ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

GEORGES DE RHAM

Sur la théorie des formes différentielles harmoniques

Annales de l'université de Grenoble, tome 22 (1946), p. 135-152

<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1946__22__135_0>

© Annales de l'université de Grenoble, 1946, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'université de Grenoble » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA THÉORIE DES FORMES DIFFÉRENTIELLES HARMONIQUES

par Georges de RHAM (Lausanne et Genève)(1).

Dans un travail récent [8] (2), la théorie des formes différentielles harmoniques de M. Hodge a été fondée sur un théorème d'existence relatif à une équation différentielle où l'inconnue est une forme différentielle extérieure et où intervient un opérateur qui généralise convenablement le laplacien. Ce théorème y est établi par la méthode de la paramétrix, de Hilbert, déjà utilisée dans cette même théorie, d'une manière un peu différente, par MM. Hodge [2] et Weyl [5].

Le premier objet de cet article est de donner de ce théorème d'existence une autre démonstration qui, tout en utilisant les mêmes principes, me paraît plus simple. Elle est exposée au nº 2 ; les définitions et les lemmes nécessaires sont rappelés au nº 1.

Pour déduire de ce théorème l'existence d'une forme *harmonique* ayant des périodes assignées, il fallait utiliser, comme dans les travaux de MM. Hodge et Weyl et comme cela est rappelé au nº 3, le théorème assurant l'existence d'une forme *fermée* ayant des périodes assignées, que j'ai établi dans ma thèse [7] par une méthode appartenant à un ordre d'idées différent. Il était naturel de chercher à éviter ce détour, comme la théorie des intégrales abéliennes permet de le faire dans le cas particulier des formes de degré 1 sur une surface. C'est là le second et principal objet de cet article.

La construction directe d'une forme harmonique ayant des

(1) Le contenu de cet article a été exposé au Colloque de Topologie de l'Université de Strasbourg, le 2 mai 1946.

(2) Les chiffres entre crochets [ ] renvoient à l'Index bibliographique placé à la fin de cet article.

périodes assignées, dont il résulte une nouvelle démonstration du théorème mentionné de ma thèse, est exposée au n° 6. Elle est basée sur la *forme de Green au sens élargi,* introduite au n° 4 suivant la méthode de Hilbert [2, p. 232], et sur *une expression analytique,* à l'aide de cette forme, *du nombre algébrique de points d'intersection* de deux champs à p et $n-p$ dimensions dans un espace de Riemann à n dimensions (n° 5).

Comme application de cette forme de Green, j'étudie encore au n° 7 l'équation analogue à celle des membranes vibrantes, dont les solutions fournissent des systèmes orthogonaux complets de formes différentielles extérieures. On retrouve ainsi, en particulier, les suites de fonctions fondamentales de M. Elie Cartan [1], et l'on peut encore en déduire un complément à un théorème de M. Whitney [6].

1. Rappel de quelques définitions et de quelques lemmes (3).

Étant donné un espace de Riemann à n dimensions V, clos et orientable, et une forme différentielle extérieure α de degré p $(0 \leqslant p \leqslant n)$ définie sur V, on désigne par α^* sa forme adjointe, de degré $n-p$, par $d\alpha$ sa différentielle extérieure, de degré $p+1$, par $\delta\alpha$ la forme $\delta\alpha = (-1)^{np+n+1}(d\alpha^*)^*$, de degré $p-1$, et par $\Delta\alpha$ la forme

$$\Delta\alpha = \delta d\alpha + d\delta\alpha,$$

de degré p. On dit que α est *harmonique* si $\Delta\alpha = 0$. Si $p=n$, $d\alpha = 0$, et si $p=0$, $\delta\alpha = 0$. Dans ce dernier cas, α est une fonction, $\Delta\alpha$ se réduit à $\delta d\alpha = -$ div. grad. α et l'équation $\Delta\alpha = 0$ se réduit à celle de Laplace-Beltrami. L'opérateur Δ est la généralisation naturelle du laplacien.

Le produit scalaire (α, β) de deux formes de même degré p est, par définition, l'intégrale étendue à V du produit extérieur $\alpha\beta^*$,

$$(\alpha, \beta) = \int \alpha\beta^*.$$

On a $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ et $(\alpha, \alpha) \geqslant 0$. L'égalité $(\alpha, \alpha) = 0$ ne peut avoir lieu que si $\alpha = 0$ (les coefficients de α étant supposés continus).

(3) Pour plus de détails, voir [8]. En renvoyant à ce travail, je signale une petite différence dans les notations : les formes de degré p désignées ici par $\delta\alpha$, $\Delta\alpha$, $\omega(x, y)$, $\Omega\alpha$ correspondent aux formes désignées dans [8] par $(-1)^{np+n+1}\delta\alpha$, $-\Delta\alpha$, $+\frac{1}{k}\omega_p(x, y)$ et $-\frac{1}{k}\Omega\alpha$ respectivement.

Une intégration par parties conduit à la formule

$$(d\mu, \nu) = (\mu, \delta\nu) \tag{1. 1}$$

où μ et ν sont deux formes de degrés p et $p+1$ respectivement, de classe C^1 (c'est-à-dire à coefficients différentiables).

Cette formule est encore valable si μ et ν deviennent infinies d'un ordre inférieur à $n-1$, en des points isolés et distincts. Elle entraîne les formules suivantes, où α et β sont des formes de même degré :

$$(d\delta\alpha, \beta) = (\alpha, d\delta\beta) = (\delta\alpha, \delta\beta) \tag{1. 2}$$

$$(\delta d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta d\beta) = (d\alpha, d\beta) \tag{1. 3}$$

d'où résulte par addition

$$(\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta\beta) = (d\alpha, d\beta) + (\delta\alpha, \delta\beta). \tag{1. 4}$$

En particulier, $(\Delta\alpha, \alpha) = (d\alpha, d\alpha) + (\delta\alpha, \delta\alpha)$, ce qui montre que l'équation $\Delta\alpha = 0$ entraîne $d\alpha = 0$ et $\delta\alpha = 0$, c'est-à-dire que la définition donnée ici des formes différentielles harmoniques est équivalente à celle de M. Hodge, du moins tant que l'on se borne à considérer des formes partout régulières sur un espace clos.

