ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

MARCEL BRELOT

Le problème de Dirichlet « ramifié »

Annales de l'université de Grenoble, tome 22 (1946), p. 167-200
<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1946__22__167_0>

LE PROBLÈME DE DIRICHLET « RAMIFIÉ » (1)

par Marcel BRELOT.

I. — INTRODUCTION

1. — L'application conforme d'un domaine sur un cercle, qui dissocie les points-frontière accessibles de plusieurs manières, devait poser le problème de Dirichlet avec des valeurs-limite à la frontière dépendant des chemins d'accès, mais selon des classes d'équivalence de ceux-ci. C'est ainsi que pour un domaine plan simplement connexe (dont la frontière contient plus d'un point), ce problème a été étudié au moyen de la représentation conforme par G. C. Evans (2) après son étude approfondie de l'intégrale de Poisson dont les propriétés ont été plus généralement ainsi systématiquement transposées. La question devait être reprise de manière directe pour des domaines généraux de l'espace ordinaire et une donnée-frontière « continue » par Perkins et Green (3), De La Vallée Poussin (4),

(1) L'essentiel a été résumé dans deux notes aux *C. R. Ac. Sc.*, t. 221, p. 654 (novembre 1945) et t. 222, p. 851 (avril 1946) et dans deux conférences faites à Grenoble (19 mai 1946) et à Paris (15 juin 1946).

(2) G. C. Evans, The logarithmic potential, *Colloquium publications of the Am. Math. Soc.*, vol. VI (1927).

(3) E. W. Perkins, The Dirichlet problem for domains with multiple boundary points (*Trans. of the Am. Math. Soc.*, vol. 38, p. 106-144. 1935).

La donnée-frontière y est continue, mais seulement avec une certaine uniformité. — Exposé direct assez pénible imitant les premières méthodes du cas classique (Wiener et Kellog). Reprenant un peu cette étude avec emploi de la topologie générale, J. W. Green obtint sous des conditions fort restrictives pour la frontière, une représentation intégrale de la solution : J. W. Green, Harmonic functions in domains with multiple boundary points, *Am. J. of math.*, t. 61 (1939), p. 609.

(4) De la Vallée Poussin, Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralisé de Dirichlet ; *Act. Sc. et Ind.*, n° 578 (1937). Voir le dernier chapitre où est traité un peu plus que la donnée continue, mais sans représentation intégrale de la solution.

enfin Kappos ([5]). Or, le problème classique (nous dirons aussi problème simple) de Dirichlet a été d'autre part traité pour une donnée-frontière quelconque ([6]), puis d'ailleurs un peu élargi récemment ([7]) pour être posé dans l'espace $\overline{R}_\tau$ obtenu en rendant compact l'espace euclidien R_τ (à $\tau \geqslant 2$ dim.) par adjonction du point $\mathcal{R}_\tau$ à l'infini. Il convient donc de reprendre le nouveau problème plus détaillé (qui sera dit « ramifié »), pour le mettre au niveau du problème simple. Ainsi, sans faire d'étude autonome mais partant au contraire comme De La Vallée Poussin des résultats du problème simple, on va pouvoir, en s'inspirant des travaux précités (et surtout de celui de De La Vallée Poussin) et grâce à des notions simplificatrices de topologie générale (comme Green et Kappos mais différemment et selon une idée de Mazurkiewicz) reprendre la marche du problème simple (suivie dans I), traiter la question pour *un domaine quelconque* (de complémentaire non polaire) dans $\overline{R}_\tau (\tau \geqslant 2)$ avec des *données-frontière générales* « ramifiées » et donner une *représentation intégrale* de la solution par utilisation immédiate et naturelle de l'intégrale de Daniell (l'espace de la variable n'étant en général ni compact ni même localement compact).

Ce développement paraît utile pour approfondir l'étude des fonctions harmoniques > 0 dans un domaine ; il servira déjà à compléter le problème simple et à introduire une mesure harmonique « ramifiée » plus avantageuse que l'ancienne et d'ailleurs à peu près identique, à un facteur près, à la *mesure conforme* dans le cas plan classique où celle-ci existe. Nous ferons d'autre part plus qu'une extension systématique du problème simple et de quelques applications, car nous aurons l'occasion de donner des résultats nouveaux dans le cas simple en même temps que leur transposition au cas ramifié :

([5]) D. A. Kappos, Das Dirichletsche Problem für Gebiete mit mehrfachen Randpunkten (*Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa*, série II, t. 11, 1942, p. 43-63).

L'auteur reprend seulement l'étude autonome de Perkins en utilisant une métrique et les familles de Perron et se débarrasse de l'uniformité dans la continuité de la donnée.

([6]) M. Brelot, Familles de Perron et problème de Dirichlet (*Acta Szeged*, IX, p. 133-153 (1939), noté I. — Sur la théorie autonome des fonctions sousharmoniques (*Bull. Sc. Math.*, t. 65, mars-avril, 1941), noté II.

([7]) M. Brelot, Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques (*Annales de l'École N. Sup.*, t. 61, p. 301-332 (1944), noté III ; mémoire reprenant dans R_τ l'essentiel de (I) et (II) et fixant les notations, en particulier :

$$h(r) = \frac{1}{r^{\tau-2}} (\tau \geqslant 3) \qquad \text{ou } \log. \frac{1}{r} (\tau = 2).$$

citons, par exemple, le théorème 8, une propriété des fonctions holomorphes à la fin du n° 19 mais surtout au chapitre VII l'étude plus approfondie de la *pseudo-limite* ou *limite fine* [8] de la solution en un point-frontière irrégulier.

On désignera dans l'espace $\overline{R}_\tau$ la frontière d'un ensemble E par $\overset{*}{E}$, et on notera de la même manière un point et l'ensemble qu'il forme.

II. — POINTS ACCESSIBLES ET CHEMINS D'ACCÈS [9]

2. — Soit Ω un domaine de l'espace compact $\overline{R}_\tau$ admettant au moins un point-frontière Q.

Définitions. — *a*) On appellera *domaine de sommet Q*, s'il en existe, un domaine δ, contenu dans Ω dont Q est point-frontière mais non adhérent à $\overset{*}{\delta} \cap \Omega$, c'est-à-dire un domaine composant de $\omega \cap \Omega$ (où ω est un voisinage ouvert de Q) et dont Q est un point-frontière.

b) Q est dit *accessible* s'il existe au moins un *arc* ou *chemin d'accès* L, c'est-à-dire un arc de Jordan tracé sur Ω d'extrémité Q (arc $\widehat{AQ}$ décrit par $M(t)$ pour $t_0 < t < t_1$ avec $M(t) \in \Omega$ et $M(t) \underset{(t \to t_1)}{\to} Q$.

c) Un *domaine associé* à L sera un domaine de sommet Q contenant un arc partiel $\widehat{BQ}$. Il en existe dans tout voisinage de Q.

Les domaines associés à L forment une *base d'un filtre* dit *associé* à L et sont tous les domaines partiels de Ω appartenant à ce filtre.

d) Deux arcs d'accès L_1, L_2 de Q sont dits *équivalents* si les filtres associés sont identiques, c'est-à-dire si les domaines associés sont les mêmes, ou encore si dans tout voisinage de Q, il existe un domaine associé à la fois à L_1 et L_2.

(8) Rappelons que la pseudo-limite au point-frontière Q irrégulier est la limite pour $M \to Q$ *dans la topologie* où l'on prend comme voisinages de Q les ensembles de complémentaires effilés en Q. Voir « Sur les ensembles effilés », *Bull. Sc. Math.*, t. 68 (1944) (noté IV) et les derniers résultats antérieurs dans la note « Sur l'allure des fonctions harmoniques à la frontière » *C. R.*, t. 220, p. 676 (1945) (noté V).

Dans le mémoire sur le balayage inséré ci-après, H. Cartan étudie cette « topologie fine » qui lui est due et on trouvera dans mon article publié plus loin des propriétés générales de cette limite fine que le présent travail, antérieurement composé, n'utilise pas.

(9) Nous reprenons dans $\overline{R}_\tau$ avec le langage et l'aide de Bourbaki (Topologie Générale, *Ac. Sc. et Ind.*, n° 858) des notions banales et d'autres peu connues.

e) Soit $\mathfrak{L}^Q$ ou brièvement $\mathfrak{L}$ une classe d'équivalence d'arcs d'accès à un Q. On lui fera correspondre par définition les « *domaines associés* », qui seront les domaines associés à l'un des arcs de $\mathfrak{L}$, donc d'ailleurs à tous, et le « *filtre associé* » ou filtre commun associé aux divers arcs.

Toute base de filtre formée de domaines de sommet Q, contenant un élément dans tout voisinage de Q est base du filtre associé à un certain $\mathfrak{L}^Q$ ce qui caractérise autrement ces éléments-frontière. (Comme exemple de base, une suite de domaines de sommet Q obtenus à l'aide d'une base dénombrable de voisinages ouverts emboîtés de Q.)

Application. — Tout point-frontière Q irrégulier d'un domaine Ω est accessible ; car on sait qu'il est irrégulier pour un composant de l'intersection de Ω avec tout voisinage ouvert de Q.

3. — On songera alors à choisir sur l'ensemble $\mathcal{E}_\Omega$ (ou pour abréger $\mathcal{E}$) de ces $\mathfrak{L}$ une topologie commode. Mais comme on a besoin des $\mathfrak{L}$ comme limites (à préciser) de points de Ω, il nous faut une topologie sur $\Omega \cup \mathcal{E}$. On va même obtenir une *structure uniforme* (*métrisable*) en utilisant le théorème de complétion des espaces uniformes [10].

Considérons dans $\Omega \times \Omega$ l'ensemble des points (M_1, M_2) défini par la condition d'appartenir à un domaine partiel de Ω, petit d'ordre V dans la structure uniforme de $\overline{R}_\tau$. Ces ensembles, pour les divers V, forment une base d'entourages d'une structure uniforme séparée sur Ω (structure notée $\mathfrak{U}_\Omega$) d'ailleurs plus fine que celle de $\overline{R}_\tau$ sur Ω. L'espace séparé complété $\mathcal{C}_\Omega$ (ou simplement $\mathcal{C}$) sera formé (à un isomophisme près) des classes d'équivalence des filtres de Cauchy de $\mathfrak{U}_\Omega$. Une telle classe, s'il n'y a pas convergence vers un point de Ω, admet comme filtre-intersection, justement le filtre associé à un $\mathfrak{L}$ [11] et réciproquement, *de sorte que les $\mathfrak{L}$ sont, à une correspondance*

(10) Cette idée importante (en fait avec une métrique) remonte à S. MAZURKIEVICZ (Über erreichbare Punkte, *Fundamenta Mathematicae*, t. XXVI, 1936, p. 153) et a été retrouvée par CHOQUET, *C. R. Sc.*, t. 216, p. 279, mars 1943).

(11) Voir BOURBAKI, *loc. cit.*, p. 106, exercice 1.

Ce filtre intersection qui appartient aussi à la classe d'équivalence est, *dans la structure uniforme de* $\overline{R}_\tau$, aussi un filtre de Cauchy et converge alors vers un point Q. On verra qu'il admet une base, dénombrable, formée de domaines de sommet Q, emboîtés, avec élément dans tout voisinage de Q.

Noter que les arcs partiels AQ pour chaque arc de $\mathfrak{L}$ forment une base de filtre de la classe d'équivalence.

biunivoque près, les éléments nouveaux introduits par la complétion.

L'espace $\mathcal{T}$ est d'ailleurs *métrisable comme* $\overline{R}_\tau$. Prenons sur Ω (en accord avec $\mathfrak{U}_\Omega$) comme distance de M_1, M_2 la borne inférieure des diamètres (dans *une* métrique $\mathfrak{M}$ de $\overline{R}_\tau$) des domaines partiels contenant M_1, M_2 ou, ce qui est équivalent, des continus contenant M_1, M_2 ou encore des arcs de Jordan $\widehat{M_1M_2}$, tracés sur Ω. D'où, par prolongement, une métrique de $\mathcal{T}$: ainsi la distance de $\mathcal{L}_1^{Q_1}$ et $\mathcal{L}_2^{Q_2}$ sera la borne inférieure des diamètres (dans $\mathfrak{M}$) des domaines associés à la fois à ces éléments ou encore des arcs de Jordan $\widehat{Q_1Q_2}$ tracés sur Ω et appartenant aux classes $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$.

Ainsi, $\mathcal{T}$ est un espace métrique complet, d'ailleurs de base dénombrable (12) ; et *il en est de même du sous-espace* $\mathcal{E}$, frontière de Ω dans $\mathcal{T}$ (mais des exemples simples montrent que $\mathcal{E}$ n'est pas généralement compact (13) ou localement compact).

Remarquons alors avec Mazurkiewicz (*loc. cit.*) que la correspondance $\mathcal{L}^Q \to Q$ est une application *continue* de $\mathcal{E}$ dans $\overline{R}_\tau$, de sorte que l'ensemble des points accessibles est dans $\overline{R}_\tau$ un ensemble de Souslin ou *analytique* (14) ; il est donc (15) *mesurable* pour toute mesure de Radon sur $\overset{*}{\Omega}$; par suite, si $\complement\Omega$ dans $\overline{R}_\tau$ est non polaire, l'ensemble des points inaccessibles est *négligeable* (c'est-à-dire de mesure harmonique nulle) relativement à Ω (16).

Remarque. — Le filtre associé à un $\mathcal{L}^Q$ est la trace sur Ω du filtre des voisinages de ce point dans la topologie de $\mathcal{T}$; et si $\varphi(M)$ est une fonction réelle dans Ω, la limite supérieure de φ pour M de Ω tendant vers $\mathcal{L}$ au sens de la topologie de $\mathcal{T}$, soit $\limsup_{M\in\Omega,\, M\to\mathcal{L}} {}_{\mathcal{T}}\, \varphi$ est égale

(12) Cette dernière propriété qui équivaut en espace métrique à la *séparabilité* de M. Fréchet, résulte de la séparabilité évidente du sous-espace Ω ($\mathfrak{U}_\Omega$) qui est partout dense dans $\mathcal{T}$.

(13) Voir dans Choquet (*loc. cit.*) le critère de compacité.

