ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

JEAN KUNTZMANN

Représentations sur un système multiforme

Annales de l'université de Grenoble, tome 21 (1945), p. 95-99

<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1945__21__95_0>

REPRÉSENTATIONS SUR UN SYSTÈME MULTIFORME

par M. Jean KUNTZMANN.

Une opération multiforme dans un ensemble E est une loi qui fait correspondre à tout couple ordonné (a, b) d'éléments de E un ou plusieurs éléments de E. Nous désignerons par $\{ab\}$ l'ensemble formé par ces éléments et par $a \cdot b$ l'un quelconque d'entre eux.

Il est possible d'attacher à tout système multiforme S un système uniforme U, en étendant l'opération à l'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de E. Nous désignerons par $\{a\}$ l'ensemble formé du seul élément a. Soient A, B des parties de E. On pose

$$AB = \text{Ensemble réunion de tous les } \{ab\},\ a \in A,\ b \in B.$$

Considérons le sous-système de U engendré par les $\{a\}$. Nous désignerons ce sous-système par U_s. Il y a une correspondance biunivoque entre les éléments de U_s et les complexes distincts, valeurs des diverses expressions possibles dans S.

Lorsque S est uniforme, U_s est isomorphe à S.

Représentation stricte d'un système uniforme sur un système S.

Nous appellerons représentation stricte d'un système uniforme K sur un système S une représentation de K sur U_s suivie du passage de chaque élément de U_s au complexe d'éléments de S dont il est formé (l'application de K sur U_s transforme l'opération définie dans K en l'opération induite dans U_s par l'opération de S).

Cette notion se réduit à la notion ordinaire de représentation lorsque S est uniforme, puisque dans ce cas U_s est isomorphe à S.

Représentation d'un système multiforme sur un système S.

Plus généralement, considérons un sous-système U'_s de U, tel que tout élément de S figure dans au moins un des ensembles qui constituent le sous-système U'_s.

Il semble qu'il convienne d'appeler représentation d'un système multiforme K sur un système S la correspondance suivante : on construit U'_K sur K au moyen de certains complexes comme il vient d'être expliqué plus haut et on établit une représentation de U'_K sur S.

Les modes de génération des systèmes multiformes usuels sont des représentations en ce sens général.

Soit par exemple l'hypergroupe des catégories ; on l'obtient par les opérations suivantes :

Passage du groupe G au système U extension de G à l'ensemble des parties.

Restriction U_g de U au sous-système engendré par les catégories $\{gag\}$ (g sous-groupe de G) ; isomorphie entre U_g et V_Γ, Γ désignant l'hypergroupe des catégories, V l'extension de Γ à l'ensemble des parties et V_Γ le sous-système de V engendré par les parties formées d'un seul élément.

Il n'y a pas représentation de G considéré comme système uniforme sur Γ. On ne peut donc pas remplacer U'_K par U_K sans restreindre la généralité.

*
* *

Revenons maintenant à la représentation stricte d'un système uniforme K sur S. Nous allons indiquer un procédé pour passer directement de K à S sans faire intervenir la décomposition d'un ensemble en ses éléments. Choisissons dans K un élément et un seul correspondant à chaque complexe de U_s réduit à un seul élément. Soit $A \rightleftarrows \{a\}$ cette correspondance, $A \in K$. $a \in S$.

Les A engendrent un sous-système K'' (qui peut d'ailleurs être confondu avec K'). Ce système possède la propriété suivante : deux expressions formées avec les A ne sont égales que si leurs images dans S sont deux complexes identiques. Ainsi $(AB)C = DE$ exige $\{(ab)c\} = \{de\}$. Il y a aussi représentation de K'' sur S.

Définissons des classes C_a attachées à chaque élément a de S. C_a

est l'ensemble de tous les éléments de K″ tels que leur correspondant dans U_s soit un ensemble contenant a.

Nous poserons : $A \mathbin{\underset{\cdot}{\top}} B = D$ si $AB \in C_D$,
c'est-à-dire si $\{ab\} \supset \{d\}$,
plus généralement : $(A \mathbin{\underset{\cdot}{\top}} B) \mathbin{\underset{\cdot}{\top}} D = E$ si $(AB)D \in C_E$,
c'est-à-dire si $\{(ab)d\} \supset \{e\}$

et ainsi de suite.

La correspondance $A \rightleftarrows a$ est donc une isomorphie entre l'ensemble des A muni de cette opération et le système S.