On appelle *fonction distance* sur V, de classe C^m, toute fonction $r(x, y)$ de deux points x et y de V jouissant des propriétés suivantes:

1° $r(x, y) = r(y, x) > 0$ si $x \neq y$, $r(x, x) = 0$.

2° $r^2(x, y)$ est une fonction de classe C^m sur V de chacun des points x et y, c'est-à-dire a des dérivées continues jusqu'à l'ordre m par rapport aux coordonnées des points x et y.

3° Lorsque y est infiniment voisin de x, $r(x, y)$ se réduit à l'élément linéaire ds de l'espace riemannien V.

Si $\rho(x, y)$ est la distance géodésique de x et y, $f(t)$ une fonction non décroissante de t, indéfiniment dérivable, égale à t pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et constante pour $t > \varepsilon$, ε étant un nombre positif assez petit ne dépendant que de V, $f[\rho(x, y)]$ est une fonction distance sur V.

En désignant par $x^1, \ldots, x^n$ les coordonnées de x et par $y^1, \ldots, y^n$ celles de y et posant $A_{i,j} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial x^i \partial y^j}$, la condition 3° ci-dessus signifie que $A_{i,j}$ se réduit, pour $x = y$, au coefficient g_{ij} de la forme quadratique $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$.

En désignant encore par $A_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_p}$ le mineur extrait du déterminant $\|A_{i,j}\|$ en prenant ses lignes de rang $i_1, \ldots, i_p$ et ses colonnes de rang $j_1, \ldots, j_p$ et par s_n la surface à $n-1$ dimensions de la sphère de rayon 1 dans l'espace euclidien à n dimensions, la paramétrix de degré p, $\omega(x, y)$, introduite par MM. Kneser et Hodge, est définie en posant

$$\omega(x, y) = \frac{1}{s_n} \frac{r^{2-n}}{n-2} \frac{1}{(p\,!)^2} A_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_p} [dx^{i_1} \ldots dx^{i_p}][dy^{j_1} \ldots dy^{j_p}].$$

La paramétrix étant symétrique, $\omega(x, y) = \omega(y, x)$, l'opérateur Ω défini en posant

$$\Omega\alpha = \int \omega(x, y)\alpha^*(y) = \big(\omega(x, y), \alpha(y)\big)$$

l'est également, c'est-à-dire que $(\Omega\alpha, \beta) = (\alpha, \Omega\beta)$.

En outre, la paramétrix jouit des propriétés suivantes :

a) $\Delta_x\omega(x, y)$ est infinie d'ordre $\leqslant n-2$ pour $x = y$.

b) Q et Q′ étant les opérateurs définis en posant

$$Q\alpha = \int \Delta_x\omega(x, y)\alpha^*(y) \qquad \text{et} \qquad Q'\alpha = \int \Delta_y\omega(y, x)a^*(y),$$

on a $(Q\alpha, \beta) = (\alpha, Q'\beta)$ et les deux formules

$$\Delta\Omega\alpha = \alpha + Q\alpha \quad (1.\ 5), \qquad \Omega\Delta\alpha = \alpha + Q'\alpha \quad (1.\ 6)$$

Dans (1. 5), α est supposée de classe C^1, $\Omega\alpha$ étant alors de classe C^2.

Dans (1. 6), α est supposée de classe C^2. Pour les démonstrations, voir [8, chap. II], où (1, 6) est appelée formule I et (1. 5) formule II.

2. Théorème.

Sur un espace de Riemann clos et orientable, il n'y a qu'un nombre fini de formes harmoniques linéairement indépendantes. Étant donnée une forme β *à coefficients différentiables, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* $\Delta\mu = \beta$ *soit possible est que* β *soit orthogonale à toutes les formes harmoniques du même degré.*

Ce théorème a été établi dans [8, chap. III] en suivant la méthode de Hilbert. La démonstration que voici, plus simple, se rattache plutôt à la méthode de E. E. Levi [4].

Toute forme harmonique φ, satisfaisant à l'équation $\Delta\varphi = 0$, satisfait aussi à l'équation $\Omega\Delta\varphi = 0$, qu'on peut écrire, d'après (1. 6) :

$$\varphi + Q'\varphi = 0. \qquad (2.\ 1)$$

D'après la théorie de Fredholm (cf. [8], Appendice), cette équation intégrale homogène n'a qu'un nombre fini de solutions linéairement indépendantes, d'où résulte immédiatement la première partie du théorème.

Si $\Delta\varphi = 0$, en vertu de (1. 4), $(\Delta\mu, \varphi) = (\mu, \Delta\varphi) = 0$; il est donc nécessaire, pour que l'équation $\Delta\mu = \beta$ soit possible, que β soit orthogonale à toutes les formes harmoniques.

Pour montrer que cette condition est aussi suffisante, considérons d'abord le cas où l'équation (2. 1) n'a pas d'autres solutions que les formes harmoniques. D'après la théorie de Fredholm, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\xi + Q\xi = \beta, \qquad \text{ou, en vertu de (1. 5),} \qquad \Delta\Omega\xi = \beta \quad (2.\ 2)$$

soit possible, est que β soit orthogonale à toutes les solutions de l'équation homogène associée à (2. 2), équation qui n'est autre que (2. 1) et dont les solutions, dans le cas actuel, sont les formes harmoniques.

Cette condition étant remplie, (2. 2) a une solution ξ et $\mu = \Omega\xi$ satisfait à l'équation proposée $\Delta\mu = \beta$.

