Annales de l'université de Grenoble

Émile Cotton

Sur quelques liaisons imposées à un corps solide

Annales de l'université de Grenoble, tome 21 (1945), p. 101-107
<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1945__21__101_0>

SUR QUELQUES LIAISONS IMPOSÉES A UN CORPS SOLIDE

par M. Émile COTTON.

On trouve dans les lignes suivantes quelques remarques au sujet de cas singuliers qui se présentent parfois dans l'étude des contacts d'un solide S et d'un obstacle fixe Σ; elles concernent la traduction analytique des liaisons et la définition adoptée pour l'absence de frottement.

Une attention particulière est apportée à l'un de ces cas signalé comme connu par M. Brelot (*Annales de l'Université de Grenoble, section sciences-médecine*, nouvelle série, t. XX, 1944, p. 2). Il s'agit d'une barre rectiligne homogène AB de longueur 2R dont les extrémités restent sur une sphère fixe de rayon R. Si l'on admet que les réactions se réduisent à deux forces portées par les rayons aboutissant en A et B, elles ne peuvent équilibrer le poids lorsque la barre n'est pas verticale. Pour simplifier notre exposé, nous substituerons à la barre un solide S, la corde de longueur maximum de sa surface frontière étant égale au diamètre de la sphère à l'intérieur de laquelle S doit rester : la même difficulté se présente, mais nous supposons S limité par une surface (S) ayant un plan tangent en chacun de ses points, ce qui permet d'utiliser des propositions tout à fait classiques.

1. Donnons d'abord des *indications sommaires sur le degré de liberté d'un solide* S *touchant un obstacle fixe* Σ *en un ou plusieurs points*. Écrivant que (Σ), frontière de Σ, et une surface (S′), égale à (S), frontière de S ont un point commun et même plan tangent en ce point, on a 4 équations entre les 3 coordonnées x, y, z du point de contact et les 6 paramètres a_1, a_2, ..., a_6 intervenant dans l'équation générale des surfaces (S′). Éliminant d'abord deux des coordonnées, on a deux équations E, E′, où figure encore la troisième coordonnée. En éliminant encore celle-ci on a finalement une équation entre les paramètres a, ce qui permet d'exprimer l'un d'eux en fonction des 5 autres ; la liaison est holonome et le degré de liberté de S égal à 5.

Le contact en deux points exige que E, E′ aient deux racines communes, d'où deux relations entre les a ; liaison holonome, degré de liberté de S égal à 4 (en général). De même ce degré est 3 pour le contact en trois points.

Il ne s'agit évidemment là que d'un premier aperçu, car l'élimination n'est bien étudiée que dans le cas des équations algébriques et, même alors, une discussion serait nécessaire.

Quand (Σ) est une sphère de rayon R, on peut utiliser l'équation générale des surfaces (S″) parallèles aux surfaces (S′) à une distance R, et écrire que le centre O de (Σ) est sur (S″), ce qui donne la condition entre les a traduisant le contact en un point. S'il y a contact en deux points, O doit être sur une ligne double de (S″), et pour le contact en trois points O est (en général) point triple de (S″) ; on retrouve dans chacun de ces cas le degré de liberté antérieurement indiqué. De plus dans le cas du contact en 3 points, si O est bien point triple isolé, les 3 points de contact, pieds des normales abaissées de O sur (S″), forment un triangle ABC de grandeur invariable, fixe par rapport à (S″).

Une représentation paramétrique du contact en un point a été donnée en 1895 par M. Hadamard dans deux articles des *Mémoires de la Société des sciences de Bordeaux ;* ils sont reproduits à la fin de l'ouvrage d'Appell : *Les mouvements de roulement en dynamique* (*Collection Scientia*). Soient M et M′ les points marqués sur (S) et (Σ) qui viennent en coïncidence lorsqu'il y a contact, $Mxyz$ un trièdre de Darboux relatif à (S), son arête Mz est normale à (S), u, v les coordonnées curvilignes de M sur (S). Soient u', v', M′, x', y', z', les éléments analogues relatifs à (Σ), les directions Mz, $M'z'$ coïncidant lors du contact et soit alors φ l'angle $\widehat{Mx', Mx}$; u, v, u', v', φ sont les paramètres de M. Hadamard. Il les a utilisés pour chercher dans quelles conditions certaines liaisons complémentaires, telles que l'absence de glissement, l'absence de roulement, ... données par des équations de Pfaff que sa représentation permet d'écrire, sont elles-mêmes exprimables en termes finis.

