Astérisque

FRANÇOIS LEDRAPPIER

Mesures stationnaires sur les espaces homogènes [d'après Yves Benoist et Jean-François Quint]

Astérisque, tome 352 (2013), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 1058, p. 535-556

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2013__352__535_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 2012
64e année, 2011-2012, n° 1058, p. 535 à 556

MESURES STATIONNAIRES SUR LES ESPACES HOMOGÈNES [d'après Yves Benoist et Jean-François Quint]

par **François LEDRAPPIER**

INTRODUCTION

Les actions de sous-groupes fermés d'un groupe de Lie G sur les espaces homogènes de volume fini d'un groupe de Lie semi-simple apparaissent dans de nombreux contextes. L'action d'un réseau dans G sur les espaces homogènes d'autres groupes est au cœur de la preuve du théorème d'arithméticité de G. Margulis ([**26**]). Les fermés invariants par l'action d'un sous-groupe engendré par des éléments unipotents ont été classés par M. Ratner (voir [**17**]). Les fermés invariants par l'action d'un sous-tore d'un tore maximal ne sont pas compris en général, mais ont déjà apporté plusieurs informations (voir les comptes rendus de E. Breuillard [**9**] et E. Lindenstrauss [**25**]). Très souvent dans ces études, un rôle est joué par les mesures finies invariantes et des outils de théorie ergodique interviennent dans les techniques des démonstrations : théorème ergodique multiplicatif d'Osseledets dans les premières versions des théorèmes de rigidité, théorème ergodique de Birkhoff dans l'argument de dérive des flots unipotents, théorie de l'entropie pour les actions de tore.

Dans une série d'articles, Yves Benoist et Jean-François Quint ont considéré une situation nouvelle : par exemple, si G est un groupe simple et Γ un sous-groupe compactement engendré et Zariski dense, ils montrent que les orbites de l'action de Γ sur un espace homogène de volume fini G/Λ sont soit finies, soit denses. Pour aborder ce problème dans l'esprit précédent, une première difficulté est qu'il n'y a pas *a priori* de mesure invariante par l'action d'un tel sous-groupe Γ sur un fermé invariant : Γ n'est pas moyennable en général. En revanche, il y aura toujours des probabilités stationnaires pour un processus de Markoff défini par une marche aléatoire sur Γ. Un résultat central de Yves Benoist et Jean-François Quint ([**3**]) est de classer ces mesures stationnaires. Le point crucial de leur démonstration est, comme chez Ratner, un argument de dérive. Les outils techniques sont le théorème des martingales et des théorèmes sur le comportement asymptotiques des marches aléatoires sur les groupes linéaires qui sont des extensions de résultats classiques d'Émile Le Page ([**24**]).

Les articles [**1**], [**3**], [**2**] et [**5**] sont très bien écrits et détaillés. Dans cet exposé, nous allons tenter d'en présenter les principales articulations.

1. RÉSULTAT PRINCIPAL

Soient G un groupe de Lie réel et Λ un réseau dans G, c'est-à-dire un sous-groupe discret de G tel que le quotient $X := G/\Lambda$ a un volume fini. Un élément γ de G agit (à gauche) sur G/Λ et agit donc sur les mesures de probabilité sur X : si ν est une mesure de probabilité sur X, on note $\gamma_*\nu$ la mesure image $\gamma_*\nu(A) = \nu(\gamma^{-1}A)$.

Soit μ une mesure de probabilité sur G de support Δ_μ compact. On note Γ_μ le groupe fermé engendré par Δ_μ. Une probabilité ν sur X est dite μ-stationnaire si on a $\int_G \gamma_*\nu d\mu(\gamma) = \nu$, autrement dit si pour toute fonction continue f à support compact sur X :

$$\int_{X\times G} f(\gamma x)d\nu(x)d\mu(\gamma) \;=\; \int_X f d\nu. \tag{1}$$

Une mesure de probabilité μ-stationnaire est dite ergodique si elle est extrémale parmi les mesures de probabilités μ-stationnaires.

D'autre part, une probabilité ν sur G/Λ est dite algébrique si elle est portée par une orbite fermée Fx de son stabilisateur $F := \{\gamma \in G; \gamma_*\nu = \nu\}$. Dans ce cas, si x est le point $g\Lambda$ pour un $g \in G$, $F \cap g\Lambda g^{-1}$ est un réseau de F et la mesure ν est l'image par l'application $\gamma \mapsto \gamma x$ de la mesure de probabilité invariante à gauche sur $F/(F \cap g\Lambda g^{-1})$.

