ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

MARCEL BRELOT

Étude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques positives au voisinage d'un point-frontière irrégulier

Annales de l'université de Grenoble, tome 22 (1946), p. 205-219

<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1946__22__205_0>

ÉTUDE GÉNÉRALE DES FONCTIONS HARMONIQUES OU SURHARMONIQUES POSITIVES AU VOISINAGE D'UN POINT-FRONTIÈRE IRRÉGULIER *

par Marcel BRELOT

I. — INTRODUCTION

1. On sait depuis longtemps que dans l'espace euclidien R_τ (à $\tau \geqslant 2$ dim.), une fonction harmonique et bornée dans un sens au voisinage d'un point O, ce point exclu, est de la forme

$$Kh(OM) + v(M)$$

où v est harmonique (après prolongement convenable en O) au voisinage complet de O, K une constante et où :

$$h(r) = \log 1/r \quad \text{pour} \quad \tau = 2, \qquad h(r) = 1/r^{\tau-2} \quad \text{pour} \quad \tau \geqslant 3\ (^1).$$

Si on considère alors un domaine borné Ω dont un point-frontière O est *isolé,* il est immédiat que les fonctions harmoniques > 0 dans Ω, qui admettent en tout point-frontière $\neq$ O une lim. sup. finie, nulle si le point est régulier, sont proportionnelles, d'ailleurs à la fonction de Green G(O, M) classique de $(\Omega \cup O)$.

* Travail présenté (sauf le chapitre final des exemples) comme communication écrite au congrès de l'AFAS à Nice (9-14 septembre 1946) et brièvement exposé dans une conférence à Lausanne le 25 septembre 1946.

(1) Cela résulte facilement du développement en séries en r et $1/r$ (avec coefficients fonctions trigonométriques ou de Laplace) qui permet d'ailleurs des hypothèses plus faibles et fournit des résultats plus généraux. Voir « Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point », *Act. Sc. et ind.*, n° 139, Hermann, 1934 (noté A), p. 21 et un historique dans les « *Sitzungsberichte der Berliner math. Ges.* », XXXI, p. 46 (1932). Indiquons seulement que Picard a donné sur ce sujet longtemps peu étudié, et en le publiant seulement en 1923 (*C. R.*, t. 176, pp. 933 et 1025) une forme moins générale (il supposait que u reste borné ou tend vers $+\infty$ quand M $\to$ 0) que l'énoncé du texte qui se trouve à peu près chez Bocher (*Bull. Am. Math. Soc.*, IX, 1903, p. 455).

Ce résultat d'unicité à un facteur près explicité par M. Bouligand, l'amenait à poser la même question avec un point-frontière O non nécessairement isolé et à appeler principe de Picard ou des singularités positives, le résultat d'unicité paraissant valable dans des cas étendus; c'est là un sujet important encore trop peu approfondi (2).

2. Les propriétés locales précédentes des fonctions harmoniques ont déjà reçu de larges extensions dans l'étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point (exclu) (voir A). Nous allons ici, à partir de là, faire une extension d'une autre nature en remplaçant le point O isolé (à distance finie) par un ensemble fermé effilé en O (3) c'est-à-dire en étudiant l'allure des fonctions au *voisinage d'un point-frontière irrégulier*.

L'outil essentiel sera encore la *pseudo-limite* (voir C) dont l'existence entraîne la « quasi-limite » de même valeur, antérieurement utilisée (4). C'est la limite dans la « topologie fine » de H. Cartan (ainsi appelée dans son mémoire ci-après), c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continues les fonctions sousharmoniques et dont les voisinages (dits pseudo-voisinages) d'un point O se trouvent être les complémentaires des ensembles effilés en O (et ne contenant pas O). Ainsi, généralisant des résultats antérieurs obtenus dans le cas harmonique grâce à cette pseudo-limite mais avec des restrictions (5), on verra pour l'essentiel que $u > 0$ harmonique ou seulement surharmonique admet toujours en O une pseudo-limite > 0 finie ou non et que $u(M)/h(OM)$ admet une pseudo-limite finie (que l'on sait déjà être nulle lorsque u est de plus solution du problème de Dirichlet même ramifié.

(2) Voir BOULIGAND, « Fonctions harmoniques, Principes de Picard et de Dirichlet », *Mémorial des Sc. Math.*, XI, 1926. Ce principe joue un rôle dans la recherche capitale d'une représentation intégrale des fonctions harmoniques positives dans un domaine : Voir MARIA et MARTIN, *Duke Math. Journal*, vol. 2, p. 517 (1936); GREEN, *Am. J. of Math.*, t. 61, p. 609 (1939); MARTIN, *Transact*, t. 49, p. 137 (1941). Ce dernier mémoire, très important, contient au fond une nouvelle présentation très modifiée de ce principe et sur laquelle je reviendrai ailleurs.

(3) Un ensemble est effilé en $O \neq \mathcal{R}_\tau$, s'il existe une fonction sousharmonique $\geqslant 1$ en O et $\leqslant 0$ en tout point de E, $\neq$ O et assez voisin. Voir la théorie dans les articles : *J. de Math.*, t. 19, p. 319 (1940) (noté B), t. 24, p. 1 (1945) et surtout *Bull. Sc. Math.*, t. 68, p. 12 (1944), article essentiel (noté C).

(4) Voir A, p. 29, 37, 49 puis l'article des *C. R.*, t. 196, p. 737 (1933); citons aussi la notion qui correspondrait, comme la pseudo-limite aux ensembles effilés, à celle d'ensemble admettant en O une densité capacitaire nulle (FROSTMAN, thèse, *Lund*, 1935, p. 57).

(5) Voir *C. R.*, t. 220, p. 676 (1945) (article noté D) et aussi le mémoire précédent ci-contre sur le problème de Dirichlet ramifié (noté E).