(14) Résultat de URYSOHN (*Proc. Akad. Amsterdam.* 28, p. 984-993) ainsi retrouvé par Mazurkiewicz (*loc. cit.*) qui montre même que, dans le plan, l'ensemble est borélien. Consulter sur les ensembles analytiques, par exemple HAUSDORFF, *Mengenlehre* (Berlin, 1927), pp. 177 et 208 et KURATOWSKI, *Topologie* (monographies polonaises).

(15) Voir démonstration et bibliographie dans SAKS, *Theory of the Integral* (monographies polonaises), p. 48.

(16) On savait (DE LA VALLÉE POUSSIN, *loc. cit.* n° 40) que l'ensemble des points-frontière inaccessibles d'un domaine est intérieurement négligeable, c'est-à-dire de mesure harmonique *intérieure* nulle. La démonstration que j'en ai donnée pour un domaine borné (II, n° 13) peut être *adaptée* à notre Ω de $\overline{R}_\tau$ ou *prolongée* à ce cas en remarquant que $\mathcal{R}_\tau$ s'il est inaccessible forme un ensemble négligeable, ce qui pour $\tau \geqslant 3$, résulte par inversion (III, n° 14) de ce qu'un point irrégulier est accessible.

à la borne supérieure des limites supérieures de $\varphi(M)$ lorsque dans l'espace $\overline{R}_\tau$, M tend vers Q sur les arcs de $\mathfrak{L}$.

De même pour la limite inférieure, d'où une conséquence immédiate pour limite : dire qu'il y a une $\lim._{\mathfrak{G}}\varphi$, c'est dire qu'il y a une même limite (égale à celle-ci) le long des arcs de $\mathfrak{L}$.

III. — POSITION DU PROBLÈME « RAMIFIÉ »

4\. — Soit dans $\overline{R}_\tau$, le domaine Ω *désormais de complémentaire non polaire.*

Lemme fondamental 1. — *Si* u *sous-harmonique dans* Ω *est bornée supérieurement,* et admet le long de tout arc d'accès une limite supérieure $\leqslant 0$, c'est-à-dire *satisfait à la condition* :

$$(1) \qquad \lim_{M\in\Omega,\ M\to\mathfrak{L}} \sup._{\mathfrak{G}} u(M) \leqslant 0 \qquad \textit{quel que soit } \mathfrak{L}\in\mathfrak{G},$$

alors $u \leqslant 0$.

Supposons, en effet, non vide l'ensemble E où l'on aurait $u > \varepsilon > 0$ et associons à chacun de ses points P un voisinage ouvert connexe ω_P dont le diamètre, dans notre métrique $\mathfrak{M}$ de $\overline{R}_\tau$, soit moindre que la demi-distance de P à $\overset{*}{\Omega}$. Réunissons ces ω et soit δ un domaine composant. $\overset{*}{\delta}$ est formé de points de Ω où $u \leqslant \varepsilon$, ou de points de $\overset{*}{\Omega}$ *inaccessibles* pour δ ; sinon, d'un arc d'accès L de l'un d'eux Q, on en déduirait un autre contenant des points de E arbitrairement voisins de Q dans $\overline{R}_\tau$ (17), Dans δ la fonction u admettrait à la frontière une limite supérieure partout $\leqslant \varepsilon$ sauf peut-être en des points inaccessibles, formant donc un ensemble négligeable d'où $u \leqslant \varepsilon$ dans δ, ce qui contredit la propriété que δ contient des points de E (18).

Cette démonstration est inspirée de celle de De La Vallée Poussin pour établir la propriété suivante qui en est une conséquence immédiate :

(17) On pourra prendre sur L une suite de points M_n dans l'ordre de L et tendant vers Q, puis y associer un ω_{P_n} contenant M_n. On verra que $P_n \to Q$ et que le diamètre de ω_{P_n} tend vers 0. Il n'y a alors qu'à modifier L en adjoignant des chemins M_nP_n tracés dans les ω_{P_n}.

(18) Une variante de démonstration consiste à traiter le cas de u continue en considerant l'ensemble ouvert où $u > \varepsilon$ et raisonnant comme avec le δ du texte, plus simplement. On se ramène à ce cas de continuité par un pavage cnnvenable de Ω et remplacement de u dans chaque morceau par sa fonction de Wiener, ce qui, par trois opérations successives convenables, fait disparaître les discontinuités en conservant l'hypothèse à la frontière.

Corollaire. — Si u harmonique et bornée dans Ω tend vers o sur tout arc d'accès à la frontière, $u \equiv 0$. Donc si deux fonctions harmoniques et bornées dans Ω ont même limite sur chacun de ces arcs, elles sont égales.

Remarque importante. — En reprenant la démonstration on voit aussitôt que dans le lemme comme dans ce corollaire, on peut déjà excepter dans la condition-frontière, des arcs d'accès dont les points Q forment un ensemble *intérieurement négligeable*, en particulier de points Q *irréguliers* pour Ω au sens du problème simple.

5. — Nous allons introduire des fonctions analogues aux « enveloppes de Perron » $\underline{H}_f$, $\overline{H}_f$ et à la « fonction de Wiener » H_f du problème simple.

THÉORÈME I. — *Considérons sur $\mathcal{E}$ une fonction réelle f de valeurs finies ou $\pm\infty$. Soit dans Ω, u hypoharmonique (c'est-à-dire valant $-\infty$ ou une fonction sous-harmonique) bornée supérieurement et satisfaisant à la condition :*

$$(2) \qquad \limsup_{M\in\Omega,\ M\to\mathfrak{L}} {}_{\mathcal{E}}\, u \leqslant f, \qquad \textit{quel que soit } \mathfrak{L}\in\mathcal{E}.$$

L'enveloppe supérieure de cette famille I_f des u, soit $\underline{H}_f'^{\Omega}$ *ou par abréviation $\underline{H}_f'$, vaut $-\infty$, $+\infty$ ou une fonction harmonique.*

Même résultat avec une fonction surharmonique bornée inférieurement ou $+\infty$, *l'inégalité contraire et l'enveloppe inférieure* $\overline{H}_f'$ [19].

Enfin (3) $\underline{H}_f' \leqslant \overline{H}_f'$, *l'égalité en un point entraînant l'égalité partout.*

Les propriétés des enveloppes s'établissent comme dans le problème simple [20] et l'inégalité de H résulte du lemme.

Notation. — Lorsque $\underline{H}_f'$ et $\overline{H}_f'$ sont égales et finies, on les note H_f' dite *solution* du problème ramifié, et f est dite *résolutive*.

Remarque. — Soit f résolutive et ω un domaine partiel de Ω. Définissons sur $\mathcal{E}_\omega$ une fonction φ comme suit :

(19) Si u n'est pas supposée bornée (supérieurement ou respectivemeut inférieurement), il y a des enveloppes de même propriété (majorant et minorant respectivement celles du texte), mais ne satisfaisant plus toujours à l'inégalité (3). Dans ce cas, comme dans celui du texte, si l'on astreint les u à être continues, on ne change pas les enveloppes respectives. Car d'une u non partout infinie, on peut déduire une autre finie continue satisfaisant aux mêmes conditions respectives (on le voit en procédant par un pavage comme dans la note(18).

(20) Voir de préférence la démonstration immédiate de (III) n° 11.

Si $Q \in \overset{*}{\omega} \cap \Omega$, on prendra en tout point l^Q de $\mathcal{E}_\omega$ $\varphi(l^Q) = H'_f(Q)$.

Si $Q \in \overset{*}{\omega} \cap \overset{*}{\Omega}$, on remarque que les arcs d'une classe l relative à Q et ω font partie d'une classe d'équivalence $\mathcal{L}$ relative à Q et Ω et l'on prendra :

$$\varphi(l^Q) = f(\mathcal{L}^Q)$$

Alors φ *est résolutive* et $H'^{\omega}_f = H'^{\Omega}_f$ *dans* ω.

Car $\underline{H}'^{\omega}_\varphi \geqslant H'^{\Omega}_f$ et $\overline{H}'^{\omega}_\varphi = H'^{\Omega}_f$.

6. — *Comparaison avec le problème simple.*

Théorème 2. — *Soit* φ *une fonction réelle* (*de valeurs finies ou* $\pm\infty$) *sur* $\overset{*}{\Omega}$ *de* $\overline{R}_\tau$ *et, selon une convention générale d'accentuation, la fonction* φ' *sur* $\mathcal{E}$ *obtenue en la prenant en* $\mathcal{L}^Q$ *égale à* $\varphi(Q)$. *Alors*

$$\underline{H}'_{\varphi'} = \underline{H}_\varphi \quad \text{et} \quad \overline{H}'_{\varphi'} = \overline{H}_\varphi. \tag{4}$$

On a d'abord immédiatement $\underline{H}_\varphi \leqslant \underline{H}'_{\varphi'} \leqslant \overline{H}'_{\varphi'} \leqslant \overline{H}_\varphi$.

Soit u de la famille I_φ, et sur $\mathcal{E}$ la fonction

$$\psi(\mathcal{L}) = \underset{M\in\Omega,\ M\to\mathcal{L}}{\text{lim. sup.}_{\mathcal{C}}}\, u \leqslant \varphi'$$

et qui est semi-continue supérieurement ; soit sur $\overset{*}{\Omega}$, $\psi_1(Q)$ égale en chaque Q accessible à la borne supérieure de ψ pour tous les $\mathcal{L}^Q$ donc $\leqslant \varphi(Q)$, et valent par exemple 0 aux points inaccessibles ; soit enfin sur $\mathcal{E}$, ψ'_1 associée selon la convention.

D'abord $u \leqslant \underline{H}_\psi \leqslant \underline{H}'_{\psi'_1}$. Or ψ_1 est mesurable harmoniquement ; en effet, l'ensemble A des points accessibles de $\overset{*}{\Omega}$ où $\psi_1 > K$ est l'image par application $\mathcal{L}^Q \to Q$ de l'ensemble B de $\mathcal{E}$ où $\psi > K$. Comme B est réunion dénombrable de fermés, A est analytique donc harmoniquement mesurable d'où le résultat. Ainsi ψ_1 étant harmoniquement mesurable et bornée supérieurement, donc harmoniquement sommable au sens large :

$$\underline{H}_{\psi_1} = \overline{H}_{\psi_1} \quad (\text{fini ou } -\infty)\ ([21]).$$

Par suite :

$$\underline{H}'_{\psi'_1} \leqslant \underline{H}_{\psi_1} \leqslant \underline{H}_\varphi \qquad \text{donc} \qquad u \leqslant \underline{H}_\varphi \qquad \text{et} \qquad \underline{H}'_{\varphi'} \leqslant \underline{H}_\varphi.$$

([21]) A cause de la signification de $\underline{H}_f$, $\overline{H}_f$ comme intégrale inférieure ou supérieure ; ainsi $\underline{H}_f(M)$ est la borne supérieure des intégrales $\cdot\mu_M$ des fonctions semi-continues supérieurement, majorées par f, chacune étant bornée supérieurement.

Application. — On peut déjà améliorer comme suit le lemme 1 : *Soit dans* Ω, u *sous-harmonique bornée supérieurement, admettant une lim. sup.*$_{\mathfrak{F}} \leqslant 0$ *aux points* $\mathcal{L}^Q$ *de* $\mathcal{E}_\Omega$, *dont le* Q *appartient à un voisinage ouvert* $\mathcal{V}$ (*dans* $\overline{R}_\tau$) *d'un point* Q_0 *de* $\overset{*}{\Omega}$. *Alors* (*au sens de la topologie de* $\overline{R}_\tau$), u *admet en* Q_0 *une limite supérieure* $\leqslant 0$.

En effet, considérons φ sur $\overset{*}{\Omega}$ égale à 0 dans $\mathcal{V}$ et à une constante (majorante de u) ailleurs. D'après le théorème, $u \leqslant \underline{H}_\varphi$ et si Q de $\mathcal{V} \cap \overset{*}{\Omega}$ est régulier pour Ω, la limite supérieure de u y est $\leqslant 0$. D'oú le lemme si Q_0 est régulier. Si Q_0 est irrégulier considérons l'enveloppe supérieure de u et 0 et prolongeons la par 0 dans $\mathcal{V}$; on obtient dans $\mathcal{V}$ une fonction quasi-sousharmonique qui devient une fonction sousharmonique w en la prenant aux points irréguliers sur $\overset{*}{\Omega} \cap \mathcal{V}$ égale à la limite supérieure de u en ces points. Si on avait $w(Q_0) > 0$, on aurait $u > \dfrac{w(Q_0)}{2} > 0$ sur un ensemble σ de Ω, dont le complémentaire serait effilé en Q_0. Soit alors une suite de voisinages ouverts emboîtés de Q_0, tendant vers Q_0 et δ'_n le composant de $\delta_n \cap \Omega$ qui admet Q_0 comme point-frontière irrégulier. δ'_n non effilé doit rencontrer σ et les δ'_n forment une base de filtre associé à un $\mathcal{L}_0^{Q_0}$ où lim. sup.$_{\mathfrak{F}}\, u \geqslant \dfrac{w(Q_0)}{2} > 0$, contradiction cherchée.

Il y a peu à changer pour élargir les hypothèses *en exceptant des points* $\mathcal{L}^Q$ *dont les* Q *forment un ensemble négligeable* E *de* $\overset{*}{\Omega}$ (ou même intérieurement négligeable) *ne contenant pas* Q_0. *De même si* E *contient* Q_0, *lorsque* Q_0 *est régulier.*

IV. — POINTS RÉGULIERS ET ALLURE DE LA SOLUTION A LA FRONTIÈRE

7. — *Régularité. — Un point* $\mathcal{L}^Q$ *de* $\mathcal{E}$ *sera dit régulier, si* Q *est régulier au sens du problème simple pour un domaine associé à cet* $\mathcal{L}$.

Théorème 3. — *Pour que* $Q \in \overset{*}{\Omega}$ *soit régulier* (*au sens simple*) *il faut et suffit qu'il n'y ait pas de* $\mathcal{L}^Q$ *ou qu'ils soient tous réguliers.*

La condition est évidemment nécessaire. Si maintenant Q est irrégulier, il doit l'être pour un domaine composant de $\Omega \cap \omega$ où ω est un voisinage ouvert quelconque de Q. D'où une suite à limite vide, de domaines emboîtés de sommet Q qu'ils admettent comme point-frontière irrégulier ; ce qui définit un $\mathcal{L}^Q$ irrégulier.