Yves Benoist et Jean-François Quint ([**3**]) montrent :

Théorème 1.1 ([**3**], Theorem 1.1). — *Avec les notations ci-dessus, on suppose que $H_\mu = \overline{Ad(\Gamma_\mu)}^Z$ est un groupe semi-simple, Zariski connexe et sans facteur compact. Alors toute mesure de probabilité μ-stationnaire ergodique sur X est algébrique et Γ_μ-invariante.*

La démonstration de ce théorème, ou plutôt d'une version plus générale concernant les groupes de Lie S-adiques, où S est un ensemble fini de complétions de $\mathbb{Q}$, occupe [**3**] et [**2**]. Le but de cet exposé est d'en présenter les grandes lignes dans le cas réel. Comme les arguments sont de nature qualitative et probabiliste, on peut se convaincre qu'avec certaines précautions, ce schéma général peut aussi être suivi dans le cas p-adique. Dans le cas réel, le corollaire suivant est important

COROLLAIRE 1.2. — *Soient G un groupe algébrique réel semi-simple connexe sans facteur compact, Λ un réseau irréductible dans G et μ une mesure de probabilité sur G dont le support est compact et engendre un sous-groupe Zariski dense dans G. Alors la seule mesure de probabilité μ-stationnaire sans atomes sur X est la mesure de probabilité G-invariante.*

Ce résultat, dans le cas où G est simple, fut le premier obtenu par Yves Benoist et Jean-François Quint ([**1**]).

2. EXEMPLES ET APPLICATIONS

Dans un autre article ([**5**]), Yves Benoist et Jean-François Quint utilisent le théorème 1.1 pour classer les fermés de G/Λ invariants par l'action à gauche d'un sous-ensemble compact (par exemple fini) Δ d'éléments de G. L'idée générale est de choisir une mesure μ de probabilité quelconque de support Δ. Si $Y \subset X$ est une partie fermée Δ-invariante, Y va porter des mesures stationnaires (grâce à un théorème de point fixe pour l'opérateur $\nu \mapsto \int_G \gamma_* \nu d\mu(\gamma)$ qui préserve les probabilités sur Y). Ils obtiennent le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1 ([**5**], Theorem 1.1). — *Soient G un groupe de Lie réel, Λ un réseau dans G et Γ un sous-semigroupe fermé de G, de génération compacte. On suppose que la fermeture de Zariski de* $\mathrm{Ad}(\Gamma)$ *dans $GL(\mathfrak{G})$ est semisimple, Zariski connexe, sans facteur compact. Alors, pour tout $x \in X$, il existe un sous-groupe fermé H tel que $\overline{\Gamma x} = Hx$ et Hx porte une mesure de probabilité invariante ν_x.*

En fait, la mesure ν_x apparaît naturellement lors de simulations de l'action de tirages aléatoires d'éléments de G avec la loi μ :

THÉORÈME 2.2 ([**5**], Theorem 1.3). — *Avec les mêmes notations, soit μ une probabilité sur Γ dont le support est compact et engendre un sous-semigroupe dense de Γ. Alors, pour tout $x \in X$, pour $\mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$-presque tout choix d'éléments $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$,*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\gamma_k \cdots \gamma_1 x} \to \nu_x \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Ces théorèmes ont aussi une version p-adique. Nous présentons deux exemples où ces résultats ont été établis auparavant.

Soit $X = \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ et prenons pour G le groupe des transformations affines de X, $G = GL(d, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{T}^d$ et pour Λ le sous-groupe $GL(d, \mathbb{Z}) \ltimes \{0\}$. Soit Δ une famille finie de matrices de $GL(d, \mathbb{Z})$ qui engendrent $GL(d, \mathbb{Z})$. Comme X est compact, toute mesure de probabilité μ de support Δ admet des mesures stationnaires. D'après le théorème 1.1, les mesures stationnaires ergodiques sont ou bien la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^d$, ou bien portées par l'orbite finie d'un point x rationnel (ceci est dû à [**7**] dans ce cas et remonte à Furstenberg [**15**] pour une famille particulière de mesures μ). Si x n'est pas rationnel, pour presque tout choix d'éléments $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{\gamma_k\cdots\gamma_1 x} \to$ Lebesgue quand $n \to \infty$. En particulier, le seul fermé invariant infini est le tore $\mathbb{T}^d$ ([**21**], [**27**]). De plus, les orbites rationnelles finies de plus en plus longues deviennent finalement uniformément distribuées sur X.