Voir E). Quant au principe des singularités positives pour les fonctions harmoniques et par exemple pour un domaine borné, il sera valable en un point irrégulier en toute généralité dans le plan mais non dans les espaces supérieurs où on le rend exact en imposant pour chaque u que u/h soit borné sur chaque suite « régulière » tendant vers O (et dans les deux cas u/h sera borné au voisinage de O). On complètera par les résultats que donnent à l'infini une inversion et la transformation de Kelvin et en se plaçant dans l'espace rendu compact $\overline{R}_\tau$ par adjonction du point $\mathcal{R}_\tau$ à l'infini [6]. Cela mettra en évidence, après M. Bouligand, l'intérêt du cas où $\mathcal{R}_\tau$ est point-frontière non négligeable, autrement dit de mesure harmonique > 0 (c'est-à-dire encore devenant irrégulier par inversion) (voir F, p. 323) et nous amènera à examiner dans $\overline{R}_\tau$ la notion la plus générale de fonction de Green pour un ensemble ouvert.

Pour un ensemble E, on notera encore $\overline{E}$ et $\overset{*}{E}$ l'adhérence et la frontière et on notera de la même manière un point et l'ensemble qu'il constitue.

II. — EXISTENCE ET PROPRIÉTÉS DES PSEUDO-LIMITES

3. Théorème I. — *Soit u sousharmonique dans Ω ouvert, dont $O \neq \mathcal{R}_\tau$, est point-frontière irrégulier.*

Si u est bornée supérieurement dans un voisinage ou seulement un pseudo-voisinage, u admet en O, une pseudo-limite Λ_u finie ou non (*).

On se ramène à $u \leqslant 0$ au voisinage de O.

Introduisons au voisinage des masses $\leqslant 0$ dont le potentiel v est fini en O mais admet, si O n'est pas point-frontière isolé, la limite $-\infty$ pour $M \to O$ ($M \neq O$, $M \in C\Omega$) (voir D); v admet d'ailleurs en O la pseudo-limite $v(O)$. Or $u + v$ pris sur Ω admet aux points-frontière $P \neq O$ voisins de O, s'il y en a, une lim. sup. majorée par $v(P)$ donc tendant vers $-\infty$ quand $P \to O$ sur $(\overset{*}{\Omega} - O)$.

Si $u + v \to -\infty$ pour $M \in \Omega$, $M \to O$, u admet bien en O une pseudo-limite égale à $-\infty$. Sinon $\limsup_{M \in \Omega,\, M \to O} u + v = \lambda$ fini, et $u + v$ admet en O une pseudo-limite égale à λ (voir C n° 12); u y admettra la pseudo-limite $\lambda - v(O)$ finie.

(6) Sur la théorie des fonctions harmoniques dans $\overline{R}_\tau$, voir *Annales de l'E. N. S.*, t. 61, p. 301 (1944) (article noté F auquel on renvoie pour la terminologie).

(*) J'ajoute (sur les épreuves) que pour une suite décroissante de telles $u \leqslant 0$, on peut passer à la limite sur la pseudo-limite.

Remarque. — *Si de plus* $u < 0$ *dans un peudo-voisinage de* O, $\Lambda_u < 0$.

Il n'y a qu'à considérer au voisinage de O un domaine ω où $u < 0$ et admettant O comme point-frontière irrégulier. Si l'on ne veut pas utiliser la fonction de Green, introduisons dans ω un compact non polaire σ et comparons u dans $\omega - \sigma$ avec la solution du problème de Dirichlet pour la donnée nulle sur $\overset{*}{\omega}$ et valant u sur $\overset{*}{\sigma}$. Cette solution sera < 0 et $\geqslant u$; elle admet en O une lim. inf. nécessairement < 0 (sinon O serait régulier) et une pseudo-limite de même valeur (voir C n° 11, théorème 9). On peut aussi achever grâce aux propriétés du μ_O (voir p. ex. E n° 21).

THÉORÈME 2. — *Soit* u *sousharmonique dans* Ω *ouvert, dont* $O \neq \mathcal{R}_\tau$ *est point-frontière irrégulier. Si* $u(M)/h(OM)$ *est bornée supérieurement dans un pseudo-voisinage de* O, u/h *admet en* O *une pseudo-limite* $\Lambda_{u/h}$ *finie.*

On se ramène à u/h bornée supérieurement au voisinage de O.

On chargera le voisinage de O, mais non O, de masses $\leqslant 0$ telles que le potentiel w satisfasse (si O non isolé) à

$$w/h \to -\infty (M \neq O,\ M \in C\Omega,\ M \to O)$$

et on remarque que w/h admet en O une pseudo-limite nulle pour $M \to O (M \neq O)$.

Or $\operatorname*{lim.\,sup.}_{M \in \Omega,\ M \to O} \dfrac{u+w}{h(OM)} = \lambda$ ne peut être $-\infty$ puisque O est irrégulier (F n° 14) donc est fini et d'autre part $\dfrac{u+w}{h}$ pris sur Ω admet aux points-frontière P de Ω voisins de O, s'il y en a, une lim. sup. tendant vers $-\infty$ comme $w(P)$ pour $P \neq O$, $P \to O$. Donc (C n° 12), $\dfrac{u+w}{h}$ admet la pseudo-limite λ et de même u/h.

4. *Remarque.* Si $\Lambda_{u/h} \neq 0$ on conclut à une pseudo-limite infinie (et du même signe) pour u, ce qui étend un peu le théorème 1.

Le cas de $\Lambda_{u/h} = 0$ présente des difficultés que montre la solution du problème de Dirichlet (E n° 21). On peut cependant apporter un complément qui améliore le rapprochement avec l'étude au voisinage d'un point isolé (voir A p. 23-24 à 37).

