Félix Esclangon

Emploi de la similitude pour le calcul de l'effet pelliculaire dans les conducteurs ferromagnétiques

Annales de l'université de Grenoble, tome 21 (1945), p. 127-135
<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1945__21__127_0>

EMPLOI DE LA SIMILITUDE POUR LE CALCUL DE L'EFFET PELLICULAIRE DANS LES CONDUCTEURS FERROMAGNÉTIQUES

par M. Félix ESCLANGON.

Sommaire. — L'effet pelliculaire, dans les conducteurs magnétiques de forme cylindrique, obéit à une loi de similitude pour des courants de fréquences différentes ; si le champ magnétique reste le même à la surface du corps, et si le rayon du cylindre est inversement proportionnel à la racine carrée de la fréquence, le champ électrique est proportionnel à la racine carrée de la fréquence : l'effet Joule par unité de longueur reste constant.

INTRODUCTION

Le calcul de la distribution des champs électriques et magnétiques alternatifs à l'intérieur des conducteurs ferromagnétiques est inextricable dès que l'aimantation approche de la saturation. La perméabilité du métal ne peut plus être considérée comme constante, et le calcul, même approximatif, devient impossible.

Ayant eu à traiter un problème de chauffage par induction de barres d'acier en dessous du point de Curie, nous avons pu le résoudre par l'emploi de la similitude, en faisant des essais expérimentaux sur des courants à 50 périodes, et en les transposant aux fréquences plus élevées qui étaient envisagées.

Nous étudierons le problème pour un conducteur cylindrique de révolution, et nous distinguerons deux cas :

Four à induction : le champ magnétique est parallèle aux génératrices du cylindre.

Résistance : le champ électrique est parallèle aux génératrices.

FOUR A INDUCTION

Rappel des résultats pour les conducteurs à perméabilité constante.

Nous commençons par étudier un cylindre de révolution : un champ magnétique alternatif H de pulsation ω est parallèle à l'axe du cylindre. Le champ électrique E est perpendiculaire à l'axe du cylindre et tangentiel.

Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial r} = 4\pi\gamma E$$

en désignant par B l'induction magnétique ($B = \mu H$, μ perméabilité) et par γ la conductibilité électrique du métal.

La puissance dépensée par effet Joule s'exprime par

$$W = \int \gamma E^2 dv$$

l'intégrale étant étendue au volume du conducteur considéré ; nous considérerons dans ces lignes la puissance dépensée par unité de longueur du conducteur.

Si l'on suppose donné le courant dans le circuit producteur du champ magnétique, le champ magnétique à l'extérieur du conducteur est imposé. Nous appellerons H_0 son amplitude.

Les résultats s'expriment à l'aide des fonctions de Bessel de variable complexe et font intervenir la pénétration a du courant alternatif dans le conducteur :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma\mu\omega}}.$$

Ces résultats s'écrivent, en notation complexe, si nous désignons par R le rayon du cylindre.

$$H = H_0 \frac{J_0(\sqrt{-j}\, r\sqrt{2}/a)}{J_0(\sqrt{-j}\, R\sqrt{2}/a)} e^{j\omega t},$$

$$E = H_0 \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\gamma}} (1 - j) \frac{J_1(\sqrt{-j}\, r\sqrt{2}/a)}{J_0(\sqrt{-j}\, R\sqrt{2}/a)} e^{j\omega t},$$

$$W = \frac{H_0^2 R}{8} \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\pi\gamma}}\, \Phi(R/a),$$

Φ étant une fonction croissante qui tend vers l'unité quand $\frac{R}{a}$ croît indéfiniment.

Si ω est variable, μ, γ, constants, $\frac{R}{a}$ et $\frac{r}{a}$ varient comme $R\sqrt{\omega}$ et $r\sqrt{\omega}$; pour des barres cylindriques telles que $R\sqrt{\omega}$ ait la même valeur, si H_0 reste constant, nous avons une similitude s'exprimant comme suit : en des points homologues $\left(\text{tels que } \frac{r}{R} = \text{Cte}\right)$, le champ magnétique a la même amplitude, le champ électrique est proportionnel à $\sqrt{\omega}$; la puissance dépensée par unité de longueur dans deux barres semblables est la même.