Considérons enfin le cas où l'équation (2. 1) admet d'autres solutions que les formes harmoniques, et désignons par Φ celles qui sont orthogonales à toutes les formes harmoniques. Elles constituent une multiplicité linéaire E_Φ à un nombre fini d de dimensions. Φ_1 étant l'une de ces formes, $(\Delta^2\Phi_1, \Phi)$ (4) est une fonction linéaire de Φ dans E_Φ. Comme $(\Delta^2\Phi_1, \Phi_1) = (\Delta\Phi_1, \Delta\Phi_1)$, en vertu de (1. 4), cette fonction linéaire ne peut s'annuler identiquement que si $\Delta\Phi_1 = 0$, c'est-à-dire si $\Phi_1 = 0$ puisque Φ_1 est orthogonale à toutes les formes harmoniques. Par suite, lorsque Φ_1 décrit E_Φ, $(\Delta^2\Phi_1, \Phi)$ décrit une multiplicité linéaire à d dimensions de fonctions linéaires dans E_Φ, qui est nécessairement la multiplicité de toutes les fonctions linéaires dans E_Φ. On peut donc choisir Φ_1 de manière que $(\Delta^2\Phi_1, \Phi) = (\beta, \Phi)$ quelle que soit Φ. La forme $\beta - \Delta^2\Phi_1$ est alors orthogonale à toutes les formes Φ ; elle est aussi orthogonale à toutes les formes harmoniques, β l'étant par hypothèse et $\Delta^2\Phi_1$ en vertu de (1. 4) ; elle est par suite orthogonale à toutes les solutions de (2. 1), ce qui assure

(4) Pour être assuré de l'existence de $\Delta^2\Phi_1$, il suffit de savoir que Φ_1 est de classe C^4. C'est ce qui résulte du fait que Φ_1 satisfait à (2.1), en vertu d'un mode de raisonnement classique en théorie du potentiel, pourvu que $\Delta_y\omega(x, y)$ soit de classe C^4, ce qui aura certainement lieu si la paramétrix est de classe C^6.

l'existence d'une solution ξ de l'équation intégrale

$$\xi + Q\xi = \beta - \Delta^2\Phi_1 \tag{2. 3}$$

qui peut s'écrire, d'après (1. 5), $\Delta(\Omega\xi + \Delta\Phi_1) = \beta$, de sorte que la forme $\mu = \Omega\xi + \Delta\Phi_1$ satisfait à l'équation proposée $\Delta\mu = \beta$, et le théorème est ainsi établi.

3. Soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_R$ un système complet de formes harmoniques linéairement indépendantes de degré p, normalisées et deux à deux orthogonales : $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_i^j$; posons encore

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^{R} \varphi_i(x)\varphi_i(y).$$

La forme $H\alpha = \int h(x, y)\alpha^*(y)$ est harmonique, et $\alpha - H\alpha$ est orthogonale à toutes les formes harmoniques. Il existe par suite, en vertu du théorème établi, une solution μ de l'équation $\Delta\mu = \alpha - H\alpha$ ou $\alpha = d\delta\mu + \delta d\mu + H\alpha$, ce qui montre que toute forme α peut être décomposée en la somme de trois formes, respectivement homologue à zéro, adjointe à une forme homologue à zéro et harmonique. Ces trois formes étant deux à deux orthogonales, comme cela résulte de (1. 1), une telle décomposition n'est possible que d'une manière.

C'est le *théorème de décomposition* [8, p. 15]. Il montre que toute forme fermée est homologue à une forme harmonique et à une seule : si $d\alpha = 0$, α est en effet homologue à $H\alpha$. *Le nombre* $R = R_p$ *est donc égal au nombre de formes fermées de degré p entre lesquelles n'existe aucune homologie.*

Comme $\Delta\alpha^* = (\Delta\alpha)^*$ (Cf. les formules (5. 4) ci-dessous), une forme est harmonique en même temps que son adjointe, d'où l'égalité $R_p = R_{n-p}$ qui correspond au théorème de dualité de Poincaré, car on sait, comme cela sera d'ailleurs établi à nouveau ci-dessous, que R_p est égal au $p^{\text{ième}}$ nombre de Betti de l'espace V.

4. La forme de Green au sens élargi.

D'après (1. 6), le produit scalaire $\big(\Delta_x\omega(x, y), \alpha(x)\big) = Q'\alpha(y)$ est une forme en y égale à $\Omega\Delta\alpha(y) - \alpha(y)$. En particulier, si φ est harmonique, on a

$$\big(\Delta_x\omega(x, y), \varphi(x)\big) = -\varphi(y)$$

et comme $H\varphi(y) = \big(h(x, y), \varphi(x)\big) = \varphi(y)$, la forme

$$\Delta_x \omega(x, y) + h(x, y),$$

considérée comme une forme en x, est orthogonale à toutes les formes harmoniques. Par suite, l'équation

$$\Delta_x \mu = \Delta_x \omega(x, y) + h(x, y) \tag{4.1}$$

admet une solution $\mu(x, y)$ fournie par la méthode du n° 3. Le fait que pour $x = y$ le second membre est infini d'ordre $n - 2$ au plus entraîne que la solution ξ de l'équation (2. 3) (où l'on remplace β par le second membre de $(4.1)\big)$ est aussi infinie d'ordre $n - 2$ au plus, et $\mu = \Omega\xi + \Delta\Phi_1$ est par suite infinie d'ordre $n - 4$ au plus.

Suivant Hilbert [2, p. 233], j'appellerai *forme de Green au sens élargi* la double forme

$$g(x, y) = \omega(x, y) - \mu(x, y) - H_x[\omega(x, y) - \mu(x, y)].$$

Elle satisfait à l'équation

$$\Delta_x g(x, y) = -h(x, y) \tag{4.2}$$

et, considérée comme une forme en x, elle est orthogonale à toutes les formes harmoniques. Pour $x = y$, elle est infinie du même ordre $n - 2$ que $\omega(x, y)$.