LEMME 1. — *Soit* u *sousharmonique dans* Ω, *dont* $O \neq \mathcal{R}_\tau$ *est point-frontière. On suppose que* $u(M)/h(OM)$ *est bornée supérieu-*

rement au voisinage de O *et que, aux points-frontière réguliers* $\neq$ O *et voisins de* O *s'il y en a,* u *admette une lim. sup.* $\leqslant 0$. *Alors si* O *est régulier ou si,* O *étant irrégulier,* $\Lambda_{u/h} \leqslant 0$, u *est bornée supérieurement au voisinage de* O.

En effet u^+ prolongé par o donne une fonction u' quasi-sousharmonique au voisinage de O (O exclu) et u'/h admet une pseudo-limite λ qui d'après les hypothèses est nécessairement $\leqslant 0$. La moyenne de u'/h sur la sphère $\text{OM} = r$ a donc pour $r \to 0$ la limite $\lambda \leqslant 0$. Il s'ensuit (A p. 36, 37 ou 38) que u' est bornée supérieurement au voisinage de O.

THÉORÈME 3. — *Soit* u *sousharmonique dans* Ω*; on suppose que* $C\Omega$ *est en* $O \neq \mathcal{R}_\tau$ *non seulement effilé mais, si* O *n'est pas isolé de* $C\Omega$, *effilé d'allure* $h(\text{OM})$ *(voir C nos 4, 7, 10). Si* u/h *est bornée supérieurement au voisinage de* O, u *admet en* O *une pseudo-limite* Λ_u *qui de plus est* $< +\infty$ *si* $\Lambda_{u/h} \leqslant 0$.

Il suffit d'examiner le cas $\Lambda_{u/h} \leqslant 0$. Soit V un potentiel de masses $\leqslant 0$ voisines de O tel que V(O) soit fini, mais que (si O est non isolé de $C\Omega$), $V/h \to -\infty$ sur $C\Omega(M \neq O,\ M \to O)$. Alors d'après le lemme, $u + V$ est borné supérieurement sur Ω au voisinage de O et le théorème (1) permet d'achever [7].

5. *Étude à l'infini.* — Dans le plan étude immédiate au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$ par simple inversion. Introduction des pseudo-limites Λ_u, $\Lambda_{u/\log \text{OM}}$ (indépendantes de O).

Pour $\tau \geqslant 3$ la transformation de Kelvin donne des résultats d'allure différente.

THÉORÈME 4. — *Soit dans* $\overline{R}_\tau (\tau \geqslant 3)$ *une fonction sousharmonique* u *dans* Ω *ouvert, dont* $\mathcal{R}_\tau$ *est un point frontière formant un ensemble non négligeable. On pose dans l'inversion* M, $M'(\text{OM}\,.\,\text{OM}' = 1)$: $v(M') = u(M)$.

1° *Si* $u\,.\,\overline{\text{OM}}^{\tau-2}$ *est bornée supérieurement,* $v/\overline{\text{OM}'}^{\tau-2}$ *admet une pseudo-limite en* O.

2° *Si* u *est bornée supérieurement,* v *admet une pseudo-limite* λ_u *finie en* O. *De plus si* $C_{\overline{R}_\tau}\Omega$ *est effilé en* $\mathcal{R}_\tau$ (E p. 313), $v(M')/\overline{\text{OM}'}^{\tau-2}$ *admet en* O *une pseudo-limite qui est* $< +\infty$ *si* $\lambda \leqslant 0$.

Ces diverses pseudo-limites sont indépendantes de O.

[7] Si ω est l'intersection de Ω et d'un petit voisinage ouvert de O, on peut au lieu de V introduire $H^\omega_{\mathcal{R}}$ et raisonner sur $u - H^\omega_{\mathcal{R}}$, en utilisant les propriétés de H (voir C).

On pourrait avec un langage convenable tout expliciter au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$ [8] et on aperçoit déjà dans ce sens des propriétés de « quasi-limite » en $\mathcal{R}_\tau$.

Ajoutons seulement l'énoncé correspondant au lemme 1 :

Lemme 2. — Soit dans $\overline{\mathrm{R}}_\tau$ $(\tau \geqslant 3)$ u sousharmonique dans Ω dont $\mathcal{R}_\tau$ est point-frontière. On suppose que u est bornée supérieurement et qu'aux points-frontière réguliers $\neq \mathcal{R}_\tau$ et voisins de $\mathcal{R}_\tau$ s'il y en a, lim. sup. $u \leqslant 0$, Alors si $\mathcal{R}_\tau$ est négligeable ou si dans le cas contraire le λ_u précédent est $\leqslant 0$, $u \,.\, \overline{\mathrm{OM}}^{\tau-2}$ est bornée supérieurement au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$.

III. — LE PRINCIPE DES SINGULARITÉS POSITIVES EN UN POINT-FRONTIÈRE IRRÉGULIER

6. Comme introduction, importante en soi, tirons des conséquences de ce qui précède :

THÉORÈME 5 [9]. — *Soit dans Ω, de complémentaire non polaire dans $\overline{\mathrm{R}}_\tau$, une fonction harmonique u, bornée au voisinage de tout point-frontière sauf $\mathrm{P} \in \overset{*}{\Omega}$, s'annulant aux points-frontière réguliers $\neq \mathrm{P}$. Si au voisinage de P :*

a) *pour* $\mathrm{P} \neq \mathcal{R}_\tau$ $u/h(\mathrm{PM})$ *est bornée en module,*

b) *pour* $\tau = 2$ $\mathrm{P} = \mathcal{R}_2$, $u/\log \mathrm{OM}$ *est bornée en module* $(\mathrm{O} \neq \mathcal{R}_2)$,

c) *pour* $\tau \geqslant 3$ $\mathrm{P} = \mathcal{R}_\tau$, u *est bornée en module,*

alors u prolongée par 0 *est hors* P, *soit $\geqslant 0$ et quasi-sousharmonique, soit $\leqslant 0$ et quasi-surharmonique (et il suffit même que la limitation soit supposée seulement dans un sens, dans* (a) *et* (b) *si* $\tau = 2$ *ou si* P *est régulier, dans* (c) *si* $\mathcal{R}_\tau$ *est négligeable).*

De plus u sera nulle dans les cas (a) *et* (b) *si* P *est régulier ou bien*

[8] Voir F, p. 314, remarque. Le critère qu'on y donne en $\mathcal{R}_\tau$ d'un ensemble dont l'inverse est effilé en O définirait des ensembles dits par exemple « semi-effilés ». Il comprendrait un « S-voisinage », une « S-limite » d'où des énoncés communs pour $\tau \geqslant 2$. On peut même chercher, grâce à h_{Q} (F, p. 325), à réunir tous les cas du point-frontière en $\mathcal{R}_\tau$ ou non, mais tout cela semble peu utile.

