 0 \qquad \text{pour } \nu \in \mathcal{F};$$
$$(\mu - \nu, \nu) - (\mu - \nu, \mu_A^e) \geqslant 0 \qquad \text{pour } \nu \in \mathcal{F}'.$$

Or $(\mu - \nu, \nu) = \int (U^\mu - U^\nu) d\nu$ est $\geqslant 0$ d'après (Γ) ; en outre $(\mu - \nu, \mu_A^i)$ est nul si (Δ) a lieu (cf. corollaire du théorème 2), et $(\mu - \nu, \mu_A^e)$ est nul si (Δ') a lieu. C. Q. F. D.

Remarque. — Les relations (VI a) et (VI′ a) sont susceptibles d'être interprétées en langage géométrique d'espace de Hilbert (dans l'espace $\mathcal{E}$ des distributions positives d'énergie finie) : la famille $\mathcal{F}$ est contenue dans la *boule* dont un diamètre a pour extrémités μ et μ_A^i ; la famille $\mathcal{F}'$ est contenue dans la boule dont un diamètre a pour extrémités μ et μ_A^e.