Inversement, soit un système K″ satisfaisant aux conditions imposées, c'est-à-dire : un certain nombre d'éléments A qui engendrent K sont en correspondance biunivoque avec les éléments de S et deux expressions formées des A ne sont égales que si leurs correspondantes dans S représentent deux complexes identiques; on obtient une représentation du système K″ sur S en appliquant chaque expression formée des A sur sa correspondante dans S. On obtient, en effet, une correspondance univoque qui respecte manifestement l'opération.

On peut déduire de ceci diverses conséquences.

Le procédé qui nous a permis de passer de K à S peut s'appliquer en particulier au passage de U'_s à S (U''_s est identique à U'_s). Tout système multiforme peut donc être obtenu à partir d'un système uniforme convenable par le procédé des classes décrit plus haut. Ces classes ne sont d'ailleurs pas quelconques.

Le système uniforme à choisir est soumis à la seule condition que deux expressions formées avec les A n'y sont égales que si les expressions correspondantes de S le sont aussi. Le système des expressions toutes distinctes formées avec les éléments de E est alors un système apte à être représenté sur tout système défini entre les éléments de E ; de même le monoïde libre (expressions bâties sur E mais en observant la loi d'associativité) est apte à être représenté sur tout système associatif (et seulement sur ceux-là).

Permutations multiformes.

On désigne ainsi une correspondance qui à tout élément d'un ensemble E associe plusieurs éléments de E (ou éventuellement un seul).

On peut définir le produit de deux permutations multiformes : c'est la permutation obtenue en les effectuant successivement. Ce produit est associatif. — Soit S un système multiforme. Nous le supposerons muni d'une unité scalaire à droite e : $ae = a$ pour tout a.

On peut associer à tout élément a de S la permutation P_a $x \rightarrow ax$. Deux permutations P_a et P_b sont distinctes si $a \neq b$ car par P_a

$$e \rightarrow ae = a$$

et par P_b $$e \rightarrow b.$$

Par P_aP_b $$e \rightarrow ab.$$

Par conséquent $$P_aP_b = P_cP_d, \qquad \text{ou} \qquad P_aP_b = P_c$$

ne sont possibles que si l'on a respectivement :

$$ab = cd \qquad \text{ou} \qquad ab = c.$$

Si le système est associatif

$$P_aP_b = P_{ab} \qquad \text{car} \qquad a(bx) = (ab)x.$$

Les P_a engendrent un sous-système Π du système des permutations. Lorsque S est associatif, le système S est une représentation de Π. Il suffit d'appliquer chaque permutation de Π sur le complexe en lequel elle transforme e.

*
* *

Affaiblissement de la notion de représentation.

Considérons maintenant un système S non associatif. La donnée de ce système équivaut à la donnée des permutations P_a. Les P_a forment donc un système associatif attaché au système S quelconque.

Nous allons montrer qu'en modifiant légèrement notre définition de la représentation, il est possible d'obtenir le système S à partir de Π sans faire intervenir la manière dont chaque P_a agit sur les éléments de S.

A chaque élément a de S associons d'une part la permutation correspondante P_a, d'autre part une classe C_a formée de tous les P_uP_v tels que $\{uv\} \supset a$.

Définissons : $P_a \,\underset{\cdot}{\mathrm{T}}\, P_b = P_d$ par la condition $P_aP_b \in C_d$, ce qui n'est pas autre chose que $\{ab\} \supset d$. Car $P_aP_b = P_{a'}P_{b'}$ ou $P_aP_b = P_{a''}$ n'est possible que si $\{ab\} = \{a'b'\}$ ou $\{ab\} = \{a''\}$.

L'opération $\underset{\cdot}{\mathrm{T}}$ transforme donc le système des P_a en un système isomorphe à S.

On généraliserait facilement ceci à un système uniforme K quelconque.

La correspondance ainsi définie entre K et S diffère d'une représentation sur les points suivants :

On exige seulement que $AB = CD$, $AB = C$ entraînent

$$\{ab\} = \{cd\}, \quad \{ab\} = \{c\}$$

et non pas la même propriété pour toute expression formée des A.

En conséquence la classe de a sera seulement formée des A_1A_2 tels que $\{a_1a_2\} \supset \{a\}$ et non des expressions quelconques formées avec les A.

On ne peut plus trouver directement la valeur à attribuer à une expression quelconque de S.

On y gagne par contre de pouvoir choisir K beaucoup plus librement. En particulier K peut être associatif sans que S le soit.