Il paraît difficile de donner une représentation paramétrique du contact en deux points, sauf dans des cas exceptionnels. L'un d'eux est celui où (Σ) est une sphère de centre O et (S) une surface de révolution d'axe Δ ; cet axe est à une distance constante de O ; 3 paramètres déterminent les positions du plan OΔ et de l'axe Δ, un quatrième est l'angle qu'un plan méridien marqué dans S fait avec le plan OΔ. De même si, la surface (S) étant quelconque, il y a contact en trois points A, B, C le tétraèdre OABC est de grandeur constante et invariablement lié à S ; on est ramené au cas d'un solide ayant un point fixe O.

2. Mais *les traductions analytiques précédentes du contact en un ou plusieurs points sont incomplètes :* elles ne font intervenir que les éléments de contact (points et plans tangents), communs à (S) et (Σ) ; *il n'est pas suffisamment tenu compte de l'impénétrabilité des corps solides* S et Σ, aucun volume ne pouvant être rempli à la fois par les matières qui les constituent.

Celte impénétrabilité est, en général, difficile à exprimer analytiquement. On peut bien, comme nous l'avons montré dans un article du *Journal de mathématiques* (9ᵉ série, t. XVII, 1938, p. 169), traduire par une inégalité la non-pénétration mutuelle de S et Σ *au voisinage du point de contact* ; c'est là ce que nous appelions la possibilité de la réalisation directe du contact. Mais il resterait encore à exprimer qu'il n'y a pas de courbes d'intersection de (S) et (Σ) ne passant pas par le point de contact et, aussi, que l'un des solides n'est pas tout entier intérieur à la matière constituant l'autre.

Cependant la question est simple quand (Σ) est une sphère frontière d'une cavité sphérique de Σ, à l'intérieur de laquelle doit rester S et que la frontière (S) a une corde AB de longueur maximum qui est égale au diamètre 2R de (Σ). Des propositions de géométrie élémentaire montrent que A et B sont sur (Σ) et diamétralement opposés ; le milieu de AB est en O, centre de (Σ), donc fixe. On voit facilement que (S) touche (Σ) aux points A et B — en tenant compte de ce que AB est corde de longueur maximum. Il faut, de plus, s'il y a d'autres normales abaissées de O sur (S), que pour chacune d'elles ON on ait $\mathrm{ON} \leqslant \mathrm{R}$. Ces conditions d'impénétrabilité sont nécessaires et suffisantes. Le degré de liberté de S est égal seulement à 3.

D'autres formes des frontières de l'obstacle et du solide peuvent donner des restrictions plus étroites au déplacement de S ; supposons, par exemple, que (Σ) et (S) soient des ellipsoïdes dont les axes aient pour longueur $2a$, $2b$, $2c$ pour (Σ) et $2a$, $2b'$, $2c'$ pour (S), avec $a > b > c > b' > c'$. S ne peut que tourner autour de la droite support commun des grands axes et n'a qu'un degré de liberté.

Si (Σ) avait pour longueurs de ses axes $2a$, $2a$, $2c$ et (S) $2a$, $2b'$, $2c'$, $a > c > b' > c'$, le degré de liberté de S serait 2 ; ce solide tournerait autour de son grand axe qui lui-même tournerait autour de l'axe de révolution de Σ.

3. *On traduit analytiquement les liaisons par une méthode différente de celle du n°1 en utilisant la distribution des vitesses des divers points de* S *dans un mouvement virtuel compatible avec les liaisons.* Les surfaces frontières restant en contact en un point, soient à un instant donné $t = 0$, p, q, r, ξ, η, ζ, les coordonnées plückériennes par rapport à des axes rectangulaires du torseur des rotations instantanées de S par rapport à Σ ; x, y, z les coordonnées du point de contact M considéré comme appartenant à S ; sa vitesse doit être tangente à Σ ; si $f(x, y, z) = 0$ est l'équation de cette surface on a :

$$(\xi + qz - ry)f'_x + (\eta + rx - pz)f'_y + (\zeta + py - qx)f'_z = 0,$$

ou, en ordonnant en p, q, ..., ζ,

$$(1) \qquad p(yf'_z - zf'_y) + q(zf'_x - xf'_z) + r(xf'_y - yf'_x) + \xi f'_x + \eta f'_y + \zeta f'_z = 0.$$