8. — THÉORÈME 4. — *Soit sur* $\mathcal{E}$, f *bornée supérieurement. Au point régulier* $\mathcal{L}_0$ de $\mathcal{E}$:

$$(5) \qquad \lim_{M\in\Omega,\ M\to\mathcal{L}_0} \sup{}_{\mathcal{T}}\, H'_f(M) \leqslant \lim_{\mathcal{L}\in\mathcal{E},\ \mathcal{L}\to\mathcal{L}_0} \sup{}_{\mathcal{T}} f(\mathcal{L})$$

de sorte que si f *est bornée,* $\underline{H}'_f$ *et* $\overline{H}'_f$ *tendent vers* $f(\mathcal{L}_0)$ *au sens de* $\mathcal{T}$ *si* f *est continue en* $\mathcal{L}_0$.

Soit, en général λ fini majorant strictement lim. sup.$_{\mathcal{T}} f$ en $\mathcal{L}_0$. Prenons un domaine associé δ à $\mathcal{L}_0^{Q_0}$ tel que Q_0 soit régulier pour δ et que $f(\mathcal{L}) \leqslant \lambda$ pour tout $\mathcal{L}$ auquel δ est associé. Si φ définie sur $\overset{*}{\delta}$ vaut λ dans un voisinage ouvert assez petit de Q_0 et K (constante majorante de f) ailleurs, on voit grâce au théorème 2 que dans δ $\overline{H}'^{\Omega}_f \leqslant H^{\delta}_{\varphi}$ et l'allure de H^{δ}_{φ} en Q permet de conclure ([22]).

Remarque. — Complétons par une proposition dont l'*énoncé correspondant* (de démonstration tout analogue) *pour le problème simple* paraît lui-même nouveau :

Si pour f *maintenant quelconque sur* $\mathcal{E}$, H'_f *est finie ; on a en* $\mathcal{L}_0$ *régulier* : $\lim_{M\in\Omega,\ M\to\mathcal{L}_0} \sup{}_{\mathcal{T}}\, \underline{H}'_f(M) \geqslant \lim_{\mathcal{L}\in\mathcal{E},\ \mathcal{L}\to\mathcal{L}_0} \inf{}_{\mathcal{T}} f(\mathcal{L})$.

Supposons cette limite inférieure finie et plus grande que le premier membre. Alors on trouvera une constante $K > 0$ telle que sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}_0$ sur $\mathcal{E}$, on ait :

$$\lim_{M\in\Omega,\ M\to\mathcal{L}} \sup{}_{\mathcal{T}}\, H'_f(M) \leqslant f(\mathcal{L}) - K.$$

Soit sur $\mathcal{E}$ la fonction φ égale à K dans $\mathcal{V}$, à 0 ailleurs. Comme $\underline{H}_{\varphi}$ prend au sens de $\mathcal{T}$ la valeur K en $\mathcal{L}_0$, on trouvera v sousharmonique de la famille I_{φ} telle que $v(P) > 0$ en un certain point P. Alors pour toute u sousharmonique de I_f, $u + v$ serait encore de cette famille d'où $u(P) \leqslant \underline{H}'_f(P) - v(P)$ et $u(P)$ ne pourrait approcher arbitrairement $\underline{H}'_f(P)$.

On approfondira, à la fin du mémoire, l'allure de la solution en un point irrégulier.

([22]) On peut se passer du théorème précis (2) en formant une fonction convenable surharmonique dans Ω (majorant $\overline{H}'_f$) et tendant sur δ en Q_0 (dans $\overline{R}_{\tau}$) vers λ.

On peut dire que le théorème 4 contient l'énoncé analogue « simple » en ce sens qu'il l'entraîne aussitôt d'après la fin du n° 6 ; et cette remarque pourra se répéter ultérieurement.

Compléments au théorème 1 : 1. *Soit* f *quelconque sur* $\mathcal{E}$. $\underline{\mathrm{H}}'_f$ *est l'enveloppe supérieure des fonctions* u *valant* $-\infty$ *ou sousharmoniques, dont chacune est bornée supérieurement et satisfait à*

$$\lim_{M\in\Omega,\ M\to\mathcal{L}} \mathrm{sup.}_{\mathcal{T}}\, u \leqslant f(\mathcal{L})$$

pour tout $\mathcal{L}$ *régulier de* $\mathcal{E}$.

2. *Même enveloppe avec les fonctions valant* $-\infty$ *ou harmoniques dont chacune est bornée supérieurement et satisfait à la condition-frontière pour tout* $\mathcal{L}\in\mathcal{E}$.

Mêmes démonstrations que dans le cas simple (Voir (1) n° 13) en utilisant une fonction harmonique $w > 0$ dans Ω tendant vers $+\infty$ aux points frontières irréguliers du problème simple.

La seconde proposition s'appuie sur le théorème 3 qui entraîne aussi le résultat fondamental :

Théorème 5. — *Toute fonction* f *bornée continue sur* $\mathcal{E}$ *est résolutive.*

Car $\overline{\mathrm{H}}'_f$ et $\underline{\mathrm{H}}'_f$ ont même limite$_{\mathcal{T}}$, soit $f(\mathcal{L})$, aux points réguliers de $\mathcal{E}$, donc coïncident d'après le lemme 1 (corollaire et remarque).

Corollaire (De La Vallée Poussin). — *Il existe une fonction harmonique bornée unique* (*c'est notre* H'_f) « *prenant* » *dans la topologie* $\mathcal{T}$ *la valeur du* f *précédent aux points réguliers de* $\mathcal{E}$.

Extension. — Dans le théorème 5 on peut ne pas supposer la continuité en des points de $\mathcal{E}$ dont la fonction caractéristique φ admet un $\underline{\mathrm{H}}'_\varphi$ nul ([23]) (en particulier en des points dont les Q forment un ensemble intérieurement négligeable). Extension avec adaptation du corollaire qui contiendra alors très largement le théorème final de De La Vallée Poussin (*loc. cit.* n° 42).

9. — Approximation de Ω.

Lemme 2 ([24]). — *Soit dans* Ω *une fonction* Φ *quelconque, mais bornée supérieurement et une suite* ω_n *d'ouverts tels que* $\overline{\omega}_n < \Omega$ *et de limite* Ω. *Alors si* $\mathcal{L}^{\mathrm{Q}}$ *de* $\mathcal{E}$ *est régulier* :

$$(6)\qquad \lim_{M\in\Omega,\ M\to\mathcal{L}} \mathrm{sup.}_{\mathcal{T}} \Big[\big(\lim_{n\to\infty} \mathrm{sup.}\ \overline{\mathrm{H}}^{\omega_n}_{\Phi}(M)\big)\Big] \leqslant \lim_{M\in\Omega,\ M\to\mathcal{L}} \mathrm{sup.}_{\mathcal{T}}\, \Phi(M)$$

([23]) On utilisera encore la fonction harmonique w précisée plus haut.

([24]) Adaptation d'un raisonnement de De La Vallée Poussin (*loc. cit.*, n° 39).

Soit $\lambda > \limsup_{M\in\Omega,\, M\to\mathcal{L}} {}_{\mathcal{C}}\Phi(M)$ et δ un domaine associé à $\mathcal{L}^Q$ tel que, Q soit régulier pour δ et que sur δ, $\Phi \leqslant \lambda$.

Puis, ε étant choisi arbitrairement, soit σ un voisinage de Q dans $\overline{R}_\tau$, tel que, en tout point de $\sigma \cap \delta$, la mesure harmonique μ relative à δ, de $\overset{*}{\delta} \cap \Omega$ soit $< \varepsilon$. Considérons alors $\delta_n = \delta \cap \omega_n$ et sa frontière qu'on décompose en $\overset{*}{\delta}_n \cap \overset{*}{\delta}$ et $\overset{*}{\delta}_n \cap \delta$. Si on prend M fixe dans $\delta \cap \sigma$, il sera contenu dans δ_n à partir d'un certain rang et la mesure harmonique en M relative à δ_n de $\overset{*}{\delta}_n \cap \overset{*}{\delta}$, majorée par μ sera $< \varepsilon$.

Or $\overline{H}_\Phi^{\omega_n}$ considéré dans δ_n y admet en tout point frontière régulier P une limite supérieure majorée par la fonction φ égale à λ sur $\overset{*}{\delta}_n \cap \overset{*}{\delta}$ et B ailleurs. D'où $\overline{H}_\Phi^{\omega_n} \leqslant H_\varphi^{\delta_n}$. Comme dans $\delta_n \cap \sigma$,

$$H_\Phi^{\delta_n} \leqslant \lambda + B\varepsilon,$$

on conclut $\overline{H}_\Phi^{\omega_n}(M) \leqslant \lambda + B\varepsilon$ d'où aisément le résultat cherché.

Théorème 6. — *Soit f bornée continue sur $\mathcal{E}$, donc prolongeable dans $\mathcal{C}$ selon une fonction Φ bornée continue. Soit ω_n ouvert croissant, de limite Ω, tel que $\overline{\omega}_n \subset \Omega$. Alors $H_\Phi^{\omega_n} \to H'_f$.*

En effet $\limsup_{n\to\infty} H_\Phi^{\omega_n}$ est sousharmonique et satisfait d'après le lemme 2 à une condition-frontière, qui entraîne d'après le lemme 1 la majoration $\underline{H}'_f$. De même $\liminf_{n\to\infty} H_\Phi^{\omega_n}$ surharmonique majore $\overline{H}'_f$.

On en déduit à la fois le théorème 5 et le théorème 6.

Remarque. — Dans le lemme 2 et le théorème 6 on peut évidemment remplacer ω_n par l'ordonné filtrant croissant des ouverts ω tels que $\overline{\omega} \subset \Omega$.

V. — REPRÉSENTATION INTÉGRALE DE LA SOLUTION ET MESURE HARMONIQUE RAMIFIÉE

10. — Lemme 3. — *Soit sur $\mathcal{E}$, f bornée supérieurement, semi-continue supérieurement. Alors $\overline{H}'_f = \underline{H}'_f$ et ces fonctions valent l'enveloppe inférieure des H'_θ pour θ continue $\geqslant f$ et la limite de H'_{θ_n} où θ_n est bornée continue tendant en décroissant vers f dans une suite ou un ordonné filtrant.*

Comme on a évidemment $\overline{H}'_f \leqslant H'$. voyons que $H'_{\theta_n} \rightarrow \underline{H}'_f$ et reprenons le raisonnement du problème simple.

H'_{θ_n} tend vers une fonction u harmonique ou égale à $-\infty$; comme d'après le théorème 4 :

$$\limsup_{M \in \Omega,\ M \to \mathcal{L}} {}_{\mathcal{C}} H'_{\theta_n} \leqslant \theta_n(\mathcal{L}) \quad (\mathcal{L} \text{ régulier})$$

on aura
$$\limsup_{M \in \Omega,\ M \to \mathcal{L}} {}_{\mathcal{C}}\ u \leqslant f(\mathcal{L}) \quad (\mathcal{L} \text{ régulier}) ;$$

d'où d'après un complément du théorème 1 (n° 8) : $u \leqslant \underline{H}'_f$ et la conclusion cherchée.

Lemme 4. — *Soit sur $\mathcal{E}$, f quelconque ; $\underline{H}'_f$ est l'enveloppe supérieure des $\underline{H}'_\varphi$ où φ est bornée supérieurement, semi-continue supérieurement, $\leqslant f$* [25].

Même raisonnement que dans le problème simple en considérant les limites supérieures selon $\mathcal{C}$ à la frontière des fonctions dont l'enveloppe est $\underline{H}'_f$.

11. — Reportoms-nous maintenant à l'introduction de l'intégrale de Daniell [26].

On y part d'une classe T_0 de fonctions numériques définies sur un ensemble E telles que :

1° Chacune est bornée ou même seulement finie.

2° On obtient une fonction de la classe par multiplication d'une fonction par une constante finie, addition, enveloppe supérieure ou inférieure de deux fonctions.

3° Il existe une fonctionnelle $\mathfrak{I}(f)$, nombre réel fini, satisfaisant à :

α) $\mathfrak{I}(Kf) = K\mathfrak{I}(f)$ ($K = C^{te}$),

β) $\mathfrak{I}(f_1 + f_2) = \mathfrak{I}(f_1) + \mathfrak{I}(f_2)$,

γ) $\mathfrak{I}(f) \geqslant 0$ si $f \geqslant 0$ partout,

δ) Si f_n tend en décroissant vers 0, $\mathfrak{I}(f_n) \rightarrow 0$.

(25) Et il existe d'ailleurs une suite de φ soit φ_n telle que $\underline{H}'_{\varphi_n}$ tende en croissant vers $\underline{H}'_f$.

(26) J. Daniell, A general form of integral, *Annals of Math.*, t. 19 (1917-18), p. 279. On peut introduire une autre intégrale abstraite en remplaçant dans l'exposé la condition (δ) qui suit par la condition (δ') analogue pour tout ordonné filtrant décroissant (Bourbaki). On prend au lieu des fonctions ψ de T_1 les fonctions ψ' dont chacune est enveloppe supérieure des fonctions de T_0 qu'elle majore, et

$$\mathfrak{I}(\psi') = \text{borne sup. } \mathfrak{I}(f) \ (f \leqslant \psi',\ f \in T_0) ;$$

mais rien ne change dans l'application que nous en faisons ici, puisque (δ') est aussi satisfaite et qu'il y a identité ici des ψ et ψ' et des $\mathfrak{I}$ correspondants.

Voyons que l'on peut prendre *pour classe* T_0, l'ensemble $\mathcal{T}_0$ des fonctions sur $\mathcal{E}$ dont chacune est bornée et continue, en prenant $\mathfrak{I}(f) = H'_f(M)$, pour M fixé dans Ω.