Cette forme est *symétrique* : $g(x, y) = g(y, x)$. Pour le prouver, il suffit d'établir l'identité des deux opérateurs G et G′ définis en posant

$$G\alpha = \int g(x, y)\alpha^*(y) \qquad \text{et} \qquad G'\alpha = \int g(y, x)\alpha^*(y).$$

La forme $\mu_0(x) = \omega(x, y) - g(x, y)$ n'étant infinie que d'ordre $n - 4$ au plus pour $x = y$, on a, d'après (1.4), $(\Delta\mu_0, \alpha) = (\mu_0, \Delta\alpha)$ d'où $(g, \Delta\alpha) - (\Delta g, \alpha) = (\omega, \Delta\alpha) - (\Delta\omega, \alpha)$. Cette dernière relation (où α est une forme en x et où, l'intégration ayant lieu par rapport à x, chaque membre est une forme en y) peut s'écrire, en tenant compte de (4.2) et de (1.6), $G'\Delta\alpha + H\alpha = \Omega\Delta\alpha - Q'\alpha = \alpha$, d'où résulte

$$G'\Delta\alpha = \alpha - H\alpha. \tag{4.3}$$

D'une manière analogue, en utilisant (1.5), on obtient

$$\Delta G\alpha = \alpha - H\alpha. \tag{4.4}$$

Le fait que $g(x, y)$, considérée comme une forme en x, est orthogonale aux formes harmoniques, se traduit par $G'H\alpha = 0$, d'où résulte encore $HG\alpha = 0$, en vertu de l'identité

$$(G'H\alpha, \beta) = (H\alpha, G\beta) = (\alpha, HG\beta).$$

En remplaçant α par $G\alpha$ dans (4.3), il vient alors $G'\Delta G\alpha = G\alpha$, et en appliquant G' aux deux membres de (4.4), $G'\Delta G\alpha = G'\alpha$, d'où l'identité cherchée $G\alpha = G'\alpha$.

Notons les formules (4.3) et (4.4), qui nous seront utiles et qui se réduisent à

$$\Delta G\alpha = G\Delta\alpha = \alpha - H\alpha. \tag{4.5}$$

Nous allons établir maintenant que *les opérateurs* G *et* δ *sont permutables*.

Pour cela, remarquons d'abord que les opérateurs Δ et δ sont permutables : $\delta\Delta = \Delta\delta = \delta d\delta$. Il en est de même pour H et δ, puisque $H\delta\alpha = \delta H\alpha = 0$, et pour G et H, puisque $GH\alpha = HG\alpha = 0$. Les opérateurs Δ et $*$ sont aussi permutables, ainsi que H et $*$:

$$\Delta\alpha^* = (\Delta\alpha)^* \qquad \text{et} \qquad H\alpha^* = (H\alpha)^*,$$

comme on le vérifie immédiatement.

En remplaçant α par $\delta G\alpha$ dans la formule (4.5), $G\Delta\alpha = \alpha - H\alpha$, il vient $G\Delta\delta G\alpha = \delta G\alpha$, et en appliquant l'opérateur $G\delta$ aux deux membres de l'autre formule (4.5), $\Delta G\alpha = \alpha - H\alpha$, il vient d'autre part $G\delta\Delta G\alpha = G\delta\alpha$, d'où, comme $\delta\Delta = \Delta\delta$, $G\delta\alpha = \delta G\alpha$. C. Q. F. D.

De la même manière, on établit que *les opérateurs* G *et* $*$ *sont permutables* : $G\alpha^* = (G\alpha)^*$. On a évidemment aussi $dG = Gd$.

Ces relations font intervenir des formes $h(x, y)$ et $g(x, y)$ de degrés différents. Pour les distinguer, désignons par $h_p(x, y)$ et $g_p(x, y)$ celles qui sont de degré p (tant en x qu'en y).

On a, α étant une forme régulière de degré p :

$$\delta G\alpha = \int \delta_x g_p(x, y)\alpha^*(y)$$

et, en tenant compte de (1.1) :

$$G\delta\alpha = \int g_{p-1}(x, y)(\delta_y\alpha)^* = (g_{p-1}(x, y), \delta_y\alpha(y)) = (d_y g_{p-1}(x, y), \alpha(y)).$$

Par suite

$$G\delta\alpha = \int d_y g_{p-1}(x, y)\alpha^*(y)$$

et l'identité $G\delta\alpha = \delta G\alpha$ entraîne

$$\delta_x g_p(x, y) = d_y g_{p-1}(x, y). \tag{4.6}$$

En tenant compte de l'identité $(\alpha^*)^* = (-1)^{pn+p}\alpha$, où α est une forme de degré p, on voit de même que la permutabilité des opérateurs G et * se traduit par la relation

$$g_p(\overset{*}{x}, y) = (-1)^{pn+p} g_{n-p}(x, \overset{*}{y}) \qquad (4.7)$$

où $g_p(\overset{*}{x}, y)$ est l'adjointe en x à $g_p(x, y)$ et $g_{n-p}(x, \overset{*}{y})$ l'adjointe en y à $g_{n-p}(x, y)$. Il en résulte encore que $g_{n-p}(x, y)$ est égale à l'adjointe en x et en y à $g_p(x, y)$: $g_{n-p}(x, y) = g_p(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$.

5. Théorème.

Sur l'espace de Riemann clos et orientable à n dimensions V, *soient c^p et c^{n-p} deux champs d'intégration à p et $n-p$ dimensions respectivement* $(0 \leqslant p \leqslant n)$, *tels que c^p ne touche pas le bord $\mathfrak{L}c^{n-p}$ de c^{n-p} et c^{n-p} ne touche pas le bord $\mathfrak{L}c^p$ de c^p. L'expression*

$$\mathrm{I}(c^p, c^{n-p}) = \int_{c^{n-p}} \int_{\mathfrak{L}c^p} \delta_y g_p(\overset{*}{x}, y) + \int_{c^p} \int_{\mathfrak{L}c^{n-p}} \delta_x g_p(\overset{*}{x}, y) + \int_{c^p} \int_{c^{n-p}} h_p(\overset{*}{x}, y)$$

où les intégrations ont lieu par rapport à x sur $\mathfrak{L}c^{n-p}$ et sur c^{n-p} et par rapport à y sur $\mathfrak{L}c^p$ et sur c^p, est égale au nombre algébrique de points d'intersections de c^p avec c^{n-p}.

Pour établir ce théorème, nous allons montrer qne $\mathrm{I}(c^p, c^{n-p})$ jouit de quelques propriétés qui caractérisent le nombre algébrique de points d'intersections.