[9] On ne fait ici qu'étendre et développer l'étude de Bouligand sur le domaine dont $\mathcal{R}_\tau$ est point-frontière non négligeable et à laquelle déjà se rattache notre lemme 1. Voir BOULIGAND, *Annales de la Société polonaise de math.*, 1925, p. 98-100.

Le cas de P régulier (ou $\mathcal{R}_\tau$ négligeable) dérive aussi d'un critère de *régularité* à rappeler ici (F, p. 323) : existence sur Ω au voisinage de $\mathrm{P} \neq \mathcal{R}_\tau$ d'une fonction harmonique > 0 croissant strictement plus vite que $h(\mathrm{PM})$.

si $\Lambda_{u/h}$ ou $\Lambda_{u/\log OM}$ *est nul, et dans le cas* (c) *si* $\mathcal{R}_\tau$ *est négligeable ou si* $\lambda_u = 0$ (*et il suffit même pour* $\tau = 2$ *et* P *irrégulier que la limitation dans* (a) *et* (b) *ait lieu dans un sens*).

Prenons par exemple $P \neq \mathcal{R}_\tau$.

Si P est régulier, supposons u/h bornée supérieurement. D'après le lemme 1, $u \leqslant 0$ et si u/h est bornée en module on conclut donc

$$u = 0.$$

Si P est irrégulier, supposons u/h bornée supérieurement. Il existe $\Lambda_{u/h}$ fini et dans le cas plan l'ensemble où

$$\Lambda - \varepsilon\, u/h < \Lambda + \varepsilon$$

de complémentaire effilé, contient des circonférences arbitrairement petites de centre P, d'où résulte que u/h est bornée en module au voisinage de P.

Supposons en général u/h bornée en module. Si les ouverts où $u > 0$, $u < 0$ étaient non vides ils admettraient P comme point-frontière irrégulier. D'où la propriété du signe, puis si $\Lambda_{u/h} = 0$ la conséquence $u = 0$.

Raisonnements analogues dans les autres cas.

Remarque. — Si dans le théorème 5, u est $\geqslant 0$ et si P est irrégulier ou non négligeable, les quantités $\Lambda_{u/h}$ $\Lambda_{u/\log OM}$ ou λ_u valent la limite sup. en P des indices et aussi leurs « moyennes-limite » en P lorsque u est prolongée par 0 (limites des moyennes sur une sphère ou circonférence de centre $P \neq \mathcal{R}_\tau$ ou du centre O quelconque si $P = \mathcal{R}_\tau$, lorsque le rayon tend vers 0 ou respectivement vers l'infini). Cela résulte de A (p. 36-38).

7. Si avec le même Ω, P est point-frontière, $\neq \mathcal{R}_\tau$ pour $\tau \geqslant 3$, considérons u sousharmonique $\geqslant 0$ dans $\overline{R}_\tau - P$, harmonique dans Ω, nulle quasi-partout ailleurs; *les conditions* (a) *et* (b) *équivalent à ce que u admette en* P *un flux*[10] *fini,* alors égal à $\varphi_\tau . \Lambda$ avec : φ_τ flux de h(OM) entrant dans la sphère (cercle) de centre O ; Λ pseudo-limite des rapports considérés u/h ou $u/\log$ dans Ω (ou dans $\overline{R}_\tau - P$) ; u est nul si P est régulier.

L'étude de u pour P *irrégulier* constitue une introduction de la fonction de Green généralisée et une forme particulière du principe des singularités positives.

[10] Voir A, p. 25 et E, p. 305.

LA FONCTION DE GREEN. THÉORÈME 6 [11]. — *Soit dans* $\overline{R}_\tau$, Ω *ouvert de complémentaire non polaire. Si* $P\in\Omega$ *ou est point-frontière irrégulier, on considère les fonctions* $u \geqslant 0$ *définies et sousharmoniques dans* $\overline{R}_\tau - P$, *harmoniques dans* $\Omega \cap CP$, *nulles quasi-partout sur* $C\Omega$ *et de flux fini en* P. *Elles sont de la forme* KU(M) *où* $K = C^{te}$ *et* U *la fonction u unique de flux en* P *égal à* φ_τ.

Pour P *quelconque on notera* $G_\Omega^P(M)$ *ou* $G_\Omega(P, M)$ *la fonction de* M *égale à* o *si* P *est extérieur ou régulier, à* U(M) *dans les autres cas. Elle est symétrique en* M *et* P *distincts et dite « fonction de Green » de* Ω.

Désignons par μ_M *la distribution de masses, dite « de Green » égale à la masse 1 en* M *si* M *est extérieur ou régulier et, lorsque* M *est intérieur ou irrégulier, à la mesure harmonique de* Ω *ou son extension pour* M *irrégulier* (voir E n° 12 et D n° 21) *servant à l'expression intégrale de la solution du problème de Dirichlet (valeur à l'intérieur ou pseudo-limite en un point irrégulier). Alors :*

Si Q *est extérieur à* Ω *ou régulier, on a pour* M, P *distincts et* $\neq$ Q :

$$G_\Omega(M, P) = h_Q(M, P) - \int h_Q(M, S)\,d\mu_P(S)\ [12]\ (S \neq Q)$$

ce qui inclut des propriétés de cette intégrale et donne une interprétation potentielle de G.