D'abord 1° et 2° sont évidemment remplies. Puis α, β, γ le sont comme cas particuliers de propriétés générales et faciles des $\underline{H}'$, $\overline{H}'$, H' analogues à celles des $\underline{H}$, $\overline{H}$, H du problème simple (27). Enfin (δ), *point crucial,* rentre dans le lemme 3.

Suivons encore Daniell qui introduit la classe T_1 des fonctions, limites de suites croissantes de fonctions de T_0. Soit $\psi \in T_1$, puis une suite associée de f_n de T_0 ; $\mathfrak{I}(f_n)$ a une limite (finie ou $+\infty$), d'ailleurs indépendante de la suite f_n, et qu'on note $\mathfrak{I}(\psi)$.

A partir de $\mathcal{T}_0$, nous introduirons ainsi une classe $\mathcal{T}_1$, *dont les fonctions* ψ *sont les fonctions sur* $\mathcal{E}$, *dont chacune est bornée inférieurement, finie ou non en chaque point mais semie-continue inférieurement ; et nous voyons d'après le lemme 3 que*

$$\mathfrak{I}(\psi) = \overline{H}'_\psi(M).$$

Ensuite Daniell introduit la semi-intégrale supérieure $\overline{\mathfrak{I}}(f)$ d'une fonction quelconque (finie ou non) sur E, comme la borne inférieure des $\mathfrak{I}(\psi)$ pour les ψ de T_1 qui majorent f ou valant $+\infty$ s'il n'y a pas de tels ψ. Dans notre application on a par le lemme 4 : $\overline{\mathfrak{I}}(f) = \overline{H}'_f(M)$.

Daniell pose encore $\underline{\mathfrak{I}}(f) = -\overline{\mathfrak{I}}(-f)$ ce qui se définirait aussi par voie symétrique et donne dans notre cas $\underline{\mathfrak{I}}(f) = \underline{H}'_f(M)$.

Rappelons enfin que la sommabilité de f selon Daniell (d'ailleurs conservée par les opérations du 2°), se traduit par définition selon la condition :

$$\underline{\mathfrak{I}}(f) = \overline{\mathfrak{I}}(f) \text{ fini (28). Donc :}$$

Théorème 7. — *A partir des fonctions* θ *de la classe* $\mathcal{T}_0$ *avec fonctionnelle* $H'_\theta(M)$, *les semi-intégrales de Daniell valent* $\overline{H}'_f(M)$, $\underline{H}'_f(M)$ *et la sommabilité équivaut à la résolutivité* (*d'ailleurs indépendante de* M).

On pourra définir la *sommabilité au sens large* par l'égalité des semi-intégrales, dont la valeur commune finie ou non sera dite l'intégrale correspondante.

(27) Voir mémoire I, nos 5 et 12.

(28) Noter qu'en espace métrique compact (ou localement compact) l'intégrale de Radon définie à partir d'une fonctionnelle des fonctions finies continues (respectivement, nulles en outre hors d'un compact) est identique à l'intégrale de Daniell définie à partir de cette même fonctionnelle (avec l'autre présentation de l'intégrale indiquée note (26), la métrisabilité est inutile).

12. — *Mesure harmonique ramifiée.* — Fixons M pour préciser la fonctionnelle de base $H'_\theta(M)$. Considérons les ensembles de $\mathcal{E}$ dont la fonction caractéristique φ est sommable et attachons-y l'intégrale correspondante $H'_\varphi(M)$. On peut voir que ces éléments satisfont aux conditions de définition d'une tribu d'ensembles mesurables et d'une mesure complète μ'_M (29), les ensembles mesurables comme ceux de mesure nulle étant d'ailleurs indépendants de M et l'espace $\mathcal{E}$ étant de mesure 1. La théorie de l'intégrale à partir de cette mesure introduit des *fonctions mesurables* et celles qui ont une intégrale finie ou non (ce sont celles bornées dans un sens, puis en général les f mesurables dont les f^+ et f^- ont des intégrales de cette théorie non simultanément infinies) sont sommables au sens large de plus haut avec égalité des intégrales dans les deux théories ; la sommabilité de plus haut inclut cette mesurabilité (mais il n'en est pas de même pour la sommabilité au sens large).

Pour un ensemble quelconque e de $\mathcal{E}$, de fonction caractéristique φ_e, la borne inférieure des mesures des ensembles mesurables contenants vaut celle relative aux seuls ouverts (dans l'espace $\mathcal{E}$) et vaut $\overline{H}'_{\varphi_e}(M)$. Ce sera par définition *la mesure harmonique ramifiée extérieure* de e relative à M (pour abréger *mesure extérieure*).

Notion analogue de la *mesure intérieure* $\underline{H}'_{\varphi_e}(M)$, qui vaut d'ailleurs le complément à 1 de la mesure extérieure du complémentaire.

Les ensembles de mesure extérieure ou intérieure nulle, indépendants de M, seront dits aussi *négligeables* (extérieurement) ou négligeables intérieurement et on dira « presque partout » sur $\mathcal{E}$ dans le sens de « sauf sur un ensemble négligeable ».

Comme dans le problème simple (Voir mémoire II, n^{os} 2 et 12) et avec les mêmes raisonnements :

La condition caractéristique $\overline{H}'_{\varphi_e} = 0$ équivaut à l'existence d'une fonction sousharmonique $\leqslant 0$ dans Ω admettant en tout point de $\mathcal{E}$ une $\lim._{\mathcal{C}}$ égale à $-\infty$.

La condition $\underline{H}'_{\varphi_e} = 0$ équivaut à ce que toute fonction sousharmonique u bornée supérieurement dans Ω, satisfaisant à

$$\limsup_{M\in\Omega,\ M\to\mathcal{L}} {}_{\mathcal{C}}\, u \leqslant 0$$

quel que soit $\mathcal{L}\in\mathcal{E}$, soit $\leqslant 0$.

(29) Voir A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques (*Act. sc. et ind.*, n° 869), chap. II.

La comparaison avec la mesure harmonique « simple » est contenue dans le théorème 2.

13. — *Propriétés des domaines partiels.* — Nous pouvons maintenant améliorer, comme suit, la remarque finale du n° 5.

THÉORÈME 8. — *Soit* ω *un domaine partiel de* Ω *et* f *quelconque sur* $\mathcal{E}_\Omega$. *Introduisons la fonction* φ *définie aux points* l^Q *de* $\mathcal{E}_\omega$ *par la convention* (déjà donnée fin du n° 5) :

1° si $Q \in \Omega$, $\varphi(l^Q) = \underline{H}'_f(Q)$,

2° *si* $Q \in \overset{*}{\Omega}$ *et si* $\mathcal{L}^Q$ *est la classe d'équivalence relative à* Ω *qui contient les arcs d'accès de* l^Q, *on pose*

$$\varphi(l^Q) = f(\mathcal{L}^Q)$$

Alors dans ω : $\underline{H}'^{\omega}_{\varphi} = \underline{H}'^{\Omega}_{f}$.

D'abord il est facile de voir que $\underline{H}'^{\omega}_{\varphi} \geqslant \underline{H}'^{\Omega}_{f}$ d'où l'égalité si $\overline{H}'^{\Omega}_{f} = +\infty$.

Puis si $\underline{H}'^{\Omega}_{f} = -\infty$ on conclut en examinant les cas où $\overset{*}{\omega} \cap \Omega$ est polaire ou non, c'est-à-dire admet seulement ou non des points irréguliers pour ω.

Supposons alors $\underline{H}'^{\Omega}_{f}$ fini. Soit $\mathcal{E}_\omega$ une fonction ψ bornée supérieurement, semi-continue supérieurement, majorée par φ. Prenons sur $\mathcal{E}_\Omega$ une suite croissante $f_n \leqslant f$ de fonctions dont chacune est résolutive, bornée supérieurement, semi-continue supérieurement avec $H'^{\Omega}_{f_n} \to \underline{H}'^{\Omega}_{f}$. formons f'_n à partir de f_n par changements aux seuls points $\mathcal{L}^Q$ où $\mathcal{L}$ contient les arcs d'accès d'une ou plusieurs classes l_i relatives à ω, en l'y prenant égale au maximum de f_n et de la borne supérieure $\Psi(\mathcal{L}^Q)$ des $\psi(l_i^Q)$. Voyons que f'_n est sommable : à chaque l^Q de $\mathcal{E}_\omega$ où $Q \in \overset{*}{\Omega}$ correspond $\mathcal{L}^Q$, de $\mathcal{E}_\Omega$ où $\mathcal{L}$ contient les arcs de l; C'est une application *continue* d'un ensemble fermé ρ (de $\mathcal{E}_\omega$) sur un ensemble σ (de $\mathcal{E}_\Omega$) qui est donc analytique dans l'espace $\mathcal{E}_\Omega$, par suite mesurable. La fonction Ψ est mesurable, puisque l'ensemble où $\Psi > K$ est transformé de celui où $\psi > K$, lequel est réunion dénombrable de fermés de ρ. Il s'ensuit que f'_n déjà bornée supérieurement, $\leqslant f$, croissante et majorant f_n résolutive, est aussi mesurable donc sommable avec $H'_{f'_n} \to \underline{H}'^{\Omega}_{f}$.

Soit alors sur $\mathcal{E}_\omega$ la fonction $\Theta_n(l^Q)$ égale à $H'^{\Omega}_{f'_n}(Q)$ si $Q \in \Omega$ et à $f'_n(\mathcal{L}^Q)$ si $Q \in \overset{*}{\Omega}$, $\mathcal{L}$ contenant les arcs de l. D'après la remarque finale du n° 5, $H'^{\omega}_{\Theta_n} = H'^{\Omega}_{f'_n}$ dans ω. Θ_n admet donc une limite sommable Θ

(sur $\mathcal{E}_\omega$) qui majore ψ et $H'^{\omega}_{\Theta_n} \to H'^{\omega}_{\Theta}$, d'où $\underline{H}'^{\omega}_{\psi} \leqslant H'^{\omega}_{\Theta} \leqslant \underline{H}'^{\Omega}_{f}$ et enfin $\underline{H}'^{\omega}_{\varphi} \leqslant \underline{H}'^{\Omega}_{f}$.

Remarque. — D'après le théorème 2, on déduit aussitôt *un énoncé analogue pour le problème simple* et qui pourrait se démontrer directement de manière plus facile.

Corollaire. — *Soit ω un domaine partiel et* E *une partie de* $\mathcal{E}_\Omega$. *Soit une partie* E_1 *de* $\mathcal{E}_\omega$ *formée de points* l^Q *tels que les arcs de tout* l *appartiennent à une classe* $\mathfrak{L}$ *d'un point* $\mathfrak{L}^Q$ *de* E, *Alors, dans* ω, *la mesure extérieure ou intérieure de* E *sur* $\mathcal{E}_\Omega$ *majore la mesure correspondante de* E_1 *sur* $\mathcal{E}_\omega$.

14. — *Parties impropres de la frontière.*

Théorème 9. — *Soit sur* $\mathcal{E}_\Omega$ *l'ensemble* E *ouvert. Dire qu'il est de mesure nulle équivaut à ce que tous ses points* $\mathfrak{L}^Q$ *soient irréguliers ; alors tous les* Q *sont irréguliers et leur ensemble* E_1 *est polaire* (30) *et ouvert sur* $\overset{*}{\Omega}$ *(dans* $\overline{R}_\tau$*). Réciproquement à partir d'un ensemble polaire ouvert sur* $\overset{*}{\Omega}$, *à chaque point* Q *correspond un et un seul* $\mathfrak{L}^Q$ *et l'ensemble de ces* $\mathfrak{L}^Q$ *est ouvert sur* $\mathcal{E}_\Omega$ *et de mesure nulle.*

Enfin, soit f *quelconque sur* $\mathcal{E}_\Omega$, Ω_1 *le domaine* $\Omega \cup E_1$ *et sur* $\mathcal{E}_{\Omega_1}$ *la fonction* f_1 *telle que si* $\mathfrak{L}_1^Q \in \mathcal{E}_{\Omega_1}$ *et si* $\mathfrak{L}$ *est la classe d'équivalence relative à* Ω *contenue dans* $\mathfrak{L}_1$, *on ait* $f_1(\mathfrak{L}_1^Q) = f(\mathfrak{L}^Q)$. *Alors, dans* Ω,

$$\overline{H}'^{\Omega}_{f} = \overline{H}^{\Omega_1}_{f_1} \qquad \underline{H}'^{\Omega}_{f} = \underline{H}'^{\Omega_1}_{f_1}.$$

Soit E ouvert de mesure nulle. Si un point $\mathfrak{L}_0$ était régulier, la mesure $\mu_M(E)$ devant tendre vers 1 pour M tendant (selon $\mathfrak{T}$) vers L_0, elle ne serait pas nulle. Les $\mathfrak{L}^Q$ de E sont donc tous irréguliers. Partant d'un ensemble ouvert quelconque E' formé de $\mathfrak{L}^Q$ irréguliers, on voit que les Q sont irréguliers (simplement) donc forment un ensemble *polaire* E_1. Soit alors δ un domaine associé à un $\mathfrak{L}_0^{Q_0}$ de E' et domaine composant de $\omega \cap \Omega$ où ω est un domaine contenant Q_0. Tout point de $\overset{*}{\delta} \cap \omega$ appartient à E_1 s'il est accessible par δ et si, comme on le supposera, ω est assez petit. Donc $\overset{*}{\delta} \cap \omega$ est de mesure harmonique (simple) nulle pour δ et puisque ouvert sur $\overset{*}{\delta}$, polaire, donc partout accessible par δ, par suite appartenant à E_1 ; donc δ dérive de ω par suppression d'une partie de E_1 et est le seul compo-

(30) On se rappellera pour ce qui suit qu'un ensemble polaire n'a pas d'intérieur et que son complémentaire dans $\overline{R}_\tau$ est connexe.

sant de $\Omega \cap \omega$. Cette étude du voisinage de Q_0 montre que E_1 est ouvert sur $\overset{*}{\Omega}$ et on achève grâce au théorème précédent.

