ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

H. PAILLOUX

Sur un problème de répartition

Annales de l'université de Grenoble, tome 21 (1945), p. 123-125
<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1945__21__123_0>

SUR UN PROBLÈME DE RÉPARTITION

par **M. H. PAILLOUX.**

Dans l'industrie on a fréquemment à vérifier la constance d'un objet fabriqué par une machine donnée. La vérification porte sur le poids, les dimensions ou tel autre élément important de la pièce. Ces mesures supposées effectuées en grand nombre (pour certains objets tous passent à la vérification) fournissent une échelle de répartition dont le producteur étudie en général la valeur moyenne et l'écart à partir de cette valeur moyenne. Ce sont des éléments simples à obtenir mais qui ne renseignent pas toujours sur des imperfections de fabrication, et il faut revenir à la courbe de répartition proprement dite et comparer plusieurs de ces courbes dans le temps, ou de machine à machine.

Mais là se pose un autre problème, car les mesures effectuées le sont avec un manque de précision inhérent aux appareils de mesure, d'une part, et à la rapidité obligatoire de la mesure, qui empêche souvent d'utiliser la précision de l'appareil de mesure. Sans vouloir distinguer ces deux causes, on peut se demander quelle serait la véritable courbe de répartition si la précision était infinie ; ou en d'autres termes est-il possible d'avoir la courbe exacte de répartition à partir de la courbe expérimentale ?

Il faut naturellement faire une hypothèse sur la loi des erreurs ; nous supposerons que c'est la loi de Gauss, et de plus que le nombre d'expériences est très grand de façon que la courbe de répartition soit continue ainsi que le nombre de dérivées nécessaires. On sait qu'industriellement ces courbes varient peu au cours d'une même fabrication et que de gros écarts proviennent soit d'un défaut de la machine, soit d'un manque d'homogénéité du matériau à usiner.

Expérimentalement, nos mesures portant sur un ensemble de N éléments (N très grand) fournissent $N\varphi(y)dy$ éléments dont la mesure est comprise entre y et $y+dy$. Soient x la vraie mesure de l'élément dont la mesure expérimentale est y, et $f(x)$ la fonction de répartition correspondante, analogue à $\varphi(y)$.

Sur les N mesures, $dN = Nf(x)dx$ sont effectivement comprises entre x et $x+dx$ et parmi celles-ci,

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} dN e^{-h^2(x-y)^2} dy$$

ont leur mesure expérimentale entre y et $y+dy$. h supposé constant caractérise le degré de précision de ces mesures expérimentales. Laissant y et dy constants, et faisant varier x de toutes les manières possibles (nous dirons de $-\infty$ à $+\infty$ pour simplifier le langage), on aura le nombre d'objets dont la mesure a été trouvée entre y et $y+dy$ par la formule

$$\frac{Nhdy}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(x-y)^2} f(x)\,dx = N\varphi(y)\,dy.$$

La deuxième valeur résulte de la définition de φ. Il en résulte que f sera donné par la résolution de l'équation intégrale (où h a été pris égal à 1)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} f(x)\,dx = \varphi(y)$$

qui est d'un type classique. Sans vouloir l'étudier rigoureusement, indiquons un moyen d'avoir une valeur approchée de $f(x)$ sans légitimation. Nous utiliserons le calcul symbolique en introduisant l'opérateur fondamental $p = \frac{d}{dy}$, après avoir effectué dans l'équation intégrale le changement de variable $x = y + \xi$, ξ variable d'intégration, y une constante.

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} f(y+\xi)\,d\xi = \varphi(y).$$

On sait que la formule de Taylor s'écrit

$$f(y+\xi) = e^{\xi p} f(y),$$

et on a successivement :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} e^{\xi p} f(y)\,dy = \varphi(y)$$

$$\frac{e^{\frac{p^2}{4}} f(y)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi - p/2)^2} d\xi = \varphi(y).$$

Or l'intégrale définie vaut $\sqrt{\pi}$, de sorte que

$$e^{p^2/4} f(y) = \varphi(y),$$

qui se résout alors par

$$f(y) = e^{-p^2/4}\varphi(y)\ ;$$

et comme

$$e^{p^2/4} = 1 - \frac{p^2}{4} + \frac{p^4}{4^2 . 2\,!} - \cdots$$

on pourra écrire, dans le cas où la série converge,

$$f(x) = \varphi(x) - \frac{\varphi''}{4} + \frac{\varphi^{\text{IV}}}{4^2 . 2\,!} + \cdots + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{\varphi^{(2n)}}{n\,!} + \cdots$$

dont on utilisera en pratique les premiers termes.

Le raisonnement a été fait sur la fonction de répartition, il reste valable pour les fonctions représentant, au facteur N près, le nombre des mesures inférieures à x ou y, qui donnent des courbes plus faciles à tracer.

Les considérations précédentes sont intéressantes dans la pratique où très fréquemment les courbes de répartition s'éloignent de la loi symétrique de Gauss.