Du théorème 5 résulte, si P est irrégulier, l'unicité d'une fonction u, s'il en existe, de flux donné fini, unicité facile à voir aussi si $P\in\Omega$. Reste à montrer d'abord l'existence de U(M) [13].

[11] Au raccord près avec mes propres travaux et à l'extension près, assez délicate, à $\overline{R}_\tau$ avec usage de h_Q, ces résultats se trouvent, au moins pour $\tau \geqslant 3$, quant à l'existence et l'unicité chez Bouligand (*loc. cit.*) et quant aux propriétés de la fonction de Green, dans les travaux de M. RIESZ et FROSTMAN (*Acta de Szeged*, t. 9, 1938) où sont considérés plus généralement des potentiels d'ordre α. Enfin j'ai déjà fait dans $\overline{R}_\tau$ une étude moins complète (F, n^{os} 18 et 21).

[12] Rappelons (F, p. 325) que $h_Q(M, P)$, symétrique en M et P distincts de Q est défini par $h(PM)$ si $Q = \mathcal{R}_\tau$ sinon par $h(PM) - h(QM) - h(PQ)$ avec $h_Q(\mathcal{R}_\tau, P) = -h(PQ)$.

[13] On peut obtenir autrement comme suit ce qui concerne G sans h_Q. D'abord si $P\in\Omega$, on obtiendra U en prolongeant en quelque sorte par la méthode alternée une fonction convenable au voisinage de P ; et si la frontière est assez régulière on sait, par application d'une formule de Green, prouver la symétrie en M et P dans Ω, ce qui s'étend à Ω quelconque, car si Ω_n croît vers Ω, $G_{\Omega_n}^P(M)$ croît vers G_Ω^P (en exceptant pour M les points irréguliers) (Voir F, n° 18). Pour montrer l'existence de G_P pour P irrégulier, on agrandira Ω au voisinage de P selon Ω_1 et on en déduira le U pour Ω en retranchant de G_{Ω_1} la solution du problème de Dirichlet pour Ω et $G_{\Omega_1}^P$ (solution dont le quotient par $h(PM)$ ou og OM si $P = \mathcal{R}_2$ a une pseudo-limite nulle en P). On voit facilement d'après cela que $G_{\Omega_1}^P$ tend vers G_Ω^P quand Ω_1 décroît vers Ω, et comme on peut faire de même avec deux agran-

Notons $\mathfrak{J}$ l'ensemble des points intérieurs ou irréguliers et rappelons que pour M et Q fixés (distincts) de $\mathrm{C}\mathfrak{J}$, la solution du problème de Dirichlet pour Ω et la donnée-frontière h_{Q} (M, S) prolongée par o en Q s'il y a lieu) existe et coïncide avec cette fonction de S, et vaut en P, ainsi que la pseudo-limite en un point irrégulier,

$$\int h_{\mathrm{Q}}(\mathrm{M},\ \mathrm{S})\,d\mu_{\mathrm{P}}(\mathrm{S}) \quad (\mathrm{P}\in\mathfrak{J},\ \mathrm{S}\neq\mathrm{Q}\ (^{14}).$$

Donc si $\mathrm{Q}\in\mathrm{C}\mathfrak{J}$

α) $\mathrm{E(M)} = h_{\mathrm{Q}}(\mathrm{M},\ \mathrm{P}) - \int h_{\mathrm{Q}}(\mathrm{M},\ \mathrm{S})\,d\mu_{\mathrm{P}}(\mathrm{S})$ (M, P, S distincts de Q) est nul pour $\mathrm{M}\in\mathrm{C}\mathfrak{J}$.

β) Soit $\mathrm{V_M(S)}$ le potentiel-h_{Q} de $\mu_{\mathrm{M}}(\mathrm{M}\neq\mathrm{Q})$. Si $\mathrm{M}\in\mathfrak{J}$, μ_{M} ne charge pas l'ensemble des points irréguliers et $\mathrm{V_M(S)}$ vaut $h_{\mathrm{Q}}(\mathrm{M},\ \mathrm{S})$ en S régulier ($\neq$ Q). Alors si M et P sont dans $\mathfrak{J}$ et en écartant Q des intégrations :

$$\int h_{\mathrm{Q}}(\mathrm{M},\ \mathrm{S})\,d\mu_{\mathrm{P}}(\mathrm{S}) = \int \mathrm{V_M(S)}\,d\mu_{\mathrm{P}}(\mathrm{S}) = \int \mathrm{V_P(S)}\,d\mu_{\mathrm{M}}(\mathrm{S}) = \int h_{\mathrm{Q}}(\mathrm{M},\ \mathrm{S})\,d\mu_{\mathrm{M}}(\mathrm{S}).$$

Supposons d'abord Q *extérieur*. Alors E(M) prolongée par o en Q répond visiblement ([15]) aux conditions cherchées pour $\mathrm{G^P}$ et la formule finale du théorème s'ensuit dans ce cas. Pour obtenir G même s'il n'existe pas de points extérieurs, on ôtera de Ω un domaine sphérique de centre Q et l'on opérera par la méthode alternée avec deux sphères de centre Q.

L'existence de G dans tous les cas et sa croissance évidente avec Ω montre que, pour Q régulier, on obtient $\mathrm{G^P}$ (en fait quasi-partout et même hors des points irréguliers) en passant à la limite sur $\mathrm{G}^{\mathrm{P}}_{\Omega_n}$ où $\Omega_n = \Omega \cap \omega_n$, ω_n étant un voisinage ouvert de Q décroissant vers le seul point Q; le même passage à la limite vaut pour l'expression intégrale ([16]) qui s'étend donc au cas général. Symétrie immédiate d'après (β).

dissements au voisinage de deux points-frontière, on en conclut facilement à la symétrie générale en M, P.