Remarque. — On pourra dire que E (ouvert de mesure nulle) est impropre (E_1 l'étant dans le problème simple) et il y a une *partie impropre maxima* de $\mathcal{E}_\Omega$ obtenue par réunion ; si c'est E, on voit que $\mathcal{E}_{\Omega_1}$ n'admet plus de partie impropre non vide et que *les points réguliers sur* $\mathcal{E}_{\Omega_1}$ *y forment un ensemble partout dense* ce qui étend le résultat analogue du problème simple (dû à Vasilesco).

VI. — APPLICATIONS ET COMPLÉMENTS

15. — Nous allons reprendre rapidement quelques propriétés importantes ou applications de la mesure harmonique simple pour les étendre à la mesure *ramifiée*, en renvoyant seulement aux démonstrations du cas simple lorsqu'elles s'adaptent immédiatement. Nous n'expliciterons pas généralement les propriétés qui sont visiblement contenues dans celles classiques de la mesure et de l'intégrale.

Ω sera toujours un domaine (de $\overline{R}_\tau$) de complémentaire non polaire.

THÉORÈME 10. — *Soit u sousharmonique et bornée supérieurement dans Ω. Partageons $\mathcal{E}_\Omega$ en p parties E_i où pour chacune la limite supérieure dans $\mathcal{C}$ en chaque point est majorée par une constante K_i. Alors*

$$u(M) \leqslant \sum_1^p K_i \mu'_M(E_i)$$

où μ'_M est la mesure extérieure ou intérieure suivant que $K_i > 0$ ou. $K_i \leqslant 0$. On en déduit sur une partie fixée σ de Ω, une majorante $\Sigma\alpha_i K_i$ où les constanles α_i sont indépendantes de u, pourvu que sur E_1 par exemple, K_1 soit choisi de manière à majorer les autres K_i.

Cette majoration qui généralise celle de Nevanlinna-Privaloff fournit *pour les modules de fonctions holomorphes* une limitation améliorant celle de Nevanlinna-Ostrowski [31].

[31] Voir le cas « simple » dans mon article « Quelques applications aux fonctions holomorphes de la théorie moderne du potentiel et du problème de DIRICHLET », *Bull. Soc. Royale des Sc. de Liège*, 1939, p. 387 (noté VI).

16. — Comme *conséquence banale du passage à la limite* sous $\int$, soulignons les résultats :

THÉORÈME 11. — *Soit dans* Ω, u_n *sousharmonique bornée supérieurement indépendamment de* n *et* $\varphi_n(P)$ *sa limite supérieure dans* $\mathcal{T}$ *à la frontière. Si l'ensemble* α *où* $\limsup_{n \to \infty} \varphi_n = -\infty$ *est de mesure* > 0, *alors* $u_n \to -\infty$.

D'après cela, soit $f_n(z)$ *holomorphe dans* Ω *de* $\overline{R}_2$, *de module* $\leqslant K$ *fini fixe, et* β *un ensemble de* $\mathcal{E}$ *de mesure extérieure* > 0. *Si aux points de* β, f_n *admet une limite dans* $\mathcal{T}$ *soit* ψ_n *et si* ψ_n *converge sur* β, *alors* $f_n(z)$ *converge dans* Ω [32].

Il y a dans ces propositions convergence *uniforme* sur toute partie σ de Ω où la mesure extérieure de α ou β majore un nombre > 0 fixe. Comme exemple de σ, citons un compact de Ω ou plus généralement l'intersection de Ω avec un *compact* θ de $\mathcal{T}$ tel que $\theta \cap \mathcal{E}$ appartienne à l'intérieur de α ou β sur le sous-espace $\mathcal{E}$. Cela résulte du lemme suivant intéressant en soi :

Soit sur $\mathcal{E}$ un ensemble mesurable e de mesure $\mu_M(e) > 0$. Celle-ci admet en tout point intérieur $\mathcal{L}_0^{Q_0}$ de e une lim. inf.$_{\mathcal{T}} > 0$.

En effet on peut trouver un voisinage ouvert ω de Q_0 dans $\overline{R}_2$, assez petit pour que si δ est le composant de $\omega \cap \Omega$ associé à $\mathcal{L}_0$, tout arc d'accès à la frontière de δ en un point de $\overset{*}{\Omega}$ fasse partie d'une classe $\mathcal{L}$ d'un point $\mathcal{L}^Q$ de e ; et on peut faire en sorte que $\overset{*}{\delta} \cap \Omega$ soit de mesure harmonique simple > 0 pour δ. Remarquons alors (d'après le n° 5, fin) que $\mu^M(e)$ vaut dans δ la solution du problème simple relative à 1 sur $\overset{*}{\delta} \cap \overset{*}{\Omega}$ et à μ^M sur $\overset{*}{\delta} \cap \Omega$. On achève par adaptation facile de la démonstration du lemme final de VII.

17. — Passons aux *propriétés inverses*, c'est-à-dire aux propriétés de f conséquence d'hypothèses sur H'_f.

THÉORÈME 12 [33]. — *Si* f *est résolutive, les bornes de* H'_f *valent les bornes de* f *en mesure (ramifiée) ; donc si* $H'_f = 0$, f *est nulle presque partout.*

[32] Voir de même « Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes », *Bull. Soc. Math.*, 1945, fasc. 1-2, p. 69, noté VII. — Bien remarquer que l'ensemble où ψ_n existe et converge est *mesurable*.

[33] Voir le cas simple dans « Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités », *J. de math.*, 1945 (noté VIII), n° 4.

On en déduit :

THÉORÈME 13 (34). — a) *Si f_n résolutive est majorée par g résolutive fixe, l'hypothèse* « $\lim\sup_{n\to\infty} H'_{f_n} \geqslant 0$ » *entraîne* :

$$\lim\sup_{n\to\infty} f_n \leqslant 0 \text{ presque partout.}$$

b) *Soient u_n et v_n harmoniques bornées dans leur ensemble dans Ω et convergeant vers une même fonction. Si sur une partie α de $\mathcal{E}$, u_n et v_n ont des* lim.$_{\mathcal{G}}$ *qui convergent vers φ et ψ on a $\varphi = \psi$ presque partout sur α.*

18. — *Reprenons enfin l'étude de l'allure à la frontière des fonctions sousharmoniques* (35), d'abord au voisinage d'un point régulier.

THÉORÈME 14. — *Considérons u sousharmonique dans Ω et*

$$(7) \qquad \lambda_u(\mathcal{L}) = \lim\sup{}_{\mathcal{G}}{}_{\substack{M\in\Omega,\ M\to\mathcal{L}}} u(M) \quad (\mathcal{L}\in\mathcal{E}_\Omega)$$

qui est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{E}$.

Si une partie E *de $\mathcal{E}_\Omega$ contient $\mathcal{L}_0$ régulier et est de mesure intérieure nulle, on a, si $\lambda_u(\mathcal{L}_0) < +\infty$*

$$(8) \qquad \lim\sup_{\mathcal{L}\in\mathcal{E}-E,\ \mathcal{L}\to\mathcal{L}_0} \lambda_u(\mathcal{L}) = \lambda_u(\mathcal{L}_0)$$

Comme dans le problème simple, on voit d'abord que $\mathcal{L}_0$ est adhérent à $\mathcal{E}$ — E non vide et on se ramène au cas de u bornée supérieurement (par localisation grâce au théorème 8). On montre l'égalité pour E de mesure nulle et on passe au cas de la mesure *intérieure* nulle.

Corollaire (complétant celui du théorème 8). — *Comparons les mesures harmoniques relatives à Ω et à Ω_1 analogue qui le coupe* (36) :

Soit E *un ensemble ouvert de $\mathcal{E}_\Omega$ dont chaque point $\mathcal{L}$ a un filtre associé qui est aussi le filtre associé, relativement à Ω_1, d'un point $\mathcal{L}_1$*

(34) Voir de même les théorèmes 3 et 4 de (VII).

(35) Voir « Sur l'allure à la frontière des fonctions harmoniques, sous-harmoniques ou holomorphes », *Bull. Soc. Royale des Sc. de Liège*, 1939, p. 468 (noté IX).

Quelques propriétés locales à la frontière des fonctions harmoniques ou sous-harmoniques, *Bull. Sc. Math.*, t. 64, 1940 (noté X).

(36) Extension d'une propriété de la mesure harmonique simple. Voir IX, p. 472 et II, n° 13 proposition 12.

de $\mathcal{E}_{\Omega_1}$ (37). *L'ensemble* E_1 *de ces* $\mathcal{L}_1$ *est également ouvert sur* $\mathcal{E}_{\Omega_1}$ *et dans la correspondance biunivoque* ($\mathcal{L} \leftrightarrow \mathcal{L}_1$), *à toute partie* σ *de* E *de mesure extérieure, respectivement intérieure, nulle* (*sur* $\mathcal{E}_\Omega$) *correspond une partie* σ_1 *de* E_1 *de mesure respective nulle sur* $\mathcal{E}_{\Omega_1}$. *Il s'ensuit la conservation de la mesurabilité dans la correspondance.*

On traitera d'abord le cas de la mesure intérieure en considérant, dans Ω_1, u sousharmonique $\geqslant 0$, bornée supérieurement, de limite supérieure selon $\mathcal{T}_{\Omega_1}$ en tout point $P \in \mathcal{E}_{\Omega_1}$, au plus égale à 1 ou à 0 selon que P appartient à σ_1 ou non. On prolongera u par 0 dans Ω hors Ω_1 d'où (grâce au n° 6, application) une fonction sousharmonique dans Ω, et on regardera son allure aux points réguliers de E. On conclut que u dans Ω_1 admet une limite supérieure selon $\mathcal{T}_{\Omega_1}$ qui est $\geqslant 0$ en tout point régulier de $\mathcal{E}_{\Omega_1}$, donc est nulle.

On passe au cas de la mesure extérieure en remarquant qu'un ensemble σ de mesure extérieure nulle sur $\mathcal{E}_\Omega$ est contenu dans un ensemble analogue σ', intersection dénombrable d'ouverts (de E) dont l'image σ'_1 a cette même propriété sur $\mathcal{E}_{\Omega_1}$ donc y est mesurable.

THÉORÈME 15 (38). — *Soit u sousharmonique dans* Ω *et* $\mathcal{L}_0^{Q_0}$ *irrégulier.*

On considère une partie E *de* $\mathcal{E}_\Omega$, *de mesure intérieure nulle et contenant* $\mathcal{L}_0$ *supposé point adhérent* (*sur* $\mathcal{E}_\Omega$) *au complémentaire* CE (39) (*sur* $\mathcal{E}_\Omega$).

Introduisons encore l'ensemble $\mathfrak{J}$ *sur* $\overset{*}{\Omega}$ *des points* Q (simplement) *irréguliers pour* Ω, *relatifs à des* $\mathcal{L}^Q$ *de* E.

Reprenons $\lambda_u(\mathcal{L})$ et *supposons* (9) $\lambda_u(\mathcal{L}_0) < +\infty$.

Alors a) *Si* : (10) $$\limsup_{\mathcal{L} \in CE,\ \mathcal{L} \to \mathcal{L}_0} {}_{\mathcal{T}}\, \lambda_u(\mathcal{L}) < \lambda_u(\mathcal{L}_0)$$

il existe un domaine associé δ *à* $\mathcal{L}_0$, *un ensemble* σ *de* δ, *une fonction sousharmonique* v *dans un voisinage ouvert* γ *de* Q_0 (*sur* $\overline{R}_\tau$) *tels que* :

1° $v \geqslant u$ dans $\delta \cap \gamma$; 2° $v = u$ dans $\sigma \cap \gamma$;

(37) Cela équivaut à dire que pour $\mathcal{L}^Q$ de $\mathcal{E}_\Omega$, il existe $\mathcal{L}_1{}^Q$ de $\mathcal{E}_{\Omega_1}$ tel que, dans tout voisinage de Q dans $\overline{R}_\tau$, il y ait un domaine qui soit à la fois associé à $\mathcal{L}$ pour Ω et associé à $\mathcal{L}_1$ pour Ω_1.

(38) Voir pour le problème simple, le résultat analogue : (IX), théorème B et aussi (IV), n° 12.

(39) Si $\mathcal{L}_0$ n'était pas adhérent à CE, il serait intérieur à E ; on sait par le théorème 9 que Ω dans un voisinage ouvert de Q_0, en différerait d'un ensemble polaire tandis que u, d'après l'inégalité (9) y serait bornée supérieurement d'où son prolongement sous harmonique dans le voisinage entier.

3° *le complémentaire* $\complement\sigma$ (*dans* $\overline{R}_\tau$) *soit effilé en* Q *et que* :

$$\limsup_{M\in\complement(\sigma\cup\mathfrak{J}),\ M\to Q_0} v(M) < v(Q_0) \text{ qui vaut } \lambda_u(\mathfrak{L}_0).$$

De plus u *admet en* Q_0 *une pseudo-limite égale à* $\lambda_u(\mathfrak{L}_0)$.

b) *Réciproquement l'existence de* δ, σ, v, *satisfaisant à* 1°, 2° *et un* 3° *qu'on peut réduire, par exemple à la seule inégalité, entraîne* (10).

Partant de (10), introduisons K_1, K_2 tels que :

$$\limsup_{\mathfrak{L}\in\complement E,\ \mathfrak{L}\to\mathfrak{L}_0}{}_{\mathfrak{T}} \lambda_u(\mathfrak{L}) < K_1 < \lambda_u(\mathfrak{L}_0) < K_2$$

et δ assez petit pour que u y soit $< K_2$ et que $\lambda_u(\mathfrak{L})$ soit $< K_1$ pour les $\mathfrak{L}$ de CE dont le filtre associé est aussi celui d'un point de $\mathcal{E}_\delta$.

On considérera l'enveloppe supérieure v de u et K_1 sur δ ; son prolongement par K_1 est quasi-sousharmonique et v, sur δ, admet aux points-frontière (dans $\overline{R}_\tau$) de δ non adhérents à $\overset{*}{\delta}\cap\Omega$ et hors $\mathfrak{J}$, une limite supérieure $\leqslant K_1$. Cela résultera du théorème 14 puis du n° 6 (fin). On achève, comme dans le cas simple, en considérant la régularisée de v et sa pseudo-limite comprise dans (K_1, K_2) :

Corollaire. — *Les conditions 9-10 entraînent* dans le plan *qu'il existe une suite de circonférences emboîtées de centre* $Q_0 \neq \mathcal{R}_2$ *ou de centré* $O \neq \mathcal{R}_2$ *si* $Q_0 \equiv \mathcal{R}_2$, *tracées sur* Ω, *de limite* Q_0 *et pour chacune desquelles le flux généralisé de* u *vers le domaine contenant* Q_0 *qu'elle délimite est* < 0 *et tend vers* 0.