D'après la formule de Stokes, on a

$$\int_{\mathfrak{L}c^p} \delta_y g_p(\overset{*}{x}, y) = \int_{c^p} d_y \delta_y g_p(\overset{*}{x}, y) \qquad (5.1)$$

pourvu toutefois que le point x ne se trouve pas sur le champ c^p, sinon l'intégrale au second membre pourrait cesser d'avoir un sens.

Le premier membre est une forme en x continue en tout point non situé sur c^p. *Si $p < n$,* chaque point de c^p est point limite de points non situés sur c^p et *la forme en x représentée par le second membre de* (5.1) *peut par suite être prolongée par continuité en tous les points de c^p non situés sur $\mathfrak{L}c^p$.*

De même, on a

$$\int_{\mathfrak{L}c^{n-p}} \delta_x g_p(\overset{*}{x}, y) = \int_{c^{n-p}} d_x \delta_x g_p(\overset{*}{x}, y) \tag{5.2}$$

et la forme en y représentée par le second membre, qui a un sens si y ne se trouve pas sur c^{n-p}, peut, si $p > 0$, être prolongée par continuité en tous les points de c^{n-p} non situés sur $\mathfrak{L}c^{n-p}$.

D'autre part, α étant une forme de degré p, on a, comme on le vérifie aisément, en vertu de la définition même des opérateurs * et δ,

$$(\delta\alpha)^* = (-1)^p d\alpha^* \quad \text{et} \quad \delta\alpha^* = (-1)^{p+1}(d\alpha)^*, \tag{5.3}$$

d'où

$$(d\delta\alpha)^* = \delta d\alpha^* \quad \text{et} \quad (\delta d\alpha)^* = d\delta\alpha^*. \tag{5.4}$$

Comme $d_x g_p(x, y) = \delta_y g_{p+1}(x, y)$, d'après (4.6) où l'on permute x et y et où l'on remplace p par $p+1$, il vient

$$\delta_x d_x g_p(x, y) = \delta_x \delta_y g_{p+1}(x, y).$$

Cette dernière forme est symétrique, les opérateurs δ_x et δ_y étant permutables. Par suite,

$$\delta_x d_x g_p(x, y) = \delta_y d_y g_p(x, y),$$

d'où, en prenant l'adjointe en x :

$$d_x \delta_x g_p(\overset{*}{x}, y) = \delta_y d_y g_p(\overset{*}{x}, y).$$

En vertu de (4.2) et de la symétrie de $g_p(x, y)$, on a encore

$$\delta_y d_y g_p(x, y) = -\, d_y \delta_y g_p(x, y) - h_p(x, y)$$

d'où, en prenant l'adjointe en x,

$$d_x \delta_x g_p(\overset{*}{x}, y) = \delta_y d_y g_p(\overset{*}{x}, y) = -\, d_y \delta_y g_p(\overset{*}{x}, y) - h_p(\overset{*}{x}, y)$$

d'où, d'après (5.2),

$$\int_{\mathfrak{L}c^{n-p}} \delta_x g_p(\overset{*}{x}, y) = -\int_{c^{n-p}} d_y \delta_y g_p(\overset{*}{x}, y) - \int_{c^{n-p}} h_p(\overset{*}{x}, y)$$

ce qui entraîne finalement, en tenant compte de (5.1), la formule

$$\mathrm{I}(c^p, c^{n-p}) = \int_{c^{n-p}} \int_{c^p} d_y \delta_y g_p(\overset{*}{x}, y) - \int_{c^p} \int_{c^{n-p}} d_y \delta_y g_p(\overset{*}{x}, y) \tag{5.5}$$

Il résulte immédiatement de cette formule que *si les champs* c^p

et c^{n-p} *n'ont aucun point commun,* $I(c^p, c^{n-p}) = 0$. Les intégrations dans chaque terme au second membre peuvent alors en effet être permutées.

Si les champs c^p et c^{n-p} se coupent, sans qu'aucun d'eux ne coupe le bord de l'autre, et si $0 < p < n$, la formule (5.5) conserve un sens, pourvu qu'on interprète les intégrales au second membre comme il a été expliqué, en les prolongeant par continuité.

Si c^p est homologue à zéro, $c^p = \mathfrak{L}c^{p+1}$, le premier et le troisième termes de l'expression de $I(c^p, c^{n-p})$ sont alors nuls, et cette expression se réduit à

$$I(\mathfrak{L}c^{p+1}, c^{n-p}) = \int_{\mathfrak{L}c^{p+1}} \int_{\mathfrak{L}c^{n-p}} \delta_x g_p(\overset{*}{x}, y) \tag{5.6}$$

De même, on a

$$I(c^{p+1}, \mathfrak{L}c^{n-p}) = \int_{\mathfrak{L}c^{n-p}} \int_{\mathfrak{L}c^{p+1}} \delta_y g_{p+1}(\overset{*}{x}, y) \tag{5.7}$$

les intégrations au second membre pouvant être interverties.

En prenant l'adjointe en x aux deux membres de la relation $d_x g_p(x, y) = \delta_y g_{p+1}(x, y)$, équivalente à (4.6), et tenant compte de la seconde identité (5.3), on a encore

$$\delta_x g_p(\overset{*}{x}, y) = (-1)^{p+1} \delta_y g_{p+1}(\overset{*}{x}, y),$$

ce qui entraîne, en vertu de (5.6) et (5.7),

$$I(\mathfrak{L}c^{p+1}, c^{n-p}) = (-1)^{p+1} I(c^{p+1}, \mathfrak{L}c^{n-p}) \tag{5.8}$$

formule qui est valable sous la seule condition que $\mathfrak{L}c^{p+1}$ et $\mathfrak{L}c^{n-p}$ ne se touchent pas.