([14]) Voir F, n° 17 et pour la pseudo-limite s'aider de E. On décompose la donnée-frontière en plusieurs fonctions bornées ou de signe constant et si par exemple $\mathrm{M}\neq\mathcal{R}_\tau$ on remarque que la donnée nulle sauf au voisinage de M où elle est prise égale à h(MS) est résolutive et donne une solution bornée au voisinage de tout point-frontière $\neq$ M.

([15]) Ainsi $\mathrm{E(M)}\geqslant$ o dans Ω : car $h_{\mathrm{Q}}(\mathrm{M},\ \mathrm{S})$ pour M fixé dans $\mathfrak{J}$ est surharmonique en S et borné inférieurement dans Ω, et doit majorer la solution du problème de Dirichlet correspondante.

([16]) On s'appuiera sur deux remarques : 1° Pour M fixé $\neq$ Q, μ_{M} relative à Ω_n croît

Remarque. — Hors du cas $P = \mathcal{R}_\tau (\tau \geqslant 3)$ si $P \in \Omega$ on a $G_\Omega^P = G_{\Omega \cup P}^P$ et plus généralement G ne change pas quand on agrandit Ω d'un ensemble polaire.

8. Il reste à examiner dans le même esprit le cas (c) du théorème (5) que l'on a laissé de côté. On obtient ainsi le résultat suivant qui est également au fond dans les travaux de Bouligand (*loc. cit.*).

THÉORÈME 7. — *Considérons dans* $\overline{R}_\tau (\tau \geqslant 3)$ Ω *ouvert admettant* $\mathcal{R}_\tau$ *comme point-frontière non négligeable. Les fonctions harmoniques* $u \geqslant 0$ *dans* Ω *et bornées, qui de plus s'annulent aux points-frontière réguliers* $\neq \mathcal{R}_\tau$ *(ce qui équivaut à dire qu'elles sont prolongeables par* 0 *de manière quasi-sousharmonique dans* R_τ*) sont les fonctions* $KU(M)$ *où* $K = C^{te} \geqslant 0$ *et* U *la solution du problème de Dirichlet pour la donnée-frontière nulle hors* $\mathcal{R}_\tau$ *égale à* 1 *en* $\mathcal{R}_\tau$, *solution qui admet en* $\mathcal{R}_\tau$ *une lim. sup. et un* λ *(voir théorème 4) égaux à* 1.

9. **Le principe général dans le cas plan.**

THÉORÈME 8. — *Soit dans* $\overline{R}_2$, Ω *ouvert de complémentaire non polaire et* P *un point-frontière irrégulier. On considère les fonctions* $u \geqslant 0$ *harmoniques dans* Ω *qui, prolongées par* 0 *deviennent quasi-sous-harmoniques dans* $\overline{R}_2 - P$ *(c'est-à-dire admettant en tout point-frontière* $\neq P$ *une lim. sup. finie, en outre nulle si le point est régulier). Alors* u *est de la forme :* $KG_\Omega^P(M)$ $(K \geqslant 0)$.

Il suffit par exemple de voir si $P \neq \mathcal{R}_2$, que $u/\log 1/PM$ est borné au voisinage de P. Or d'après le théorème 2 appliqué à $-u$, cela admet une pseudo-limite finie en P et on sait (B n° 12) que sur un pseudo-voisinage de P, on peut (dans le cas plan) tracer des circonférences arbitrairement petites de centre P. Donc sur de telles circonférences tracées sur Ω, $u/\log 1/PM < K$ fixe et cela entraîne aussitôt la même limitation au voisinage de P.

10. **Extension à l'espace moyennant des restrictions.**

On va chercher à parvenir au même résultat pour τ quelconque en faisant sur u des restrictions, mais moindres qu'aux théorèmes 5 et 6.

vers celle relative à Ω sur tout compact fixé de $\overset{*}{\Omega} - Q$. 2° Si φ vaut 0 sur Ω et, par exemple si $Q \neq \mathcal{R}_\tau$ vaut $h(QM)$ sur $\overset{*}{\Omega}_n \cap \Omega$ la solution $H_\varphi^{\Omega_n}$ tend vers 0. Car sin on agrandit Ω au voisinage de Q selon Ω'_p (décroissant vers Ω), $H_\varphi^{\Omega_n}$ est majorée par $2G_{\Omega'_p}^Q$ pour n assez grand ; tandis que $G_{\Omega'_p}^Q$ décroissant a une limite nulle d'après le théorème 5. Examen analogue pour $Q = \mathcal{R}_2$ et immédiat pour $Q = R_\tau$, $\tau \geqslant 3$.

Lemme 3. — *Soit u sousharmonique $\geqslant 0$ au voisinage de* O *($\neq \mathcal{R}_\tau$), ce point exclu. Pour que $u/h(\mathrm{OM})$ soit borné (au voisinage de* O*), il faut et suffit que la mesure (ou distribution de masses) $\leqslant 0$ associée (dans la représentation potentielle locale, voir F n° 20) soit finie (masse totale finie) pour un voisinage de* O *(*O *exclu).*

Car si pour $K > 0$ convenable, $u - Kh(\mathrm{OM}) \leqslant 0$, cette expression sera, avec prolongement convenable en O, sousharmonique au voisinage complet de O d'où la propriété de la mesure. Réciproquement si $\mu \leqslant 0$ associée est finie pour un voisinage et de potentiel v, $u - v$ est harmonique $\geqslant 0$ donc majorée par un $Kh(\mathrm{OM})$. Même majoration pour $u \leqslant u - v$.

D'ailleurs l'hypothèse signifie que u admet une majoration harmonique et le lemme peut se déduire aussitôt de la représentation de F. Riesz (voir p. ex. F p. 329, théorème 8) en prenant un domaine ω contenant O et la fonction de Green de ω — O identique à celle de ω.