Même démonstration que dans le cas simple (Voir mémoire X, théorème C) [40] et même application aux fonctions holomorphes (Voir IX n° 6 ; extension d'un théorème de Beurling-Kunugui) [41] comme suit :

Application. — *Soit* $f(z)$ *holomorphe dans* Ω, $\mathfrak{L}_0$ quelconque *de* $\mathcal{E}_\Omega$, E *une partie de* $\mathcal{E}_\Omega$ *de mesure intérieure nulle, contenant* $\mathfrak{L}_0$ *supposé point adhérent de* CE.

On pose $$\lambda(\mathfrak{L}) = \limsup_{z\in\Omega,\ z\to\mathfrak{L}}{}_{\mathfrak{T}} |f| \qquad (\mathfrak{L}\in\mathcal{E}_\Omega)$$

et on suppose $$\lambda(\mathfrak{L}_0) < +\infty.$$

(40) L'idée est de voir qu'on peut trouver de telles circonférences sur σ avec même flux pour u et v et de considérer la représentation potentielle de v.

(41) La clef de cette application consiste lorsque f n'est pas partout nulle à considérer $\log|f(z)|$ harmonique hors des zéros (qu'on évitera dans le tracé des circonférences) et sa fonction conjuguée $\arg f(z)$; le flux du log vaut la variation de $\arg f(z)$ le long de la circonférence, nulle ou de module $\geqslant 2\pi$.

Alors $$\lim_{\mathfrak{L}\in CE,\ \mathfrak{L}\to\mathfrak{L}_0} \sup{}_{\mathfrak{T}} \lambda(\mathfrak{L}) = \lambda(\mathfrak{L}_0).$$

19. — On peut développer une étude locale similaire en considérant, au lieu de u, le quotient $\frac{u(M)}{W_{Q_0}(M)}$ où $W_{Q_0}(M)$ et brièvement $W(M)$ vaut $h(Q_0M)$ si $Q_0 \neq \mathcal{R}_\tau$ et $\log OM (O \neq \mathcal{R}_2)$ si $\tau = 2$ et $Q_0 = \mathcal{R}_\tau$.

THÉORÈME 16 [42]. — *Reprenons u sousharmonique dans Ω, $\mathfrak{L}_\theta^{Q_0}$* QUELCONQUE *mais avec $Q_0 \neq \mathcal{R}_\tau$ si $\tau \geqslant 3$, puis les mêmes* E *et* $\mathfrak{J}$ *du théorème 15* [43]. *On pose :*

$$(11) \qquad \mu_u(\mathfrak{L}) = \lim_{M\in\Omega,\ M\to\mathfrak{L}} \sup{}_{\mathfrak{T}} \frac{u(M)}{W(M)} \qquad \textit{et on suppose}$$

$$(12) \qquad \mu_u(\mathfrak{L}_0) < +\infty.$$

a) *Si* (13) $$\lim_{\mathfrak{L}\in CE,\ \mathfrak{L}\to\mathfrak{L}_0} \sup{}_{\mathfrak{T}} \mu_u(\mathfrak{L}) < \mu_u(\mathfrak{L}_0),$$

$\mathfrak{L}_0$ est irrégulier et même il existe δ associé à $\mathfrak{L}_0$, $\sigma \subset \delta$ et v sousharmonique dans $\gamma - Q_0$ (γ voisinage ouvert de Q_0) majoré par un KW (K = C[te]) *tels que :*

1° $v \geqslant u$ *dans* $\delta \cap \gamma$; 2° $v = u$ *dans* $\sigma \cap \gamma$;

3° $C\sigma$ *soit effilé en* Q_0 *et que*

$$\lim_{M\in C(\sigma\cup\mathfrak{J}\cup Q_0),\ M\to Q_0} \sup. \frac{v(M)}{W(M)} < \lim_{M\neq Q_0,\ M\to Q_0} \sup. \frac{v(M)}{W(M)} \qquad \text{qui vaut } \mu_u(\mathfrak{L}_0).$$

Alors $\frac{u(M)}{W(M)}$ *admet en* Q_0 *la pseudo-limite* $\mu_u(\mathfrak{L}_0)$.

b) *Réciproquement, l'existence des δ, σ, v satisfaisant à* 1°, 2° *et un* 3° *réduit, par exemple à son inégalité, entraîne* (13) *et l'irrégularité de* $\mathfrak{L}_0$.

On se ramène au cas de $\mu_u(\mathfrak{L}_0) < 0$. Adaptation (comme dans le cas simple) de la démonstration du théorème (15) en remplaçant K_1 par K_1W. On en tire, comme plus haut, les conséquences suivantes :

COROLLAIRE. — *Dans le plan énoncé analogue au corollaire du théorème 15, les conditions 12-13 entraînant que les flux généralisés*

[42] Voir dans le cas simple (IV théorème 9 b), et pour la démonstration du texte le critère d'effilement de (IV, théorème 2, remarque).

[43] Si comme dans la note [39], $\mathfrak{L}_0$ n'était pas supposé adhérent à CE, il serait intérieur à E et irrégulier et l'étude serait encore banale en se ramenant au cas de $\mu_u(\mathfrak{L}_0) < 0$.

tendent en croissant vers une limite finie (sans constance au delà de tout rang).

Applications. — *Reprenons $f(z)$ holomorphe $\mathfrak{L}_0^{Q_0}$ quelconque et* E.

Posons
$$\mu(\mathfrak{L}) = \lim_{z \in \Omega,\ z \to \mathfrak{L}} \sup{}_{\mathcal{T}} \frac{\log. |f(z)|}{|\log. r|}$$

où r *vaut* Q_0M *si* $Q_0 \neq \mathcal{R}_2$ *et* OM *si* $Q_0 \equiv \mathcal{R}_2 (O \neq \mathcal{R}_2)$ *et supposons* $\mu(\mathfrak{L}_0) < +\infty$.

Alors
$$\lim_{\mathfrak{L} \in CE,\ \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}_0} \sup{}_{\mathcal{T}} \mu(\mathfrak{L}) = \mu(\mathfrak{L}_0)$$

D'ailleurs, dans le problème simple, ces conséquences du théorème 16 ont des analogues qu'on peut expliciter aussitôt (encore inédits à ma connaissance) ([44]).

VII. — ALLURE DE LA SOLUTION AU VOISINAGE D'UN POINT-FRONTIÈRE IRRÉGULIER

20. — Les théorèmes (15) et (16) entraînent aisément la proposition suivante analogue à celle du problème simple (voir mémoire IV, n° 12, fin).

Lemme 5. — *Soit sur $\mathcal{E}_\Omega$, la fonction φ bornée supérieurement, continue en $\mathfrak{L}_0^{Q_0}$ irrégulier où elle atteint sa borne inférieure (finie ou $-\infty$). Alors $\underline{H}'_\varphi$, $\overline{H}'_\varphi$ ont en Q_0 des pseudo-limites respectivement égales aux limites supérieures selon $\mathcal{T}$ de ces H′ en $\mathfrak{L}_0$. Si de plus, $\mathfrak{L}_0$ n'étant pas isolé, $\dfrac{\varphi(\mathfrak{L})}{W_{Q_0}(Q)}$ tend vers $-\infty$ quand $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{L}_0$ tend vers $\mathfrak{L}_0$, les quotients de ces H′ par W ont aussi des pseudo-limites en Q_0 égales à leurs limites supérieures en $\mathfrak{L}_0$ selon $\mathcal{T}$.*

Remarquons en passant que si on part de l'énoncé du cas simple et qu'on applique à ses données l'énoncé précédent, on conclut à l'égalité des limites supérieures en jeu respectives prises dans $\mathcal{T}$ ou $\overline{R}_\tau$.

En fait, on peut n'utiliser dans la suite que la proposition du cas simple.

([44]) Point-frontière Q_0 au lieu de $\mathfrak{L}_0$, limite supérieure dans $\overline{R}_\tau$, E de mesure harmonique intérieure simple *nulle*. Soulignons pour $f(z)$ les applications analogues avec $\dfrac{|f(z)|}{|\log r|}$ en un point *régulier*.

21. — Complétons d'abord *les résultats connus du cas simple* (voir article V).

On sait que pour notre Ω et un point Q_0 irrégulier, il existe une mesure de Radon $\geqslant 0$, μ_{Q_0} sur $\overset{*}{\Omega}$ telle que, pour toute f résolutive *bornée*, H_f admet en Q_0 une pseudo-limite égale à $\int f d\mu_{Q_0}$; il y a identité de la mesurabilité-μ_{Q_0} et de la mesurabilité harmonique μ_M, identité des ensembles de mesure nulle des deux espèces, et la sommabilité-μ_{Q_0} entraîne la sommabilité-μ_M ou résolutivité.

Montrons de plus que pour e *mesurable variable sur* Ω,

$$\mu_{Q_0}(e) \geqslant K\mu_M(e)$$

où K *est une constante finie* > 0 *dépendant de* $M \in \Omega$ (*mais non de* e).

Formons un domaine partiel ω dont la frontière se compose de points de Ω et de Q_0 encore irrégulier [45]. Dans ω, $\mu_M(e) = H_\varphi^\omega$ où $\varphi(M)$ sur $\overset{*}{\omega}$ vaut $\mu_M(e)$. Soit A un point-frontière régulier pour ω et δ un voisinage ouvert de A ($\bar{\delta} \subset \Omega$) ; il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $u(M) \geqslant \alpha u(A)$, pour tout $M \in \delta$ et toute fonction harmonique $u > 0$ dans Ω : si $\mu_{Q_0}^\omega$ désigne la mesure sur $\overset{*}{\omega}$ analogue à μ_{Q_0} pour Ω, on voit que $\mu_{Q_0}^\omega(\delta \cap \overset{*}{\omega}) > 0$ et que la pseudo-limite $\mu_{Q_0}(e)$ de H_φ^ω majore $\mu_A(e) \,.\, \alpha \,.\, \mu_{Q_0}^\omega(\delta \cap \overset{*}{\omega})$, ce qui est une inégalité du type cherché.

Pour tout cela, l'extension est banale à Ω ouvert non connexe (de complémentaire non polaire) avec μ_M pris pour M dans le domaine composant dont Q_0 est point-frontière irrégulier. Prolongeons cette étude en considérant des f non nécessairement bornées sur $\overset{*}{\Omega}$:

LEMME 6. — *Si* f *est résolutive* (*donc mesurable*-μ_{Q_0}) *et sommable*-μ_{Q_0} *au sens large*, H_f *admet en* Q_0 *une pseudo-limite, finie ou non, égale à* $\int f d\mu_{Q_0}$.

Procédons progressivement :

α) Si f est $\geqslant 0$, résolutive et si H_f admet une pseudo-limite finie en Q_0, celle-ci vaut $\int f d\mu_{Q_0}$.

Reprenons le domaine ω mais choisi de telle sorte que H_f soit

(45) On formera d'abord un ensemble E_0 ouvert, effilé en Q_0, contenant ($C\Omega - Q_0$) puis on agrandira ($CE_0 - Q_0$) en réunissant des voisinages ouverts assez petits de ses points pour former un ouvert dont un domaine composant répondra à la question.

bornée ([46]). Introduisons $f_n \geqslant 0$ résolutive bornée croissant et tendant vers f. $H^{\Omega}_{f_n}$ notée φ_n tend en croissant vers H^{Ω}_f notée φ et dans ω on a $\varphi_n = H^{\omega}_{\varphi_n}$ et $\varphi = H^{\omega}_{\varphi}$ (φ_n et φ, bornées, étant sur $\overset{*}{\omega}$ prolongées arbitrairement en Q_0). Comme les pseudo-limites de $H^{\omega}_{\varphi_n}$ et H^{ω}_{φ} sont $\int_{\overset{*}{\omega}} \varphi_n d\mu^{\omega}_{Q_0}$ et $\int_{\overset{*}{\omega}} \varphi d\mu^{\omega}_{Q_0}$, la pseudo-limite de H^{Ω}_f ou H^{ω}_{φ} vaut la limite pour $n \to \infty$, de la pseudo-limite de $H^{\omega}_{\varphi_n}$ ou $H^{\Omega}_{f_n}$, c'est-à-dire la limite de $\int_{\overset{*}{\Omega}} f_n d\mu_{Q_0}$ ou enfin $\int f d\mu_Q$.

β) Si f est $\geqslant 0$ résolutive et tend vers $+\infty$ en Q_0, H_f admet une pseudo-limite $\int f d\mu_{Q_0}$.

D'après la proposition du cas simple analogue au lemme 5, il y a une pseudo-limite égale à la limite inférieure de H_f en Q_0 et si elle est finie, elle vaut bien $\int f d\mu_{Q_0}$. Il reste donc à voir que si

$$H_f \to +\infty \text{ en } Q_0, \qquad \int f d\mu_{Q_0} = +\infty.$$

Dans cette hypothèse, soit δ un voisinage ouvert de Q_0 tel que f et H_f y majorent K arbitrairement choisi > 0 et prenons sur $\overset{*}{\delta} \cap \Omega$ un compact E tel que $(\delta \cap \overset{*}{\Omega}) - E$ admette une mesure-$\mu^{\delta_1}_{Q_0}$ (relative à Q_0 et à $\delta_1 = \delta \cap \Omega$) qui soit moindre que ε arbitraire > 0. Soit f_λ (bornée) égale à l'enveloppe inférieure de f et d'une constante λ et sur $\overset{*}{\delta}_1$ la fonction φ_λ (bornée) valant $H^{\Omega}_{f_\lambda}$ dans Ω et f_λ sur $\overset{*}{\Omega}$ d'où $H^{\Omega}_{f_\lambda} = H^{\delta_1}_{\varphi_\lambda}$ dans δ_1. Alors $\int_{\overset{*}{\Omega}} f_\lambda d\mu_{Q_0}$ et $\int_{\overset{*}{\delta}_1} \varphi_\lambda d\mu^{\delta_1}_{Q_0}$ sont égaux comme valeur de la pseudo-limite de $H^{\Omega}_{f_\lambda}$ ou $H^{\delta_1}_{\varphi_\lambda}$. Prenons λ majorant $\frac{K}{2}$ et assez grand pour que $H^{\Omega}_{f_\lambda}$ majore $\frac{K}{2}$ sur E. Alors

$$\int_{\overset{*}{\delta}_1} \varphi_\lambda d\mu^{\delta_1}_{Q_0} \geqslant \frac{K}{2}(1-\varepsilon).$$

D'où $\int_{\overset{*}{\Omega}} f d\mu_{Q_0} \geqslant \int_{\overset{*}{\Omega}} f_\lambda d\mu_{Q_0} \geqslant \frac{K}{2}(1-\varepsilon)$ quantité arbitrairement grande.