Considérons encore le cas où $p = 0$, où $c^p = c^0$ se réduit à un point y_0 pris avec le coefficient $+1$, et où $c^{n-p} = c^n$ se réduit à l'espace V orienté positivement (rappelons que l'orientation positive de V intervient dans la définition de l'adjointe). V étant supposé connexe, les formes de degré 0 ou fonctions harmoniques sur V se réduisent aux constantes, $\varphi = C$ (en vertu de $d\varphi = 0$). Pour qu'une telle forme soit normalisée, soit que $(\varphi, \varphi) = \int C^2 1^* = 1$, il faut que $C = \pm V^{-\frac{1}{2}}$ (1^* désignant l'élément de volume et V le volume total de l'espace V), et par suite $h_0(x, y) = V^{-1}$, fonction constante en x et en y, et le troisième terme de l'expression de $I(c^p, c^{n-p}) = I(y_0, V)$ est égal à 1. Les deux premiers termes de cette expression étant nuls, on a

$$I(y_0, V) = 1. \tag{5.9}$$

En résumé : $I(c^p, c^{n-p})$ est un nombre bien déterminé pourvu qu'aucun des champs c^p et c^{n-p} ne touche le bord de l'autre ; il dépend linéairement de chacun de ces deux champs, il est nul lorsqu'ils ne se touchent pas et il satisfait aux deux relations (5.8) et (5.9).

Ces propriétés caractérisant, comme on sait, le nombre algébrique des points d'intersection de c^p avec c^{n-p}, le théorème est établi.

Remarque 1. — La formule (4.7) entraîne immédiatement la relation

$$I(c^p, c^{n-p}) = (-1)^{pn+p} I(c^{n-p}, c^p),$$

propriété bien connue du nombre algébrique de points d'intersections.

Remarque 2. — Sans examiner ici comment doivent être modifiés et complétés les développements précédents lorsque l'espace V est ouvert, considérons toutefois le cas de l'espace euclidien. On peut y définir directement la forme $g(x, y)$ par l'expression même de la paramétrix donnée au n° 1, en prenant comme fonction distance la distance euclidienne. En utilisant un système de coordonnées rectangulaires, cette expression se réduit à

$$g(x, y) = \frac{1}{s_n} \frac{r^{2-n}}{n-2} \sum [dx^{i_1} \ldots dx^{i_p}] [dy^{i_1} \ldots dy^{i_p}]$$

où la sommation doit être étendue aux $\binom{n}{p}$ combinaisons d'indices $(i_1 \ldots i_p)$. Cette forme satisfait à l'équation (4.2), où l'on pose $h_p(x, y) = 0$, et le théorème précédent, qui est encore valable comme on le vérifie aisément, admet une interprétation géométrique simple par la notion d'angle solide.

Par exemple, dans le cas où $p = 1$ et $n = 2$ (le facteur $\dfrac{r^{2-n}}{n-2}$ dans l'expression $g(x, y)$ étant alors remplacé par $-\log r$), en tenant compte de (5.5), il se réduit à ceci : L *et* L′ *étant deux lignes planes, dont aucune ne touche les extrémités de l'autre, le nombre algébrique de points d'intersections* I(L, L′) *est égal à la différence entre l'intégrale, étendue à* L′, *de la différentielle de l'angle sous lequel est vu* L, *et l'intégrale, étendue à* L, *de la différentielle de l'angle sous lequel est vu* L′. Pour $n = 3$, on retrouve en particulier l'intégrale de Gauss représentant le coefficient d'enlacement de deux courbes fermées dans l'espace à 3 dimensions.

6. Le théorème établi au n° 5 a pour corollaire immédiat le suivant :

Le nombre algébrique de points d'intersection $I(c^p, c^{n-p})$ *de deux cycles* c^p *et* c^{n-p} *est égal à*

$$I(c^p, c^{n-p}) = \int_{c^p}\int_{c^{n-p}} h_p(\overset{*}{x}, y).$$

Il est aisé de déduire de là l'expression d'une forme harmonique ayant des périodes assignées. Soit P le $p^{\text{ième}}$ nombre de Betti de l'espace V. D'après le théorème de dualité de Poincaré, il est égal au $(n-p)^{\text{ième}}$ nombre de Betti, et l'on peut trouver deux systèmes fondamentaux de cycles à p et $n-p$ dimensions,

$$c_1^p, \ldots, c_P^p \qquad \text{et} \qquad c_1^{n-p}, \ldots, c_P^{n-p}$$

tels que

$$I(c_i^p, c_k^{n-p}) = \delta_i^k. \tag{6. 1}$$

Posons, les $a_i (i = 1, \ldots, P)$ étant des nombres donnés arbitrairement,

$$\Phi_i = \int_{c_i^{n-p}} h_p(\overset{*}{x}, y) \qquad \text{et} \qquad \Phi = \sum a_i \Phi_i.$$

La forme Φ est harmonique, et il résulte immédiatement du théorème ci-dessus et de (6. 1) que ses périodes fondamentales sont égales aux nombres a_i. Le théorème de Hodge est ainsi établi.

Une forme harmonique dont les périodes sont nulles étant identiquement nulle (Cf. [3] ou [8]), il en résulte l'égalité $R_p = P$ déjà indiquée au n° 3.

Remarque. Cette démonstration, ne faisant pas appel au théorème assurant l'existence d'une forme fermée ayant des périodes assignées, en fournit une démonstration nouvelle.

A l'aide des théorèmes de ma thèse [7, chap. III] et des résultats du n° 3, sans faire usage de la forme de Green, on peut établir non seulement le théorème de Hodge, comme il a été dit, mais aussi le corollaire au théorème du n° 5 qui a été utilisé ci-dessus. En effet, d'après ces théorèmes, on peut trouver un système fondamental de formes harmoniques de degré p, $\chi_i(x)$ $(i = 1, \ldots, R_p)$, tel que

$$\int_{c_k^p} \chi_i(x) = \delta_i^k \tag{6. 2}$$

et un système fondamental de formes harmoniques de degré $n-p$, que l'on peut désigner par $\overset{*}{\Psi}_i(x)$ $(i = 1, \ldots, P_p)$, les $\Psi_i(x)$ étant harmoniques de degré p, tel que

$$\int_{c_k^{n-p}} \overset{*}{\Psi}_i(x) = \delta_i^k. \qquad (6.\ 3)$$

Les relations (6. 1), (6. 2) et (6. 3) entraînent, en tenant compte de l'un des théorèmes mentionnés, la relation $(\chi_i, \Psi_k) = \delta_i^k$, qui exprime que les χ_i et les Ψ_i constituent un système biorthogonal. Il en résulte que l'on a

$$h_p(x, y) = \sum \chi_i(x) \Psi_i(y)$$

et par suite

$$\int_{c_i^p} \int_{c_k^{n-p}} h_p(x, \overset{*}{y}) = \int_{c_i^p} \chi_k(x) = \delta_i^k = \mathrm{I}(c_i^p, c_k^{n-p})$$

et le théorème que l'on voulait établir se déduit immédiatement de cette dernière relation, qui en est d'ailleurs un cas particulier.