Cas des conducteurs ferromagnétiques. — Nous allons montrer que cette similitude reste conservée dans les conducteurs ferromagnétiques. Si nous plaçons deux barres cylindriques de rayons R_1 et R_2 dans des champs magnétiques de même amplitude, de fréquence f_1 et f_2, telle que

$$R_1\sqrt{f_1} = R_2\sqrt{f_2}$$

la distribution des champs est semblable et la puissance dépensée par effet Joule par unité de longueur est la même.

Il est à remarquer que l'application de la similitude à des corps ferromagnétiques exige l'égalité du champ magnétique en des points homologues, afin de conserver les relations entre le champ et l'induction, la perméabilité dépendant de la valeur du champ.

Reprenons les équations qui régissent le phénomène :

$$\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial r} = 4\pi\gamma E.$$

Si B garde la même valeur, mais si la fréquence change $\frac{\partial B}{\partial t}$ est proportionnel à la fréquence. Le premier membre de la première équation est homogène à $\frac{E}{r}$. $\frac{E}{r}$ est donc proportionnel à la fréquence.

La deuxième équation montre que Er est homogène à H ; si H garde la même valeur en deux points homologues, Er est indépendant de la fréquence. Les deux résultats se traduisent par :

$$\frac{E}{\sqrt{f}} = \text{Cte}, \qquad r\sqrt{f} = \text{Cte}$$

qui donnent les conditions de la similitude à champ magnétique constant.

Si nous passons à la puissance dépensée par unité de longueur, elle est l'intégrale de $\gamma E^2 dv$ étendue à la section de la barre avec une hauteur unité.

Le champ électrique est proportionnel à la racine carrée de la fréquence. Son carré est proportionnel à la fréquence ; la section de la barre a une surface proportionnelle au carré du rayon qui est inversement proportionnel à la racine carrée de la fréquence ; la surface est inversement proportionnelle à la fréquence, l'intégrale est constante, la répartition du champ électrique étant semblable dans les deux cas.

Une démonstration plus rigoureuse peut être donnée par l'emploi de variables réduites. Remarquons d'abord que H, B et E ne sont plus en général des fonctions sinusoïdales du temps ; les variations de la perméabilité provoquent des distorsions. L'égalité d'amplitude pour H doit être remplacée par une similitude dans le temps des deux fonctions. Soit T la période de ces fonctions $\left(T = \frac{1}{f}, f \text{ fréquence}\right)$, nous prendrons pour variable le temps réduit :

$$\tau = \frac{t}{T} = tf$$

à laquelle nous ajouterons le rayon réduit

$$\rho = r\sqrt{f}$$

afin de représenter par la même valeur de ρ deux points homologues dans deux barres semblables. Les fonctions

$$H(r, t), \quad B(r, t), \quad E(r, t), \quad \ldots\ldots$$

deviennent des fonctions $H_f(\rho, \tau)$, $B_f(\rho, \tau)$, $E_f(\rho, \tau)$. L'égalité d'amplitude de H et de B pour des fonctions sinusoïdale de fréquences f_1 et f_2 doit être remplacée par l'identité des formes réduites

$$H_{f_1}(\rho, \tau) \equiv H_{f_2}(\rho, \tau) \equiv H_0(\rho, \tau)$$
$$B_{f_1}(\rho, \tau) \equiv B_{f_2}(\rho, \tau) \equiv B_0(\rho, \tau).$$

Les données par rapport au temps et au rayon vont s'exprimer en fonction des variables réduites :

$$\frac{\partial H(r, t)}{\partial r} = \frac{\partial H_0(\rho, \tau)}{\partial \rho} \cdot \frac{d\rho}{dr} = \sqrt{f}\frac{\partial H_0}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial H(r, t)}{\partial t} = \frac{\partial H_0(\rho, \tau)}{\partial \tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = f\frac{\partial H_0}{\partial \tau}$$

avec des expressions analogues pour B et E ; les équations de Maxwell vont s'écrire :

$$\sqrt{f}\frac{\partial E_f}{\partial \rho} + \frac{E_f}{\rho/\sqrt{f}} = -f\frac{\partial B_0}{\partial \tau}$$

$$-\sqrt{f}\frac{\partial H_0}{\partial \rho} = 4\pi\gamma E_f$$

ou en divisant la première équation par f, la deuxième par $\sqrt{f}$

$$\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial E_f}{\partial \rho} + \frac{1}{\sqrt{f}}\frac{E_f}{\rho} = -\frac{\partial B_0}{\partial \tau}$$