THÉORÈME 9. — *Soit dans $\overline{\mathrm{R}}_\tau$ ($\tau \geqslant 3$), Ω ouvert de complémentaire non polaire et* P *un point-frontière irrégulier. On considère les fonctions $u \geqslant 0$ harmoniques dans Ω dont le prolongement par 0 est quasi-sousharmonique dans $\overline{\mathrm{R}}_\tau$ —* P *(avec même autre traduction qu'au théorème 8). On suppose que sur toute suite régulière* (¹⁷) *de points $\mathrm{M}_n \in \Omega$ tendant vers* P, *$u/h(\mathrm{PM})$ est bornée au voisinage de* P. *Alors u est de la forme $KG_\Omega^{\mathrm{P}}(\mathrm{M})$ ($K \geqslant 0$).*

Il suffit de voir que u/h est bornée au voisinage de P.

On peut se ramener au cas de Ω borné en prenant son intersection avec un voisinage ouvert de P, et retranchant de u la fonction (au plus égale) solution du problème de Dirichlet pour une donnée-frontière nulle sur l'ancienne frontière, égale à u sur la partie nouvelle.

Cela fait, si ω est le domaine composant dont P est point-frontière irrégulier, la propriété cherchée est évidente dans $\Omega - \omega$ s'il est non vide car P est extérieur ou régulier pour lui.

Considérons alors dans ω l'ensemble E_K où $u \geqslant Kh(\mathrm{PM})$ et cherchons une contradiction à le supposer non vide quel que soit $K > 0$

(¹⁷) Une suite $\mathrm{M}_n \to \mathrm{Q}$ point-frontière est régulière s'il existe une fonction harmonique $v > 0$ sur l'intersection de Ω et d'un voisinage ouvert de Q, telle que $v(\mathrm{M}_n) \to 0$ (Voir mon article des *Acta de Szeged*, t. IX, 1939, p. 143). Si Ω est un domaine, il faut et suffit que pour un ou tout P_0 de Ω, $G_\Omega^{\mathrm{P}_0}(\mathrm{M}_n) \to 0$.

$\overline{E}$ ne peut rencontrer $\overset{*}{\omega}$ que sur l'ensemble $\mathfrak{I}$ des points-frontière irréguliers de ω, et si K est assez grand

$$\liminf_{M \in E,\, M \to P} G_\omega^{P_0}(M) = \alpha \qquad \text{est} \qquad > 0 \qquad (P_0 \text{ fixé dans } \omega).$$

Sinon on formerait une suite de points de ω tendant vers P sur laquelle $u/h \to +\infty$ et $G_\omega^{P_0} \to 0$.

K étant ainsi fixé, considérons l'enveloppe supérieure U de u et de $Kh(PM)$ prolongée hors ω par $Kh(PM)$. C'est une fonction quasi-sousharmonique ([18]) hors P et sa régularisée (qui vaut lim. sup. U en chaque point) ne peut en différer que sur $\mathfrak{I}$. Les masses associées sont portées par $\overline{E}$ et même par E. D'après le lemme il suffit de voir que leur total en est fini au voisinage de P, puisque cela entraînerait u/h borné, contradiction cherchée.

Or dans ω, $u + Kh(PM)$ est une majorante harmonique de U. Donc la mesure μ associée à U est telle que $\int G_\omega^{P_0}(M)\,d\mu$ est fini pour un point P_0. Comme μ ne charge que E et que $G_\omega^{P_0} > \frac{\alpha}{2}$ sur E au voisinage de P, la masse voisine de P est bien finie.

11. On complétera par l'étude correspondante à l'infini en s'appuyant sur la transformation de Kelvin et son effet de conservation dans le problème de Dirichlet (voir E n° 21, remarque finale).

Soit dans $\overline{R}_\tau$, Ω admettant $\mathcal{R}_\tau$ comme point-frontière. Une suite $M_n \in \Omega$ de limite $\mathcal{R}_\tau$ sera dite *hyperrégulière* s'il existe sur l'intersection de Ω et d'un voisinage ouvert de Ω une fonction harmonique (ou surharmonique) $u > 0$ telle que $u(M_n)\,.\,\overline{OM}_n^{\tau-2} \to 0$ (O quelconque $\neq \mathcal{R}_\tau$). Cela équivaut à ce que par inversion de pôle O la suite devienne régulière pour l'inverse de Ω.

THÉORÈME 10. — *Reprenant le théorème 7, on suppose que les u au lieu d'être sûrement bornées sont telles que $u(M_n)$ soit bornée au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$ sur toute suite hyperrégulière, $M_n \to \mathcal{R}_\tau$. Alors la conclusion est la même.*

On pourra se ramener au cas où Ω a un extérieur non vide avant de faire l'inversion de pôle extérieur.

([18]) Car si v est sousharmonique < 0 dans $R_\tau - P$ et valant $-\infty$ aux points irréguliers, $U + \lambda v$ y est sousharmonique aussi quel que soit $\lambda > 0$. Il suffit d'ailleurs de voir que U est sous-médiane (voir dans mon article du tome précédent du présent périodique, le numéro 11 et le critère de Szpilrajn).

IV. — EXEMPLES

12. On sait déjà que le principe des singularités positives pour un point-frontière quelconque O peut être inexact pour O régulier, soit parce qu'il n'existe pas de fonction harmonique > 0 dans un domaine prolongeable quasi-sousharmoniquement hors d'un *seul point* O [19] soit parce qu'il peut en exister plusieurs non proportionnelles [20]. Il est utile d'indiquer des cas généraux d'existence et de montrer par des exemples, dans notre étude pour un point irrégulier, que le théorème général (8) du cas plan ne peut être étendu à l'espace sans restrictions.