Considérons $G = SL(2,\mathbb{R})$ et $\Gamma = \Lambda = SL(2,\mathbb{Z})$. Un point $x = g\Lambda$ de $X = G/\Lambda$ a une orbite finie si, et seulement si, g est tel que $\Lambda \cap g\Lambda g^{-1}$ est un sous-groupe d'indice fini dans Λ (on dit que g est un *commensurateur* de Λ). Si g n'est pas un commensurateur, μ une probabilité portée par un système générateur fini de Λ, pour $\mu^{\otimes\mathbb{N}}$-presque tout choix d'éléments $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{\gamma_k\cdots\gamma_1 x}$ converge vers la mesure uniforme quand $n \to \infty$. Comme plus haut, les orbites finies des commensurateurs de plus en plus longues deviennent finalement uniformément distribuées sur X (voir [**10**] et [**13**] pour les résultats arithmétiques correspondants).

Dans les deux cas, les preuves de [**7**] ou de [**10**] reposent sur de l'analyse harmonique fine et donnent des vitesses de convergence exponentielles dans les résultats d'équidistribution. Les méthodes de Benoist et Quint ne donnent pas pour l'instant de vitesse de convergence, mais elles ont un champ d'application beaucoup plus large. Par exemple, pour n'importe quel ensemble fini Δ engendrant un sous-groupe Γ Zariski dense, les (Γ,μ) orbites de $x = g\Lambda$ sont encore équidistribuées sur G/Λ dès qu'elles ne sont pas finies. Un exemple naturel est le mouvement brownien discret[(1)] sur $PSL(2,\mathbb{R})/\Lambda$: l'espace X s'identifie au fibré unitaire de la surface $\mathbb{H}^2/\Lambda$. Si $x \in X$, on pivote sur place de façon équiprobable d'un nombre entier de quarts de tour et on suit le flot géodésique pendant un temps $\lambda > 0$. Les trajectoires sont les trajectoires du processus de Markoff associé à l'action des quatre matrices :

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda/2} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda/2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{e^{\lambda/2}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{\lambda/2}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{e^{-\lambda/2}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-\lambda/2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e^{\lambda/2} \\ -e^{-\lambda/2} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{e^{\lambda/2}}{\sqrt{2}} & -\frac{e^{\lambda/2}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-\lambda/2}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-\lambda/2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Soit Γ le groupe engendré par ces matrices. Il existe λ_0 pour lequel Γ est de covolume fini non cocompact. Alors :

- pour $\lambda > \lambda_0$, Γ est un groupe discret de covolume infini ;
- pour $\lambda < \lambda_0$, Γ est dense sauf pour une infinité dénombrable de valeurs de λ où Γ est discret cocompact.

(1) Je remercie Pablo Lessa pour m'avoir signalé cet exemple introduit par J.-C. Gruet.

Les trajectoires sont équidistribuées sauf si l'orbite Γx est finie. Cela peut arriver par exemple pour certains Λ lorsque λ est un multiple entier du côté d'un polygone régulier à angles droits et à un nombre pair de côtés.

Le théorème de Benoist et Quint s'applique à des situations plus générales, puisque l'hypothèse porte uniquement sur la nature du groupe H_μ. Par exemple, pour l'action sur le tore d'un sous-groupe Γ de $SL(d,\mathbb{Z})$, il suffit de demander que H_μ soit semi-simple, pas nécessairement tout le groupe. Alors, tous les fermés invariants sont des réunions finies de sous-tores. Un exemple du deuxième type est la marche aléatoire sur le fibré des repères d'une variété irréductible de volume fini $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)/\Lambda$ donnée par l'action diagonale des quatre matrices ci-desssus.

