H. Pailloux

Transformation des équations de l'équilibre élastique et des vibrations

Annales de l'université de Grenoble, tome 21 (1945), p. 117-121
<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1945__21__117_0>

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE ÉLASTIQUE ET DES VIBRATIONS

par M. H. PAILLOUX.

Dans l'étude de la déformation élastique d'un solide, il est intéressant de se rendre compte à quel genre d'équation aux dérivées partielles satisfait isolément chaque composante u, v, w du déplacement ou de la déformation. La méthode classique consiste à former l'équation relative à la dilatation $\theta = u'_x + v'_y + w'_z$.

Mais cela peut être gênant pour certains problèmes où interviennent les déplacements à la surface.

Nous nous proposons, dans cette étude, de former chacune des équations partielles à laquelle satisfait u, v ou w, puis d'exprimer toutes ces fonctions symétriquement au moyen d'une seule et de déterminer ainsi l'arbitraire dont dépend la solution générale du problème de la déformation élastique d'un solide en fonction des déplacements ou tensions à la surface.

λ, μ sont les coefficients de Lamé, X, Y, Z sont les composantes de la force massique unitaire au point x, y, z. On sait que u, v, w sont solution du système :

$$(1) \qquad \begin{cases} (\lambda + \mu)\theta'_x + \mu\Delta u + X = 0 \\ (\lambda + \mu)\theta'_y + \mu\Delta v + Y = 0 \\ (\lambda + \mu)\theta'_z + \mu\Delta w + Z = 0. \end{cases}$$

La méthode classique consiste à dériver chacune de ces équations respectivement en x, y, z et d'ajouter, d'où l'équation relative à la dilatation

$$(2) \qquad (\lambda + 2\mu)\Delta\theta + (X'_x + Y'_y + Z'_z) = 0.$$

Prenons maintenant le laplacien de la première équation du système (1), nous trouverons alors la première équation du système suivant :

$$(3)\quad \begin{cases} \mu(\lambda+2\mu)\Delta\Delta u = (\lambda+\mu)\dfrac{\partial}{\partial x}(X'_x+Y'_y+Z'_z) - (\lambda+2\mu)\Delta X \\ \mu(\lambda+2\mu)\Delta\Delta v = (\lambda+\mu)\dfrac{\partial}{\partial y}(X'_x+Y'_y+Z'_z) - (\lambda+2\mu)\Delta Y \\ \mu(\lambda+2\mu)\Delta\Delta w = (\lambda+\mu)\dfrac{\partial}{\partial z}(X'_x+Y'_y+Z'_z) - (\lambda+2\mu)\Delta Z. \end{cases}$$

Les trois fonctions u, v, w sont donc des solutions particulières d'équations aux dérivées partielles du tvpe :

$$(4)\qquad \Delta\Delta\varphi = \omega(x, y, z)$$

avec un second membre différent pour chacune d'elles, mais que l'on sait calculer à partir de la force massique. Sans avoir à faire de calcul il est évident que chaque composante de la déformation

$$u'_x,\ v'_y,\ w'_z,\qquad w'_y+v'_z,\qquad u'_z+w'_x\qquad \text{ou}\qquad v'_x+u'_y$$

satisfait encore à une équation du type (4) avec un second membre convenable qui s'exprime uniquement en fonction de la force massique.

Dans le cas particulier où X, Y, Z sont nuls, constants ou linéaires en x, y, z, les composantes du déplacement ou de la déformation sont des solutions particulières de l'unique équation

$$(5)\qquad \Delta\Delta\varphi = 0.$$

La conclusion reste valable dans le cas intéressant et plus général où X, Y, Z sont trois fonctions harmoniques liées par la condition

$$(6)\qquad X'_x+Y'_y+Z'_z = 0.$$

On sait qu'il existe de telles fonctions : ce sont trois de quatre fonctions harmoniques conjuguées à trois variables.

u étant solution de (3), v n'est pas la fonction la plus générale satisfaisant à (3), ni w ; car u, v, w sont liées par le système (1). Il est possible de former néanmoins un tel système de trois équations différentielles, dont la première est la première équation (3), la deuxième est une équation différentielle en v où interviennent X, Y, Z, u, leurs dérivées et des quadratures portant sur ces fonctions. La troisième équation de ce système donne w avec des dérivées et quadratures sur u et v supposés préalablement déterminés par les précédentes équations.

Une manière de traiter le système plus symétriquement consiste à introduire une fonction auxiliaire φ telle que

$$(7) \qquad (\lambda+\mu)\theta = -\mu\Delta\varphi,$$

et trois fonctions ξ, η, ζ. déterminées une fois pour toutes telles que

$$(8) \qquad \mu\Delta\xi = -X, \qquad \mu\Delta\eta = -Y, \qquad \mu\Delta\zeta = -Z.$$

La première équation (1) devient alors

$$\mu\Delta(u-\varphi'_x-\xi) = 0.$$

H, K, L étant trois fonctions harmoniques convenables, mais arbitraires pour l'instant, le système (1) est équivalent à

$$(9) \qquad \begin{cases} u = \varphi'_x + \xi + H \\ v = \varphi'_y + \eta + K \\ w = \varphi'_z + \zeta + L \end{cases}$$