7. La forme de Green introduite au n° 4 est susceptible d'autres applications (Cf. [2], p. 232-235). Elle permet tout d'abord de résoudre très simplement l'équation étudiée au n° 2. En effet, d'après (4. 5), on a

$$\Delta G\beta = \beta - H\beta$$

de sorte que si β est orthogonale aux formes harmoniques, $\mu = G\beta$ est solution de l'équation $\Delta\mu = \beta$. Remarquons que c'est la solution orthogonale aux formes harmoniques.

La forme de Green permet aussi d'étudier l'équation, analogue à celle des membranes vibrantes, $\Delta\mu = \lambda\mu$, suivant la méthode de Hilbert.

Les valeurs propres réelles de cette équation sont nécessairement positives (la valeur $\lambda = 0$ étant laissée de côté), car $\Delta\mu = \lambda\mu$ entraîne $(\Delta\mu, \mu) = \lambda(\mu, \mu)$, et, d'après (1. 4), $(\Delta\mu, \mu)$ comme (μ, μ) ne peut pas être négatif. $\Delta\mu$ étant toujours orthogonale aux formes harmoniques, les solutions de cette équation le sont aussi.

D'après (4. 5), $\Delta G\mu = G\Delta\mu = \mu - H\mu = \mu$, de sorte que l'équation $\Delta\mu = \lambda\mu$ est équivalente à l'équation intégrale homogène à noyau symétrique $\mu = \lambda G\mu$, à laquelle s'appliquent les théorèmes de Fredholm et de Hilbert-Schmidt.

Il en résulte l'existence d'une infinité de valeurs propres, toutes réelles et non négatives, n'ayant pas de point d'accumulation à distance finie. Deux solutions correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonales. A chaque valeur propre correspond un nombre fini de solutions linéairement indépendantes, que l'on peut choisir deux à deux orthogonales et normalisées. On peut aussi les choisir soit homologues à zéro, soit *cohomologues* à zéro (on appelle ainsi les formes qui sont l'adjointe à une forme homologue à zéro, ou, ce qui revient au même, qui dérivent par l'opération δ d'une forme de degré supérieur d'une unité [8]). En effet, soit μ une solution correspondant à la valeur propre $\lambda > 0$. D'après le théorème de décomposition (n° 3), elle est la somme $\mu = \mu_1 + \mu_2$ d'une forme homologue à zéro μ_1 et d'une forme cohomologue à zéro μ_2, le troisième terme de la décomposition étant nul parce que μ est orthogonale aux formes harmoniques. Il vient alors

$$\Delta\mu = d\delta\mu_1 + \delta d\mu_2 = \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2$$

d'où, en vertu de l'unicité de la décomposition,

$$d\delta\mu_1 = \lambda\mu_1 \qquad \text{et} \qquad \delta d\mu_2 = \lambda\mu_2,$$

d'où encore $\Delta\mu_1 = \lambda\mu_1$ et $\Delta\mu_2 = \lambda\mu_2$, de sorte que μ_1 et μ_2 sont aussi des solutions correspondant à la valeur propre λ. Elles sont d'ailleurs orthogonales. Si la valeur propre λ est simple, l'une des deux est nulle. Dans le cas général, l'ensemble des solutions se décompose en la somme directe de deux espaces linéaires orthogonaux, constitués respectivement par les solutions homologues à zéro et par celles qui sont cohomologues à zéro.

Soit σ une solution normalisée, homologue à zéro, de degré p, correspondant à la valeur propre λ, $\Delta\sigma = d\delta\sigma = \lambda\sigma$. Comme

$$\Delta\delta\sigma = \delta d\delta\sigma = \lambda\delta\sigma,$$

$\delta\sigma$ est une solution cohomologue à zéro, de degré $p - 1$, correspondant à la même valeur propre. Comme

$$(\delta\sigma, \delta\sigma) = (\sigma, d\delta\sigma) = \lambda(\sigma, \sigma) = \lambda,$$

on voit que $\tau = \lambda^{-\frac{1}{2}}\delta\sigma$ est une solution normalisée. Ainsi, à toute solution σ normalisée homologue à zéro de degré p est associée une solution τ normalisée cohomologue à zéro de degré $p - 1$, correspondant à la même valeur propre λ, $\tau = \lambda^{-\frac{1}{2}}\delta\sigma$. Et réciproquement, toute solution τ normalisée cohomologue à zéro de degré $p - 1$ est associée à une solution normalisée homologue à zéro de degré p correspondant à la même valeur propre, $\sigma = \lambda^{-\frac{1}{2}} d\tau$.

De là résulte l'existence d'un système orthonormal complet de formes solutions de l'équation $\Delta\mu = \lambda\mu$ ou $\mu = \lambda G\mu$, ayant la structure suivante :

$\sigma_{p,1}, \ldots, \sigma_{p,m}, \ldots$ formes homologues à zéro de degré $p (p = 1, \ldots, n)$,
$\tau_{p,1}, \ldots, \tau_{p,m}, \ldots$ formes cohomologues à zéro de degré $p (p = 0, \ldots, n-1)$,
$\varphi_{p,1}, \ldots, \varphi_{p,R_p}$ formes harmoniques de degré $p (p = 0, \ldots, n)$.