On peut écrire autant de relations (1) qu'il y a de points de contact ; supposons qu'elles se réduisent à n relations linéairement indépendantes :

$$(2) \quad L_i p + M_i q + N_i r + X_i \xi + Y_i \eta + Z_i \zeta = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les valeurs de p, q, ..., ζ satisfaisant à ces équations sont de la forme

$$(3) \qquad p = \Sigma\lambda_j p_j; \qquad q = \Sigma\lambda_j q_j; \qquad \ldots; \qquad \zeta = \Sigma\lambda_j \zeta_j; \qquad (j = 1, \ldots, m); \qquad m = 6 - n;$$

p_j, q_j, ..., ζ_j désignent m solutions du système (2) distinctes les unes des autres, λ_1, ..., λ_m sont arbitraires. On dit alors que le *torseur des rotations instantanées appartient à un système linéaire de torseurs à m termes.*

Par exemple s'il y a contact en deux points M, M_1, on a deux relations (1) distinctes si les normales à (Σ) en ces deux points sont différentes, $n = 2$, $m = 4$; et si ces normales ont même support $n = 1$, $m = 5$. Un exemple de ce dernier cas est celui où S est une bille sphérique assujettie à rester entre deux plans parallèles fixes dont la distance est égale à son diamètre.

La proposition précédente s'applique d'une façon générale aux rotations instantanées d'un solide assujetti à des liaisons holonomes lui laissant un degré de liberté égal à m. (Voir Kœnigs, *Cinématique*, notes IV et VIII.) Elle est encore valable quand interviennent des liaisons non holonomes exprimables par des équations de Pfaff.

Elle a permis à son auteur, Ball, de ramener les problèmes de la statique du solide à 6 cas généraux correspondant aux degrés de liberté possibles (la théorie de Ball est exposée dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques, édition française, t. IV, vol. 2, p. 80 à 105*). Elle est basée sur le principe des vitesses virtuelles. La condition d'équilibre d'un système assujetti à des liaisons sans frottement est que la somme des puissances des forces données soit nulle pour tout mouvement virtuel du système compatible avec les liaisons.

La démonstration habituelle de ce principe repose sur la proposition préliminaire : *la somme des puissances virtuelles des forces de liaison est nulle pour de tels mouvements.* Cette proposition se démontre quand les liaisons d'ensemble du système se décomposent en liaisons simples où l'absence de frottement est définie directement : contact de deux solides en un point avec glissement, roulement et pivotement possibles, contact en un point sans glissement... *Lorsque pareille décomposition n'est pas possible, on peut, avec Appell* (*Traité de mécanique rationnelle, t. I, chap. VIII*), *prendre la proposition précédente comme définition de l'absence de frottement*; c'est ce que nous ferons ici.

Quand le système matériel est un solide, la condition d'équilibre donnée par Ball est que le *dyname des forces données appartienne à un système linéaire à n termes, réciproque du système linéaire des rotations instantanées.* Par dyname on entend, avec Plücker, un ensemble de forces appliquées au solide, par système linéaire de dynames à n termes ceux dont les coordonnées plückériennes X, Y, ..., N sont données par

$$(4)\qquad X = \Sigma\mu_h X_h;\qquad Y = \Sigma\mu_h Y_h;\qquad \ldots;\qquad N = \Sigma\mu_h N_h;$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n),$$

$\mu_1, \ldots, \mu_n$ étant arbitraires. Dire qu'il y a réciprocité entre les torseurs (3) et les dynames (4), signifie que la puissance de l'un quelconque des dynames par rapport à l'un quelconque des torseurs est nulle :

$$Lp + Mq + Nr + X\xi + Y\eta + Z\zeta = 0.$$

La même propriété appartient au dyname des réactions.