γ) Si f est $\geqslant 0$ résolutive, H^{Ω}_f admet une pseudo-limite $\int f d\mu_{Q_0}$. Il suffira de former une fonction φ sur $\overset{*}{\Omega}$, $\geqslant 0$, tendant vers $+\infty$

([46]) On trouvera d'abord un ensemble E de Ω sur lequel H_f est bornée, tel que $E \cup Q_0$ soit compact et de complémentaire effilé en Q_0, puis on l'agrandira (et on retiendra seulement si l'on veut un domaine composant).

en Q_0 et sommable-μ_{Q_0}, ce qui est banal. On appliquera (β) à φ et à $f+\varphi$ et on pourra conclure pour $H_f = H_{f+\varphi} - H_\varphi$.

On passe de là aussitôt au cas général de f résolutive.

Remarque. — *Pour que toute fonction résolutive* $\geqslant 0$ *admette en* Q_0 *une pseudo-limite finie, il faut et il suffit qu'au voisinage de* Q_0, $\overset{*}{\Omega}$ *soit polaire.*

La suffisance est évidente. S'il y a des points réguliers voisins de Q_0, voyons qu'il existe une donnée-frontière $\geqslant 0$ dont la solution tend vers $+\infty$ en Q_0. S'il existe un point P extérieur à Ω, on chargera une suite de points réguliers tendant vers Q_0 de masses ponctuelles > 0, à total fini, de potentiel $-h_P$ infini en Q_0 et on remarquera que ce potentiel, borné inférieurement sur $\overset{*}{\Omega}$ vaut dans Ω la solution associée. On passe au cas général en ôtant de Ω une petite sphère de centre P, utilisant le résultat précédent puis appliquant la méthode alternée [47].

Comme *conséquence,* on verra aussitôt que $\mu_{Q_0}(e)/\mu_M(e)$ ne reste compris entre deux nombres finis fixes > 0 quand e décrit les ensembles de mesure harmonique $\neq 0$, que si $\overset{*}{\Omega}$ est polaire au voisinage de Q_0.

EXTENSION. — *Si pour* f *quelconque, les semi-intégrales* $\underline{\int} f d\mu_{Q_0}$, $\overline{\int} f d\mu_{Q_0}$ [48] *ne sont pas infinies de signes contraires,* $\underline{H}_f$ *et* $\overline{H}_f$ *admettant en* Q_0 *des pseudo-limites égales à ces semi-intégrales respectives. D'ailleurs si* $\underline{H}_f = -\infty$ *on voit directement aussitôt, sans hypothèse supplémentaire, que* $\underline{\int} f d\mu_{Q_0} = -\infty$ *valeur de la pseudo-limite évidente.*

On formera f_n bornée supérieurement, semi-continue supérieurement, croissante, de limite φ, et telle que $\underline{H}_{f_n} \to \underline{H}_f$ et

$$\int f_n d\mu_{Q_0} \to \underline{\int} f d\mu_{Q_0}.$$

(47) On s'appuiera sur la remarque suivante : soit dans Ω un compact σ (si l'on veut de complémentaire connexe) ; si une fonction harmonique u dans Ω est solution pour $\Omega - \sigma$ et une donnée-frontière valant u sur $\overset{*}{\sigma}$, c'est la solution pour Ω correspondant à la donnée égale à la précédente sur $\overset{*}{\Omega}$.

Cela s'étend d'ailleurs aux $\underline{H}$, $\overline{H}$ et au problème ramifié et se démontre par usage convenable du procédé alterné.

(48) Semi-intégrales de Daniell à partir des fonctions finies continues, c'est-à-dire que la première par exemple est la borne supérieure des intégrales des fonctions minorantes, bornées supérieurement et semi-continues supérieurement.

Si $\overline{\int} f d\mu_{Q_0} < +\infty$ ou si $\underline{\int} f d\mu_{Q_0} > -\infty$, on verra que $\int f_n^+ d\mu_{Q_0}$ et $\int f_n^- d\mu_{Q_0}$ ont des limites non toutes deux infinies de sorte que φ est sommable -μ_{Q_0} au sens large avec

$$\int f_n d\mu_{Q_0} \to \int \varphi d\mu_{Q_0} \quad \text{d'où} \quad \int \varphi d\mu_{Q_0} = \underline{\int} f d\mu_{Q_0}.$$

Si $\underline{H}_f$ est fini, φ est résolutive et H_φ ou $\underline{H}_f$ admet la pseudo-limite $\int \varphi d\mu_{Q_0}$ ou $\underline{\int} f d\mu_{Q_0}$.

Enfin supposons $\underline{H}_f = +\infty$ d'où pseudo-limite $+\infty$. Voyons que $\underline{\int} f d\mu_{Q_0} = +\infty$. En effet $\overline{H}_f = +\infty$ donc $\overline{\int} f d\mu_{Q_0} = +\infty$ et à cause de l'hypothèse de l'énoncé : $\underline{\int} f d\mu_{Q_0} > -\infty$.

Par suite, à partir d'un certain rang, $\int f_n^- d\mu_{Q_0}$. est finie, de sorte que f_n^- est résolutive décroissante ; alors $H_{f_n^+} \to +\infty$ et lim. f_n^+ n'est pas résolutive, ce qui impose $\int \text{lim. } f_n^+ d\mu_{Q_0} = +\infty$. On conclut que $\int f_n d\mu_{Q_0}$ dépasse tout nombre fini pour n assez grand, d'où le résultat.

Lemme 7. — *Si pour f quelconque, l'un des $\underline{H}_f$, $\overline{H}_f$ est fini, son quotient par* $W_{Q_0}(M)$ (défini au début du n° 19) *admet en* Q_0 *une pseudo-limite nulle.*

Si $\underline{H}_f$ par exemple est fini, il existe φ résolutive telle que $H_\varphi = \underline{H}_f$ et on se ramènera donc au cas de $f \geqslant 0$ *résolutive* que nous allons traiter progressivement.

α) Si de plus f est bornée hors de tout voisinage de Q_0 et majorée par KW_{Q_0} dans un voisinage de Q_0, on conclut en se ramenant au cas connu de $f = W_{Q_0}$ (voir article V) en réduisant si l'on veut Ω à son intersection par un voisinage de Q_0).

β) Supposons $\dfrac{f(Q)}{W_{Q_0}(Q)} \to +\infty$ pour $Q \to Q_0 (Q \in \overset{*}{\Omega})$.

D'abord H_f/W ne peut tendre vers $+\infty$, sinon H_f serait une fonction harmonique > 0 au voisinage de Q_0 tendant vers $+\infty$ plus vite que W, ce qui entraînerait la régularité de Q_0 (Voir article III n° 14).

Ainsi lim. inf. $\dfrac{H_f(M)}{W_{Q_0}(M)} = \lambda$ fini et d'après (α) il y a une pseudo-limite λ.

En raisonnant comme plus haut (note 46) on trouvera un domaine partiel de type ω sur la frontière duquel (Q_0 excepté) $\dfrac{H_f}{W_{Q_0}}$ est borné. Or, si $\varphi = H_f^\Omega$, H_f^Ω vaut H_φ^ω dans ω et on conclut en appliquant (α) à H_φ^ω.

γ) Le cas général s'obtient en ajoutant à f une fonction φ résolutive $\geqslant 0$ telle que $\dfrac{\varphi}{W_{Q_0}}$ tende vers $+\infty$ en Q_0, car il suffira d'appliquer (β) à $f + \varphi$.

La formation de φ est banale, puisque $W_{Q_0}(Q)$ est résolutive, c'est-à-dire sommable pour la mesure harmonique.

Remarque. — L'usage de la transformation de Kelvin permet, plus rapidement qu'une étude directe, d'expliciter pour $\tau \geqslant 3$ des propriétés relatives à Ω dont $\mathcal{R}_\tau$ est point-frontière *non négligeable*, c'est-à-dire tel que $C\Omega$ donne par inversion de pôle O un ensemble effilé en O (Un cas particulier est celui où $C(\Omega \cup \mathcal{R}_\tau)$ est effilé en $\mathcal{R}_\tau$). *Ainsi le lemme 7 se complète dans ce cas* par la propriété que $\underline{H}_f$ ou $\overline{H}_f$ fini admet comme fonction du point inverse M′ une pseudo-limite en O égale à $f(\mathcal{R}_\tau)$ nécessairement fini (ce qui entraîne par exemple une quasi-limite en $\mathcal{R}_\tau$ de même valeur pour la fonction de M). On utilisera pour cela 1° la conservation par transformation de Kelvin, de pôle O hors Ω, de la solution pour un f nul en $\mathcal{R}_\tau$ (la transformée de f étant aussi prise nulle en $\mathcal{R}_\tau$ s'il y a lieu); 2° une étude de la solution pour f nulle sauf en $\mathcal{R}_\tau$, qui rentre dans le principe des singularités positives approfondi dans l'article qui suit.

22. — Il sera facile maintenant de traiter la question analogue du problème ramifié.

THÉORÈME 17. — a) *Si θ est bornée continue sur $\mathcal{E}_\Omega$ et $\mathcal{L}_0^{Q_0}$ irrégulier (ce qui exige $Q_0 \neq \mathcal{R}_\tau$ si $\tau \geqslant 3$), H'_θ admet en Q_0 une pseudo-limite qui permet de définir comme fonctionnelle de θ prolongée, une intégrale de Daniell $\mathcal{J}_{\mathcal{L}_0}$ et une mesure correspondante $\mu'_{\mathcal{L}_0}$. La mesurabilité harmonique ramifiée équivaut à la mesurabilité-$\mu'_{\mathcal{L}_0}$ (avec identité des ensembles de mesure nulle) et la mesure $\mu'_{\mathcal{L}_0}(e)$ majore $K\mu'_M(e)$* (K *constante dépendant du choix de M) ce qui inclut que la sommabilité-$\mu'_{\mathcal{L}_0}$ ou $\mathcal{J}_{\mathcal{L}_0}$ entraîne la résolutivité.*

b) *Si f sur $\mathcal{E}_\Omega$ est résolutive est sommable-$\mathcal{J}_{\mathcal{L}_0}$ au sens large, H'_f admet en Q_0 une pseudo-limite finie ou non égale à $\mathcal{J}_{\mathcal{L}_0}(f)$. Plus généralement pour f quelconque, si les semi-intégrales de Daniell $\underline{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}_0}(f)$ et $\overline{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}_0}(f)$ ne sont pas infinies de signes contraires, $\underline{H}'_f$ et $\overline{H}'_f$ admettent en*

Q_0 *des pseudo-limites respectivement égales à ces semi-intégrales.* (Si $\underline{H}_f = -\infty$ on voit sans hypothèse supplémentaire sur f que $\mathfrak{I}_{\mathfrak{L}_0}(f) = -\infty$, valeur de la pseudo-limite).

c) *Si pour* f *quelconque l'un des* $\underline{H}'_f$, $\overline{H}'_f$ *est fini, son quotient par* $W_{Q_0}(M)$ *admet en* Q_0 *une pseudo-limite nulle* (et on peut compléter comme dans la remarque finale du n° 21) ([49]).

Introduisons encore essentiellement un domaine partiel ω tel que $\overset{*}{\omega} \subset (\Omega \cup Q_0)$ et dont Q_0 soit point-frontière irrégulier. Grâce à $H'_\theta = H^\omega_{\theta_1}$ où θ_1 vaut H'^{Ω}_θ dans Ω et à l'étude des cas simples, on voit que $\overline{H}'_\theta$ admet une pseudo-limite $\mathfrak{I}_{\mathfrak{L}_0}(\theta)$ qui satisfait bien aux conditions permettant de définir une intégrale de Daniell à partir des θ et de $\mathfrak{I}_{\mathfrak{L}_0}(\theta)$. La classe T_1 de Daniell sera formée des fonctions ψ bornées inférieurement, semi-continues inférieurement sur $\mathcal{E}_\Omega$. Utilisant encore ω et des passages à la limite, on voit que $\overline{H}'_\psi$ admet une pseudo-limite égale à $\mathfrak{I}_{\mathfrak{L}_0}(\psi)$, puisque la sommabilité-$\mathfrak{I}_{\mathfrak{L}_0}$ entraîne la résolutivité ([50]), tandis que si f est bornée, la résolutivité entraîne la sommabilité-$\mathfrak{I}_{\mathfrak{L}_0}$, avec pseudo-limite $\mathfrak{I}_{\mathfrak{L}_0}(f)$ ([51]), ce qui permet d'étudier tout comme dans le cas simple la mesure $\mu'_{\mathfrak{L}_0}$ correspondant à $\mathfrak{I}_{\mathfrak{L}_0}$, tout en développant les mêmes considérations sur la mesure qu'au numéro 12.

On pourra alors obtenir (b) en adaptant pas à pas les raisonnements du cas simple, mais on peut abréger et obtenir l'analogue du lemme 6 en utilisant ce lemme et un domaine partiel auxiliaire ω (le cas de $f \geqslant 0$ se traitant alors aussitôt par passage à la limite sur le cas borné). Ce même procédé avec ω réussit immédiatement pour étendre le lemme 7 et achever ainsi la démonstration.