LEMME 4. — *Soit un domaine borné* ω *et une partie* α *de* $\overset{*}{\omega}$ *ouverte sur* $\overset{*}{\omega}$. *On suppose que pour tout point* P *de* α, *il existe un domaine sphérique (circulaire)* σ *le contenant, tel que l'inverse (ou symétrique généralisé) par rapport à* $\overset{*}{\sigma}$ *de* $\sigma \cap (\omega \cup \alpha)$ *soit contenu dans* ω (ce qui arrivera si α est un morceau de surface assez « régulière » et ω d'un seul côté de α) [21]. On considère *les fonctions harmoniques u dans* ω, *bornées chacune au voisinage de tout point de* α *et s'y annulant aux points réguliers. Alors si* A *est un point quelconque choisi dans* ω, u *(pris sur* ω) *est bornée en module sur chaque compact de* $\omega \cup \alpha$ *par* $K|u(A)|$ *où* K *fini ne dépend pas de* u.

En diminuant convenablement ω, on se ramène à voir la proposition pour les H_f^ω où f est résolutive $\geqslant 0$ et nulle sur α. Il suffit ensuite d'obtenir l'inégalité pour un voisinage d'un point P de α. On considérera un σ contenant P et l'ouvert $\delta = \omega \cap C\bar{\sigma}$, Soit φ égale à H_f^ω sur $\overset{*}{\sigma} \cap \omega$, à 0 ailleurs. φ est résolutive pour δ, donc pour l'inverse δ' par rapport à $\overset{*}{\sigma}$. Comme δ' contient $\sigma \cap (\omega \cup \alpha)$, $H_\varphi^{\delta'}$ est majorée dans un domaine-voisinage $\mathcal{V}$ assez petit de P par $K_1 H_\varphi^{\delta'}(B)$ où B est un point choisi dans le domaine composant de δ' contenant P.

Ainsi dans $\mathcal{V}$, $H_f^\omega = H_\varphi^{\sigma\cap\omega} \leqslant H^{\delta'} \leqslant K_1 H_\varphi^{\delta'}(B)$.

[19] Voir l'article précité (note 2) de MARTIN, *Transact.*, t. 49, p. 166.

[20] Voir BOULIGAND, *Mémorial* (cité note 2), p. 32.

[21] On peut se débarrasser de cette dernière restriction en raisonnant sur des parties de ω satisfaisant aux conditions du texte.

Donc si B_1 est l'inverse de B, on a pour $M \in \Gamma \cap \omega$

$$H_f^\omega(M) \leqslant K_2 H_\varphi^\delta(B_1) \leqslant K_2 H_f^\omega(B_1) \leqslant K_3 H_f^\omega(A).$$

13. *Exemples.* — 1° Soit O un point-frontière du domaine ω borné dont $\overset{*}{\omega} - O$ satisfait aux conditions du α précédent. Si $P_n \in \omega$ tend vers O et si $M_0 \in \omega$ est fixé, déterminons la constante K_n par

$$K_n G_\omega^{P_n}(M_0) = 1.$$

Par extraction de suite, on formera une suite partielle $K_{n'} G_\omega^{P_{n'}}(M)$ qui converge vers une fonction harmonique $u > 0$ dans ω. Si σ est l'ensemble $(OM \leqslant r)$, on voit que sur $\delta = \omega \cap C\bar{\sigma}$, $u_{n'}$ coïncide avec $H_{\psi_{n'}}^\delta$, où $\psi_{n'}$ vaut $u_{n'}$ sur $\overset{*}{\delta} \cap \omega$ et 0 ailleurs. Comme $\psi_{n'}$ est bornée indépendamment de n' d'après le lemme, on obtient dans δ à la limite $u = H_{\lim \psi_{n'}}^\delta$.

Cela montre que u bornée hors tout voisinage de O s'annule aux points-frontière réguliers et cela fournit un résultat d'existence assez étendu et encore généralisable.

2° Imaginons par exemple dans R_3 un ensemble effilé en O selon l'exemple classique d'épine obtenu par rotation d'un petit arc assez régulier de tangence exponentielle à l'axe. Considérons le complémentaire ω de la surface limitant l'épine, borné à quelque sphère assez grande de centre O. C'est un domaine ω dont O est point-frontière irrégulier. Si on reprend l'idée précédente avec $P_n \to O$ dans l'épine on obtient de même (en séparant auxiliairement une pointe de l'intérieur de l'épine) un exemple de fonction harmonique > 0 dans ω, dont le prolongement par O est continu sousharmonique hors O, qui est borné sur l'extérieur de l'épine et annule donc la pseudo-limite en O de $u/h(OM)$ enfin qui, étant > 0, ne peut être majorée par un $Kh(OM)$.

On peut même fractionner à l'infini l'intérieur de l'épine grâce à des courbes méridiennes déduites, par exemple, de la donnée par réduction dans le rapport $1/p$ $(p = 1, 2 \ldots)$ de la distance à l'axe, dont un segment OA suffit ainsi à compléter l'adhérence de la réunion des surfaces de révolution. On considérera encore le domaine ω complémentaire (dans une grande sphère de centre O), dont tous les points-frontière sauf O, y compris ceux de OA, sont d'ailleurs réguliers. On appliquera la même idée du $K_n G_\omega^{P_n}$ avec $P_n \to O$ dans *une* des fractions de l'épine (c'est-à-dire dans l'un des domaines effilés composant l'intersection de ω avec un domaine sphérique de centre O dont la frontière rencontre toutes les surfaces de révolution). On obtiendra ainsi une fonction analogue à l'exemple précédent, bornée hors de la fraction d'épine choisie; et en variant ce choix on aura une infinité de fonctions analogues non 2 à 2 proportionnelles [22].

[22] Dans ce dernier exemple, si l'on faisait tendre P_n vers O en passant successivement dans des fractions différentes de l'épine, la fonction harmonique > 0 obtenue s'annulerait en tout point-frontière hors de l'axe et tendrait vers 0 sur tout arc d'accès de O dans l'épine en restant bornée hors de l'épine. Mais elle n'est pas même bornée au voisinage de tout point $\neq$ O du segment OA, sinon on verrait aisément qu'elle serait bornée dans le domaine et par suite nulle, OA étant de capacité nulle.