Dans le cas où l'espace X n'est pas compact, l'existence de mesures stationnaires n'est pas automatique, il faut vérifier que les trajectoires du processus de Markoff P sur X de probabilités de transition :

$$P(x,A) \;:=\; \mu(\{\gamma; \gamma \in \Gamma, \gamma x \in A\})$$

ne vont pas à l'infini. Cela découle du fait que, pour tout $x \in X$, les mesures $\mu^{*k} * \delta_x$ sont équitendues sur X. Dans le cas d'un groupe linéaire, l'énoncé est :

THÉORÈME 2.3 ([**2**], Theorem 1.1). — *Avec les notations précédentes, supposons que G est un sous-groupe de $SL(d,\mathbb{R})$ et que $\overline{\Gamma_\mu}^Z$ est semi-simple. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, tout $x \in X$, il y a un compact $M_{\varepsilon,x} \subset X$ tel que pour tout $n \geq 0$, $\mu^{*n} * \delta_x(M_{\varepsilon,x}) \geq 1-\varepsilon$.*

Le théorème complet de [**2**] concerne un groupe de Lie général, et une mesure μ admettant des moments exponentiels. Le paragraphe 7 de [**2**] étend ces résultats aux produits de groupes p-adiques. Le théorème 2.3 est dû à A. Eskin et G. Margulis ([**11**]) sous une hypothèse supplémentaire d'irréductibilité et à E. Breuillard ([**8**]) pour certains groupes Γ_μ nilpotents dans le cas où μ est centrée (l'hypothèse que μ est centrée est cruciale, [**8**] a des contre-exemples où Γ_μ est nilpotent et μ non centrée). Comme dans [**11**], l'idée de la preuve du théorème 2.3 est de construire sur X une fonction f propre telle qu'il existe $a < 1$ et b avec, pour tout $x \in X$:

$$P(x,f) \;:=\; \int_G f(\gamma x)\,d\mu(\gamma) \;\leq af(x) + b. \tag{2}$$

Pour $\varepsilon > 0$ et x_0 fixés, l'équation (2) permet de trouver un nombre C tel que pour tout $n \geq 0$, $\int_G f(\gamma x_0)d\mu^{*n}(\gamma) \leq C$. L'ensemble $\{x; f(x) \leq C/\varepsilon\}$ est relativement compact et de $(\mu^{*n} * \delta_{x_0})$ mesure plus grande que $1-\varepsilon$ pout tout n. Pour trouver la fonction f, [**11**] utilisent l'inégalité suivante :

PROPOSITION 2.4 ([**12**], Lemma 5.6). — *Soient E un espace euclidien, u,v,w trois éléments décomposables de $\Lambda^* E$. Alors :*

$$\|u\|\|u \wedge v \wedge w\| \;\leq \|u \wedge v\|\|u \wedge w\|.$$

Dans [**2**], est établie une inégalité plus complexe, qui implique les projections des vecteurs $u, u \wedge v \wedge w, u \wedge v, u \wedge w$ sur toutes les sous-représentations irréductibles d'un sous-groupe algébrique réductif de $GL(E)$ (voir dans [**2**], la « Mother Inequality » Proposition 3.1). Il en déduisent le théorème 2.3 et une généralisation aux complémentaires de fermés invariants.

DÉFINITION 2.5. — *Soit $Y \subset X$ un fermé Γ_μ invariant. Y est dit positivement μ-instable si pour tout $\varepsilon > 0$, tout compact $Z \subset X \setminus Y$, il existe un fermé $F \subset X \setminus Y$ tel que pour tout $x \in Z$, tout $n \geq 0$, on a :*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\mu^{*k} * \delta_x)(F) \geq 1 - \varepsilon.$$

Comme conséquence du théorème 2.3 (voir [**3**], section 6.8), tout sous-ensemble de X fermé et homogène (c'est-à-dire de la forme Fx pour un sous-groupe fermé F de G) est positivement μ-instable. De la même manière, la diagonale de $X \times X$ est positivement μ-instable.

3. LA MESURE ALÉATOIRE ν_b

On se place sous les hypothèses du théorème 1.1. Soit ν une mesure stationnaire pour l'action de (Γ_μ, μ) sur X. On veut montrer que ν est la mesure de Haar sur une orbite fermée d'un sous-groupe fermé de G. Disons que la mesure ν *remplit* X si pour tout sous-groupe fermé G' de G contenant Γ_μ avec $\dim G' < \dim G$, les G'-orbites sont négligeables. En remplaçant G par un sous-groupe fermé, on peut supposer que ν remplit X ([**3**], Proposition 7.3). Une autre réduction est de supposer que les L-orbites sont négligeables, si L est le commutateur de Γ_μ dans G. En effet, les éléments de L échangent les trajectoires du processus de Markoff P et, par ergodicité de ν, les éléments de L envoient ν soit sur ν elle-même soit sur une mesure singulière par rapport à ν. Soit L_ν le sous-groupe fermé de L des éléments qui préservent ν. Par ergodicité encore, ou bien $\nu(L_\nu x) = 0$ pour tout x, ou bien il y a un nombre fini d'orbites de L_ν qui portent ν et qui sont échangées par l'action de Γ_μ. Dans ce dernier cas, la mesure ν est algébrique, son stabilisateur est $\Gamma_\mu L_\nu$ et la conclusion du théorème 1.1 est vraie.