Ces formes satisfont aux relations

$$\begin{array}{ll} \delta\sigma_{p,m} = \sqrt{\lambda_{p,m}}\,\tau_{p-1,m} & d\tau_{p-1,m} = \sqrt{\lambda_{p,m}}\,\sigma_{p,m} \\ \Delta\sigma_{p,m} = \lambda_{p,m}\sigma_{p,m} & \Delta\tau_{p-1,m} = \lambda_{p,m}\tau_{p-1,m} \\ \sigma_{p,m} = \lambda_{p,m} G\sigma_{p,m} & \tau_{p-1,m} = \lambda_{p,m} G\tau_{p-1,m} \end{array}$$

$$(p = 1, 2, \ldots, n \quad \text{et} \quad m = 1, 2, \ldots).$$

Les valeurs propres relatives aux formes de degré p sont les nombres positifs $\lambda_{p,m}$ et $\lambda_{p+1,m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ et 0 si $R_p > 0$. On a $\lim\limits_{m=\infty} \lambda_{p,m} = \infty$ et l'on peut supposer que $\lambda_{p,m} \leqslant \lambda_{p,m+1}$.

A toute forme α de degré p, de carré sommable, c'est-à-dire telle que l'intégrale (α, α) de $\alpha\alpha^*$ existe au sens de Lebesgue, correspond une série de Fourier

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha, \sigma_{p,i})\sigma_{p,i} + \sum_{i=1}^{\infty}(\alpha, \tau_{p,i})\tau_{p,i} + \sum_{i=1}^{R_p}(\alpha, \varphi_{p,i})\varphi_{p,i}. \quad (7.1)$$

La forme de Green $g(x, y)$ n'est pas de carré sommable lorsque $n \geqslant 4$. En effet, $g(x, y)$ étant infinie d'ordre $n-2$ pour $x = y$, $g(x, y)g(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ est infinie d'ordre $2n-4$. Considérons alors les noyaux itérés

$$g^{(k+1)}(x, y) = \int g^{(k)}(x, z)g(\overset{*}{z}, y), \qquad g^{(1)}(x, y) = g(x, y).$$

L'itéré de rang k est infini d'ordre $n-2k$, donc de carré sommable si $2n-4k < n$ ou $k > \left[\frac{n}{4}\right]$. Le plus petit entier satisfaisant à cette condition est $j = \left[\frac{n}{4}\right] + 1$.

L'équation $\lambda^j G^j\mu = \mu$ admet, comme on sait, les mêmes solutions que l'équation $\lambda G\mu = \mu$. Son noyau étant de carré sommable, le théorème de Hilbert-Schmidt est applicable : la série de Fourier de toute forme $\alpha = G^j\beta$, où β est une forme quelconque de classe C^0 (c'est-à-dire à coefficients continus) converge uniformément vers cette forme α. Or, α étant une forme de classe C^{2j} (c'est-à-dire dont les coefficients ont des dérivées continues jusqu'à l'ordre $2j$), $\alpha - H\alpha$ est représentable par une telle expression, puisque, d'après (4. 5), $\alpha - H\alpha = G^j(\Delta^j\alpha)$. Donc :

Théorème. *La série de Fourier* (7. 1) *de toute forme de classe* C^{2j} *converge uniformément vers cette forme.*

Les trois sommes figurant dans l'expression (7. 1) représentent respectivement les trois termes de la décomposition définie au n° 3.

Si l'on suppose seulement que α est de carré sommable, on pourra seulement affirmer que la série de Fourier converge en moyenne vers α.

Considérons les solutions de degré 0, $\varphi_{0,i}$ et $\tau_{0,i}$ ($i = 1, 2, \ldots$). Elles constituent sur l'espace V un système de fonctions orthonormal et complet. En associant à chaque point x de V le point de coordonnées $\tau_{0,i}(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, N$) de l'espace euclidien à N dimensions E, on définit une application de V dans E. Si N est assez grand, cette application est biunivoque, comme on peut le prouver aisément en utilisant le fait que le système est complet. Cela permet de retrouver un théorème démontré par M. Whitney [6], sous des hypothèses de différentiabilité d'ailleurs plus larges que celles qui sont nécessaires ici. Mais supposons que l'espace de Riemann V est analytique. En vertu de théorèmes connus de la théorie des équations aux dérivées partielles du type elliptique, les solutions de notre équation sont analytiques, et l'application de V dans E est analytique. On a ainsi la proposition suivante, qui me paraît compléter sur un point le théorème de M. Whitney : *une variété close et analytique, sur laquelle il est possible de définir un* ds^2 *analytique, peut être représentée analytiquement et topologiquement sur une variété analytique plongée dans un espace euclidien.*

La considération des solutions de degré p conduirait à des représentations analogues de l'espace fibré constitué par les p-vecteurs de V.

Il est clair que toute transformation isométrique de V en lui-même change une solution de l'équation $\Delta\mu = \lambda\mu$ en une autre solution correspondant à la même valeur propre. Par suite, les solutions correspondant à une valeur donnée de λ subissent une substitution linéaire. Pour $p=0$, on retrouve ainsi, sur les espaces admettant un groupe transitif de transformations isométriques, les suites de fonctions fondamentales de M. Elie Cartan [1].

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

1. E. CARTAN, Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos (*Rend. circ. mat. di Palermo*, t. 53, 1929, p. 217-252).
2. D. HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*. B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1912.
3. W. V. D. HODGE, The theory and applications of harmonic integrals. *Cambridge university press*, 1941.
4. E. E. LEVI, I problemi dei valori al contorno per le equazioni totalmente ellitiche alle derivate parziali (*Memorie di Matematica e di Fisica della Societa italiana delle Scienze*, Serie 3ª, Tomo XVI, 1909).
5. Hermann WEYL, On Hodge's theory of harmonic integrals (*Annals of Mathematics*, Vol. 44, No. 1, January 1943, p. 1-6).
6. Hassler WITHNEY, Differentiable manifolds (*Annals of Mathematics*, Vol. 37, 1936, p. 645-680).
7. G. DE RHAM, Sur l'Analysis situs des variétés à n dimensions (Thèse, *Journal de Math. p. et appl.*, 1931, p. 115-200).
8. P. BIDAL et G. DE RHAM, Les formes différentielles harmoniques (*Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 19, 1946, p. 1-49).

D'autres références se trouvent dans ce dernier Mémoire.