Examinons le cas où la surface (S) du solide touche celle de l'obstacle Σ en deux points A, B, les normales en ces deux points étant portées par AB. Prenons cette droite comme axe Oz, O milieu de AB, l'équation (1) se réduit à :

$$(5) \qquad \zeta = 0.$$

Il semblerait donc que l'on ait une seule équation de liaison. Mais dans le cas où S est intérieur à une cavité sphérique de l'obstacle Σ et où AB est un diamètre de (Σ), nous savons que (5) ne suffit pas à exprimer l'impénétrabilité des deux corps, celle-ci entraîne la fixité du milieu O de AB, la vitesse de ce point de S étant nulle nous avons :

$$(6) \qquad \xi = 0; \qquad \eta = 0,$$

et la relation (5) déjà écrite. En tout il y a 3 équations de liaison distinctes et trois conditions d'équilibre. Les systèmes linéaires de torseurs et de dynames sont ici des cas très particuliers des systèmes à trois termes de Ball; nous dirons plus simplement que *les liaisons permettent à* S *une rotation instantanée autour de tout axe passant par* O *et que le dyname des forces données doit pour l'équilibre être équivalent* (*au sens de la théorie des vecteurs glissants*) *à une force unique passant par* O ; *il en est de même pour le dyname des réactions*.

Pour un ellipsoïde intérieur à une cavité ellipsoïdale, les grands axes étant égaux, on retrouve la condition d'équilibre d'un solide mobile autour d'un axe. De même pour un ellipsoïde S de grand axe $2a$, intérieur à la cavité de l'obstacle Σ limitée par un ellipsoïde de révolution aplati dont l'axe équatorial a même longueur $2a$, le dyname des forces données doit pour l'équilibre être équivalent à une force passant par le centre et à un couple dont le plan est parallèle à celui qui contient les axes de révolution.

Considérons encore un solide S intérieur à la cavité sphérique (Σ) qu'il touche en trois points au moins ABC formant un triangle dont le cercle circonscrit a un rayon inférieur à celui de (Σ) ; on a vu que le centre O de la sphère est invariablement lié à S ; les conditions d'équilibre sont encore celles d'un solide mobile autour de O. Le dyname des réactions équivaut à une force F dont le support passe par O; il peut être décomposé en forces portées par les rayons OA, OB, OC; ... des points de contact, cette décomposition est possible d'une seule façon si le nombre de ces points est 3; si le nombre surpasse 3, il y a une infinité de façons de la faire.

Nous avons, pour simplifier, supposé, en général, les liaisons bilatérales; voici quelques indications relatives au dernier exemple en admettant que S peut s'écarter de la sphère à l'instant $t = 0$.

Le centre O de (Σ) étant pris pour origine des axes $Oxyz$, M étant l'un des points de contact, x, y, z ses ordonnées, le produit scalaire de la vitesse $\vec{V}$ de ce point et du vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour expression :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{OM} = \xi x + \eta y + \zeta z = \vec{V}' \cdot \overrightarrow{OM},$$

$\vec{V}'$ étant la vitesse de O. Si le contact en M cesse, M se déplaçant nécessairement vers l'intérieur de (Σ), ce produit scalaire est négatif. Le plan mené par O perpendiculairement à OM détermine sur (Σ) deux hémisphères, M doit être celui qui se trouve par rapport à ce plan du côté opposé à $\vec{V}'$.

Par suite, s'il y a plus de trois points de contact et si ces points ne sont pas sur un même hémisphère, la liaison résultante : S mobile autour de O, ne peut pas cesser d'être vérifiée. Si, au contraire, tous les points de contact sont sur un même hémisphère de (Σ), on considère le plus petit angle polyèdre de sommet O contenant à son intérieur ou sur ses arêtes tous les points de contact. Soit Π cet angle polyèdre (analogue au polygone de sustentation d'un solide touchant un plan fixe). On construit l'angle polyèdre Π', symétrique par rapport à O de l'angle polyèdre supplémentaire de Π (tous ces angles polyèdres ont O pour sommet). Si la vitesse $\vec{V}'$ de O est intérieure (au sens large) à l'angle polyèdre Π', S s'écarte de O vers l'intérieur ; s'il en est autrement $\vec{V}'$ est nécessairement nul et le contact persiste en tous les points.