$$-\frac{\partial H_0}{\partial \rho} = 4\pi\gamma\frac{E_f}{\sqrt{f}}.$$

Posons
$$E_0(\rho, \tau) = \frac{E_f}{\sqrt{f}}(\rho, \tau)$$

les équations deviennent :

$$\frac{\partial E_0}{\partial \rho} + \frac{E_0}{\rho} = -\frac{\partial B_0}{\partial \tau}$$

$$-\frac{\partial H_0}{\partial \rho} = 4\pi\gamma E_0,$$

équations dont les conditions aux limites sont données par la valeur du champ magnétique à la surface du conducteur, valeur qui, en variable réduite, est supposée rester identique à elle-même. Les solutions de ces équations sont des fonctions de ρ et de τ indépendantes de la fréquence.

Le champ et l'induction magnétiques pour la fréquence f s'exprimant directement en fonction des variables réduites, leur valeur en deux points homologues dans l'espace est semblable dans le temps.

Pour le champ électrique,

$$E_f = \sqrt{f}E_0.$$

Sa grandeur est égale à la fonction réduite multipliée par la racine carrée de la fréquence ; nous retrouvons le résultat que nous avons obtenu précédemment.

Si nous passons à la puissance dépensée par unité de longueur, elle s'écrit :

$$W = \int_0^R \gamma E^2(r, t)dr,$$

dont nous devons prendre la valeur moyenne en fonction du temps ; les fonctions de la variable réduite τ étant proportionnelles, leur moyenne est dans le rapport des fonctions.

Appelons ρ_0 la valeur du rayon réduit pour $r = R$

$$\rho_0 = R\sqrt{f}$$

ρ_0 a la même valeur pour des barres semblables.

En passant aux variables réduites, W s'écrit

$$W = \int_0^{\rho_0} \gamma E_f^2 \, 2\pi \frac{\rho}{\sqrt{f}} \frac{d\rho}{\sqrt{f}}$$

mais $$E_f = \frac{E_0}{\sqrt{f}},$$

d'où $$W = \int_0^{\rho_0} \gamma E_0^2 \, 2\pi\rho d\rho,$$

valeur indépendante de la fréquence.

Nous étendons bien le résultat obtenu pour les corps à perméabilité constante ;

il y a similitude des effets pelliculaires pour deux barres de même matériau ferromagnétique si :

le champ magnétique à la surface a la même valeur en fonction du temps réduit,

le champ électrique est proportionnel à la racine carrée de la fréquence,

la puissance dépensée par effet Joule par unité de longueur de la barre a la même valeur.

Énergie dépensée par hystérésis : on peut encore remarquer que l'énergie dépensée dans deux barres semblables par hystérésis reste la même. En effet, l'énergie dépensée par cycle par unité de volume est une fonction de B maximum qui garde la même valeur pour deux points homologues; par unité de temps, cette énergie est donc proportionnelle à la fréquence pour le même volume; mais deux volumes semblables sont dans le rapport du carré des rayons, soit en rapport inverse de la fréquence. L'énergie dépensée pour deux barres semblables par unité de longueur est donc la même.

Conducteur cylindrique de section de forme quelconque : le résultat peut se généraliser pour des barres cylindriques de sections non circulaires, les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial r} + \frac{E_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \theta} = -\frac{\partial B}{\partial t},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\theta\partial} = 4\pi\gamma E_r,$$

$$-\frac{\partial H}{\partial r} = 4\pi\gamma E_\theta,$$

si l'on définit la position d'un point de la section droit en coordonnées polaires r et θ, en désignant par E_r et E_θ les composantes au champ électrique selon le rayon vecteur et sa perpendiculaire (dans le cas du cylindre de révolution $E_r = 0$).

Le raisonnement peut se faire comme précédemment, et les conclusions restent valables.

RÉSISTANCE D'UN CONDUCTEUR FERROMAGNÉTIQUE EN COURANT ALTERNATIF

Nous appellerons résistance en courant alternatif du conducteur le rapport

$$R_a = \frac{W}{I_e^2},$$

de la puissance dépensée par effet Joule à la valeur moyenne du carré de l'intensité :

Dans un milieu de perméabilité constante, le problème est bien résolu ; la résistance du rapport R/a du rayon de la barre R à la pénétration a.