à condition que (7) soit vérifiée, c'est-à-dire que φ, H, K, L soient liées par

$$(10) \qquad (\lambda+2\mu)\Delta\varphi + (\lambda+\mu)(H'_x+K'_y+L'_z) + (\lambda+\mu)(\xi'_x+\eta'_y+\zeta'_z) = 0.$$

On peut interpréter les résultats de différentes manières. Par exemple, si nous prenons le laplacien de (10) et en introduisant à nouveau X, Y, Z :

$$(11) \qquad \mu(\lambda+2\mu)\Delta\Delta\varphi - (\lambda+\mu)(X'_x+Y'_y+Z'_z) = 0$$

équation du type (4). C'est d'ailleurs l'équation de la dilatation. φ étant choisi solution de (11), u, v, w sont données par (9) où les trois fonctions harmoniques H, K, L sont assujetties à l'unique condition (10) (en dehors naturellement des conditions de frontière). Les composantes du déplacement s'expriment aisément en fonction de φ, H, K, L, et nous voyons ainsi que les conditions frontières font intervenir H, K, L et leurs dérivées premières, φ et ses dérivées des deux premiers ordres.

On peut aussi choisir H, K, L arbitraires et φ donné par (10).

Une autre méthode classique dans bien des problèmes où intervient une équation aux dérivées partielles, consiste à prendre une solution de (10) bien déterminée, ainsi que H, K, L, et pour un corps de forme convenable, d'en déduire déplacements et déformations.

Dans le cas de la vibration des solides, les équations différentielles du déplacement sont les suivantes :

$$(12)\qquad \begin{cases} (\lambda+\mu)\theta'_x+\mu\Delta u+X=\rho u''_{t^2} \\ (\lambda+\mu)\theta'_y+\mu\Delta v+Y=\rho v''_{t^2} \\ (\lambda+\mu)\theta'_z+\mu\Delta w+Z=\rho w''_{t^2}. \end{cases}$$

ρ désignant la densité du corps étudié. Désignons par Ω_1 l'opérateur

$$(13)\qquad \Omega_1=\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

et par analogie avec ce qui précède, nous posons

$$(14)\qquad (\lambda+\mu)\theta=-\Omega_1\varphi.$$

φ étant une nouvelle inconnue ; prenons trois fonctions ξ, η, ζ, déterminées une fois pour toutes (indépendantes de t, si on le désire) et satisfaisant à

$$(15)\qquad \Omega_1\xi+X=\Omega_1\eta+Y=\Omega_1\zeta+Z=0.$$

La première équation (12) s'écrit alors

$$\Omega_1(u-\varphi_x-\xi)=0\ ;$$

et si $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ sont des solutions convenablement choisies de l'équation

$$(16)\qquad \Omega_1\psi=0,$$

le système (12) sera résolu par

$$(17)\qquad \begin{cases} u=\varphi'_x+\xi+\mathcal{H} \\ v=\varphi'_y+\eta+\mathcal{K} \\ w=\varphi'_z+\zeta+\mathcal{L} \end{cases}$$

sous la réserve que (14) est vérifiée ; c'est-à-dire que u, v, w sont donnés par (17), $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ étant des solutions quelconques de (16) reliées à φ par la condition

$$(18)\qquad \Omega_2\varphi+(\lambda+\mu)(\mathcal{H}'_x+\mathcal{K}'_y+\mathcal{L}'_z)+(\lambda+\mu)(\xi'_x+\eta'_y+\zeta'_z)=0$$

où Ω_2 est le nouvel opérateur :

$$(19)\qquad \Omega_2=(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

(18) définit φ si on choisit arbitrairement $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ solutions de (16). Mais φ n'est pas une fonction quelconque car on élimine ces dernières fonctions en multipliant par l'opérateur Ω_1, ce qui donne

$$(20) \qquad \Omega_1\Omega_2\varphi - (\lambda + \mu)(X'_x + Y'_y + Z'_z) = 0.$$

C'est l'équation de la dilatation analogue à (2) et qu'on peut former directement :

$$(20') \qquad \Omega_2\theta + (X'_x + Y'_y + Z'_z) = 0.$$

On pourrait, comme précédemment, en déduire que les composantes du déplacement ou de la déformation sont solution d'équations de la forme

$$(21) \qquad \Omega_1\Omega_2\psi(x, y, z, t) = \omega(x, y, z, t)$$

où le deuxième membre est connu, s'exprimant en fonction de la force massique (X, Y, Z), mais avec une forme différente pour chaque composante.

Le cas où la force extérieure est harmonique et à divergence nulle est un peu plus simple, car toutes ces expressions sont solution de l'unique équation

$$(22) \qquad \Omega_1\Omega_2\psi = 0$$

et comme les deux opérateurs Ω_1, Ω_2 sont distincts, la somme $\psi_1 + \psi_2$ des deux solutions générales des équations :

$$\Omega_1\psi_1 = 0, \qquad \Omega_2\psi_2 = 0,$$

est une solution de (22) ; raisonnement de peu d'intérêt si Ω_1 et Ω_2 sont identiques comme dans le cas (5).

On voit que le problème de l'équilibre et celui de la vibration d'un solide élastique sont en définitive dominés par les équations (5) et (22) respectivement.