([49]) Précisons à ce propos que l'ensemble e des $\mathfrak{L}^Q$ pour un Q fixé est de mesure ramifiée nulle *sauf* si $\tau \geqslant 3$, $Q = \mathcal{R}_-$ et si $\mathcal{R}_\tau$ est de mesure simple $\mu \neq 0$, dans quel cas la mesure ramifiée de e vaut μ et aussi la mesure ramifiée d'un seul des $\mathfrak{L}^Q$, celui qui correspond par inversion au point irrégulier du problème ramifié en O (conséquence comme plus haut du principe des singularités positives).

([50]) On prend $\varphi_n \geqslant f$ bornée supérieurement, semi-continue supérieurement, croissante telle que $\mathfrak{I}_{\mathfrak{L}_0}(\varphi_n) \to \mathfrak{I}_{\mathfrak{L}_0}(f)$ et $\psi_n \leqslant f$, bornée inférieurement, semi-continue inférieurement décroissante, telle que $\mathfrak{I}_{\mathfrak{L}_0}(\psi_n) \to \mathfrak{I}_{\mathfrak{L}_0}(f)$. Alors $\underline{H}'_{\varphi_n}$, $\overline{H}'_{\psi_n}$ sont finis pour n assez grand et $H'_{\varphi_n - \psi_n}$ de limite harmonique, soit > 0 soit nulle, a une pseudo-limite tendant vers o. En la considérant dans ω, on voit que lim. $H'_{\varphi_n - \psi_n}$ ayant une pseudo-limite nulle doit être nulle d'où le résultat.

([51]) On prend φ_n, ψ_n des mêmes types semi-continus, mais telles que H'_{φ_n} et H'_{ψ_n} tendent vers H'_f : on voit que, $H'_{\psi_n - \varphi_n}$ bornée tendant vers o, sa pseudo-limite qui vaut

$$\mathfrak{I}_{\mathfrak{L}_0}(\psi_n) - \mathfrak{I}_{\mathfrak{L}_0}(\varphi_n)$$

tend vers o.

VIII. — RELATIONS AVEC LA REPRÉSENTATION CONFORME

23\. — Considérons dans $\overline{R}_2$ un domaine Ω simplement connexe c'est-à-dire dont la frontière $\overset{*}{\Omega}$ est connexe. La condition que $C\Omega$ soit non polaire équivaut à ce que Ω contienne plus d'un point ([52]), critère classique pour qu'il soit représentable conformément sur le domaine circulaire unité D.

Étudions alors dans cette hypothèse les applications biunivoques conformes de Ω sur D qui se déduisent toutes de l'une d'elles, T, par des transformations homographiques conservant le cercle. L'étude ancienne bien connue de la transformation des arcs d'accès à la frontière dans Ω exprime au fond :

Théorème 18. — *L'image par* T *de* $\mathcal{U}_\Omega$ (n° 3) *est plus fine que la structure uniforme euclidienne de* D. *Par complétion,* T *se prolonge en une application uniformément continue mais de plus biunivoque de* $\mathcal{C}$ *dans* $\overline{D}$. *Ainsi aux arcs d'un* $\mathcal{L}$ *correspondent dans* D *des arcs de même extrémité* $\mathcal{L}'$ *sur* $\overset{*}{D}$ *et il y a application biunivoque (uniformément continue) de* $\mathcal{E}$ *sur une partie* $\mathcal{E}'$ *de* $\overset{*}{D}$.

Il suffit de reprendre à peu près de vieux raisonnements ([53]) basés sur des propriétés que l'on obtiendra ici comme conséquences faciles du lemme suivant :

Lemme 8. — *Soit dans* $\overline{R}_2$ *un domaine* Ω *de complémentaire non polaire et* ω *un domaine partiel. Notons* $\mu(M)$ *la mesure harmonique de* $\overset{*}{\Omega} \cap C\overset{*}{\omega}$ *relativement à* Ω. *Alors soit* $u \leqslant 0$ *sousharmonique dans* Ω, *majorée sur* $\overset{*}{\omega} \cap \Omega$ *par la constante* $K \leqslant 0$. *On aura :* $u(M) \leqslant K\mu(M)$ *pour* $M \in \omega$.

Si φ sur $\overset{*}{\omega}$ vaut o sur $\overset{*}{\Omega}$ et K sur $\overset{*}{\omega} \cap \Omega$, $u \leqslant H_\varphi^\omega$ dans ω. Prolongeons cette fonction H_φ^ω par K hors ω dans Ω. On obtient une fonction quasi-sousharmonique majorée par H_Φ^Ω où Φ vaut o sur $\overset{*}{\Omega} \cap \overset{*}{\omega}$ et K ailleurs sur $\overset{*}{\Omega}$, d'où le résultat.

([52]) Car un ensemble polaire connexe de $\overline{R}_2$ contient au plus un point à cause de son effilement en chaque point (Si dans le plan un ensemble est effilé en $O \neq \mathcal{R}_2$, il y a des circonférences arbitrairement petites de centre O ne rencontrant pas l'ensemble) (Voir *J. de Math,*, XIX, 1940, page 334).

([53]) Voir par exemple Montel, *Leçons sur les familles normales* (Paris 1927), chapitre IV.

Conséquence. — Prenons une suite de ω_n contenant un point fixe P, tels que le μ correspondant soit en P, $\geqslant \alpha > 0$ fixe. Si u bornée supérieurement dans Ω vaut $-\infty$ ou est sousharmonique et si elle est majorée sur $\overset{*}{\omega}_n \cap \Omega$ par $K_n \to -\infty$, alors $u \equiv -\infty$ partout.

Extension. — On peut supposer que la condition $u \leqslant K_n$ n'est peut-être pas vérifiée en des points de $\overset{*}{\omega}_n \cap \Omega$ à distance (en métrique de $\overline{R}_\tau$) $< \varepsilon_n \to 0$ d'un compact e (de $\overset{*}{\Omega}$) dont la mesure harmonique est nulle relativement à Ω (cas particulier, utile pour la suite, de e formé de deux points).

Il suffit en effet d'associer à e une fonction sousharmonique $v \leqslant 0$ dans Ω, tendant vers $-\infty$ aux points de e et de considérer $u + v$ qui satisfera alors aux conditions de l'énoncé précédent.

Dans $\overline{R}_2$ on pourra considérer $f(z)$ holomorphe dans Ω, de module borné et prendre $u = \log |f(z)|$.

On appliquera ces résultats pour établir le théorème 18 par contradiction en prenant pour cet $f(z)$ des fonctions $\varphi(z) - \lambda$ où φ applique Ω sur D ou bien D sur Ω préalablement transformé en domaine borné par une correspondance conforme simple.

Ainsi, si la première partie de l'énoncé était fausse on formerait par des extractions de suites, deux suites de points M_n, P_n de Ω (borné) convergeant dans R_2 vers un point Q de $\overset{*}{\Omega}$ et appartenant à un domaine partiel α_n dont le diamètre dans une métrique compatible avec $\mathcal{U}_\Omega$ tendrait vers 0, tandis que les images M'_n, P'_n tendraient vers M' et P' distincts de $\overset{*}{D}$. Introduisons alors un arc γ_n joignant M_n et P_n dans α_n, et son image γ'_n prolongée selon γ''_n fermé par les segments joignant M'_n et P'_n à M' et P'. On appliquera le lemme en prenant pour ω_n le domaine partiel de D séparé par γ''_n et contenant le centre de D, et choisissant $f(z)$ égal à $\varphi(z) - \lambda$ où φ applique D sur Ω et où λ vaut l'affixe de Q. On aboutirait à $\varphi(z) \equiv \lambda$ contradiction cherchée.

On montrera la biunivocité du théorème 18 par un raisonnement analogue en remarquant qu'une coupure de Ω le partage en deux domaines dont les frontières rencontrent $\overset{*}{\Omega}$ suivant des ensembles de mesure harmonique > 0.

24. — Lemme 9. — *Sur $\overset{*}{D}$, $\mathcal{E}'$ est borélien et son complémentaire est de mesure nulle (sur la circonférence)* [54].

[54] Cette propriété de la mesure rentre dans des résultats plus précis de Mlle Ferrand

Comme $\mathcal{E}$ est un espace métrique complet de base dénombrable, il résulte d'un théorème de Souslin ([55]) que $\mathcal{E}'$ obtenue par application continue biunivoque est non seulement analytique, mais borélien.

Considérons alors u sousharmonique dans D, bornée supérieurement, admettant en tout point-frontière de $\mathcal{E}'$ une limite supérieure $\leqslant 0$. Il suffit de voir que $u \leqslant 0$, ce qui résulte du lemme I en considérant dans Ω la transformée de u par T.

Théorème 19. — *Considérons Ω appliqué sur* D *par la transformation* T *prolongée par* $(\mathcal{L} \to \mathcal{L}')$. *Soit* f *une fonction réelle quelconque sur* $\mathcal{E}$, g *une fonction sur* $\overset{*}{\mathrm{D}}$ *devant seulement être égale à* $f(\mathcal{L})$ *en tout* $\mathcal{L}'$. *Alors aux points correspondants de* Ω, D :

$$\underline{H}_f^{\prime\Omega} = \underline{H}_g^{D}, \qquad \overline{H}_f^{\prime\Omega} = \overline{H}_g^{D}$$

On raisonnera un peu comme au théorème 2.

Les seconds membres sont indépendants du choix de g hors $\mathcal{E}'$; en considérant les fonctions dont ils sont les enveloppes, il est d'abord immédiat que

$$\underline{H}_g^{D} \leqslant \underline{H}_f^{\prime\Omega} \leqslant \overline{H}_f^{\prime\Omega} \leqslant \overline{H}_g^{D}.$$

Considérons de même une fonction u de I_f et sur $\mathcal{E}$ la fonction $\varphi = \limsup_{M \in \Omega,\, M \to \mathcal{L}} . \mathcal{E}\, u \leqslant f$ qui est semi-continue supérieurement.

Sa transformée $\psi(\mathcal{L}') = \varphi(\mathcal{L})$ prolongée par exemple par 0 hors $\mathcal{E}'$ est bornée supérieurement et mesurable sur $\overset{*}{\mathrm{D}}$, par exemple parce que borélienne ([56]).

D'où $$\underline{H}_\psi^{D} = \overline{H}_\psi^{D}.$$

Par suite $$u \leqslant \underline{H}_\varphi^{\prime\Omega} \leqslant \underline{H}_\psi^{D} \leqslant \underline{H}_g^{D} \quad \text{et} \quad \underline{H}_f^{\prime\Omega} \leqslant \underline{H}_g^{D}.$$

D'où la première égalité cherchée.

25. — L'image $\mathcal{V}_\Omega$ par T de la structure uniforme euclidienne de

(thèse ou *Ann. Ec. N.*, 1942) et surtout de Dufresnoy [*C. R.*, t. 220 (1945) p. 189 et rectification C. R., t. 222 (1946), p. 946 ; développement dans deux articles du *Bull. Sc. Math.*, t. 69 (1945), p. 21 et p. 117].

([55]) Voir par exemple Kuratowski, Topologie (*loc. cit.*), p. 251.

([56]) L'ensemble où $\varphi < \alpha$ variable, image continue biunivoque d'un ouvert est borélien (voir note 55)

D est une structure indépendante de T et Mazurkiewicz ([57]) en a d'ailleurs donné, par une métrique, une définition directe qui met en évidence que $\mathfrak{V}_\Omega$ est moins fine que $\mathfrak{U}_\Omega$ (première partie du théorème 18). On sait que les *bouts premiers* de Ω s'obtiennent comme *éléments de complétion* selon $\mathfrak{V}_\Omega$; pour T fixé, leur exemple correspond donc biunivoquement à $\overset{*}{D}$, et une partie à $\mathcal{E}'$, donc aussi à $\mathcal{E}$ indépendamment de T (on dira que ces bouts sont associés aux $\mathcal{L}$) ([58]).

Relativement au point A de Ω correspondant au centre O de D par T, la mesure conforme ([59]) d'un ensemble e de bouts premiers de Ω est la mesure sur la circonférence $\overset{*}{D}$ de l'ensemble correspondant sur $\overset{*}{D}$ (ce qui est indépendant de T pourvu que A et O se correspondent). On définira même ainsi la mesure extérieure (intérieure) et l'on voit d'après le théorème 19 qu'elle vaut le produit par 2π de la mesure harmonique ramifiée extérieure (intérieure) en A de l'ensemble des $\mathcal{L}$ dont les bouts premiers correspondants appartiennent à e.

Ainsi retrouvera-t-on aisément par la théorie du problème de Dirichlet ramifié des résultats connus sur la mesure conforme. Outre le résultat signalé au lemme 9, indiquons par exemple cet énoncé (Ostrowski-M[lle] Ferrand) ([59]) :

L'ensemble des bouts premiers associés aux $\mathcal{L}^Q$ dont le Q appartient à un ouvert δ est vide ou de mesure conforme > 0.

Voyons donc qu'ici l'ensemble des $\mathcal{L}^Q$ pour lesquels $Q \subset \delta$ est vide ou de mesure harmonique ramifiée > 0. Cela vient déjà d'après le théorème 2 de l'égalité de cette mesure avec la mesure harmonique simple de l'ensemble des Q précédents et de ce que tous les points de $\overset{*}{\Omega}$ sont réguliers.

Mais, plus généralement, on a le même résultat pour un *ouvert* de $\mathcal{E}$, ce qui est contenu dans le théorème général (9).

([57]) Mazurkiewicz, Über die Definition der Primenden. *Fundamenta Math.*, XXVI, p. 272 Voir les extensions de Choquet, *C. R.*, t. 216 (1943), p. 330.

([58]) De manière directe, dans Ω une classe d'équivalence de filtres de Cauchy selon $\mathfrak{V}_\Omega$ contient au plus une classe d'équivalence de filtres de Cauchy selon $\mathfrak{U}_\Omega$ (d'après la biunivocité du théorème 18), ce qui traduit qu'à un bout premier est associé au plus un $\mathcal{L}$. — Voir des précisions dans la thèse de M[lle] Ferrand et, dans son article « Étude de la correspondance entre les frontières dans la représentation conforme », *Bull. Soc. Math. de France*, t. 70 (1942).

([59]) Voir M[lle] Ferrand, *Bull. Soc. Math.* (*loc. cit.*).