Dans un milieu ferromagnétique avec des courants relativement intenses, la pénétration n'est plus définie, la perméabilité μ étant très loin d'être constante.

Les équations de Maxwell s'écrivent dans ce cas pour une barre de révolution

$$\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H}{r} = 4\pi\gamma E,$$

$$-\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{\partial B}{\partial t},$$

le vecteur E étant maintenant longitudinal, le vecteur H tangentiel.

Pour pouvoir appliquer des conditions de similitude, il faut, comme dans le cas précédent, garder la constance de H pour points homologues, afin de ne pas modifier la relation entre H et B $\frac{\partial B}{\partial t}$ va donc être proportionnel à la fréquence.

La deuxième équation montre encore que $\frac{E}{r}$, homogène à $\frac{\partial B}{\partial t}$, est proportionnel à la fréquence ; la première montre que Er homogène à H est constant. Nous retrouvons les mêmes conditions de similitudes que précédemment :

$$r\sqrt{f} = \text{cte}, \qquad \frac{E}{\sqrt{f}} = \text{cte}.$$

L'intensité I passant dans le conducteur est liée au champ H à la surface par

$$I = \frac{2R}{H}.$$

L'intensité est inversement proportionnelle à la racine carrée de la fréquence

$$I\sqrt{f} = \text{cte}.$$

La puissance dépensée par effet Joule, par unité de longueur est la même dans deux barres homologues ; la puissance s'écrit :

$$W = \int \gamma E^2 dv,$$

et le raisonnement que nous avons fait dans le cas précédent subsiste : E^2 est proportionnel à f, v inversement proportionnel, le produit est constant.

I^2 étant inversement proportionnel à f, W étant constant, la résistance en courant alternatif est proportionnelle à la fréquence.

La similitude exige donc les conditions suivantes :

Rayon de la barre inversement proportionnel à la racine carrée de la fréquence : $R\sqrt{f} = \text{cte}$.

Intensité inversement proportionnelle à la racine carrée de la fréquence : $I\sqrt{f} = \text{cte}$.

(Notons que l'intensité est proportionnelle au rayon.)

La résistance est proportionnelle à la fréquence : $\frac{R_a}{f} = \text{cte}$.

La puissance dépensée par effet Joule est constante : $W = \text{cte}$.

Le résultat pourrait être démontré de façon rigoureuse comme dans le cas précédent, par l'emploi de variables réduites.

Applications.

Ce résultat permet par exemple de prévoir la puissance de courants de Foucault à 5000 périodes dans des barres de 1 centimètre de diamètre, en opérant à 50 périodes sur des barres de 10 centimètres de diamètre.

Dans la réalisation expérimentale, il faut veiller naturellement à l'influence des bouts ; les barres ne sont pas indéfiniment longues.

Cette méthode a été employée à l'Institut Polytechnique de Grenoble en 1940, pour déterminer les conditions de chauffage de fil d'acier de 5 à 7 millimètres de diamètre par courants de Foucault de 3000 à 5000 périodes. Les résultats ont été satisfaisants.

L'application généralisée a été employée par un de nos chercheurs, M. Grossmann, pour l'étude détaillée des courants de Foucault. Cette étude doit faire l'objet d'une thèse d'ingénieur-docteur qui a été interrompue par la participation active de son auteur à la Résistance française, et son retour dans son pays d'origine. Nous espérons cependant qu'elle sera soutenue un jour.

Pour la résistance, le résultat est moins intéressant, car la résistance d'un conducteur varie beaucoup moins que la puissance dépensée par les courants de Foucault. Les corps ferromagnétiques sont rarement employés comme conducteurs et les essais expérimentaux sont plus commodes.

Il est à signaler que la résistance en courant alternatif d'un conducteur ferro-magnétique, de diamètre assez grand, diminue quand il cesse d'être magnétique. On peut en déduire un dispositif de régulateur de la température par une alimentation à intensité constante. L'effet est toutefois moins grand que pour le chauffage à induction où la puissance peut devenir infiniment petite, tandis que la résistance ne descend pas au-dessous de la valeur en courant continu.

IMPRIMÉ PAR L'IMPRIMERIE DURAND, A CHARTRES (EURE-ET-LOIR) FRANCE (8-1946).
O.P.I.A.C.L. 31.0322. N° 2340. — Dépôt légal : 3e trimestre 1946.