Si on pense à l'action de (Γ_μ, μ) sur X comme à un produit indépendant de difféomorphismes aléatoires de X, ν décrit le régime stationnaire. Si on suppose que les difféomorphismes agissent depuis des temps infinis dans le passé, l'état ν est la moyenne de tous les états actuels qui peuvent être le résultat d'un choix de ces difféomorphismes passés. On décrit ces choix par l'espace produit $(B, \mathscr{B}, \beta) = \otimes^{\mathbb{N}}(\Delta_\mu, \mathscr{A}, \mu)$, où $\mathscr{A}$ est la tribu borélienne du compact Δ_μ.

PROPOSITION 3.1. — *Il existe une famille mesurable de probabilités $b \mapsto \nu_b$ sur X, définie β-presque partout, telle que pour β-presque tout b, $(b_0 \cdots b_n)_*\nu$ converge vers ν_b. En particulier, $\nu = \int \nu_b d\beta(b)$. De plus, si T est le décalage sur l'espace B,*

$$\nu_{Tb} = (b_0^{-1})_*\nu_b. \tag{3}$$

La convergence provient du théorème des martingales, l'équitension en moyenne étant assurée par le théorème 2.3. La relation (3) découle de la définition de ν_b comme limite. Cette proposition remonte à Furstenberg ([**14**]) pour les actions de marches aléatoires. Elle est aussi classique pour les difféomorphismes indépendants ([**30**], « sample measures ») ou les flots stochastiques ([**23**] « équilibre stochastique »). Remarquons que par ergodicité de $(B, \mathscr{B}, \beta; T)$, les mesures ont presque toutes la même masse des parties atomiques. La mesure ν peut être atomique, comme dans les exemples de la section 2. Alors, bien sûr, les mesures ν_b sont aussi atomiques. Réciproquement,

PROPOSITION 3.2 ([**3**], Proposition 6.17). — *Pour β-presque tout b, ν_b est soit diffuse, soit atomique. Si les ν_b sont atomiques, alors ν est atomique.*

Idée de la démonstration. Supposons d'abord que, pour presque tout b, ν_b est une mesure de Dirac, i.e. $\nu_b = \delta_{\kappa(b)}$, où $b \mapsto \kappa(b)$ est une application mesurable de B dans X. Par le théorème de Lusin, il existe un compact K de B, $\beta(K) > 0{,}9$, où la fonction κ est uniformément continue. On peut alors trouver un sous-ensemble β-négligeable N de B tel que pour $b \notin N$, $\kappa(g_1 \cdots g_k b) = g_1 \cdots g_k \kappa(b)$ pour $\mu^{\otimes k}$-presque tout $g_1 \cdots g_k$. De plus, grâce au théorème ergodique de Chacon-Ornstein appliqué à l'opérateur L_μ de $L^1(B, \beta)$ défini par $L_\mu(\varphi)(b) = \int \varphi(gb) d\mu(g)$, on a :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu^{\otimes k}(\{g_1, \dots, g_k; g_1 \cdots g_k b \in K\}) > 0{,}8.$$

Alors la mesure ν est une mesure de Dirac et la fonction κ est β-presque partout constante. En effet, supposons au contraire qu'il existe $b, b' \notin N$ tels que $\kappa(b) \neq \kappa(b')$. Puisque la diagonale de $X \times X$ est positivement μ-instable, il existe un compact $F \subset X \times X$ disjoint de la diagonale tel que pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu^{*k} * \delta_{(\kappa(b), \kappa(b'))}(F) > 0{,}8.$$

On peut donc trouver des k arbitrairement grands pour lesquels la $\mu^{\otimes k}$-mesure des $g_1, \ldots, g_k$ qui vérifient à la fois :

$$g_1 \cdots g_k b \in K,\ g_1 \cdots g_k b' \in K,\ \text{et}\big(\kappa(g_1 \cdots g_k b), \kappa(g_1 \cdots g_k b')\big) \in F$$

est plus grande que 0,4. Cela contredit la continuité uniforme de κ sur K.

La démonstration est similaire dans le cas général où, pour β-presque tout b, la mesure ν_b a une partie atomique, après avoir remarqué que, par ergodicité, le nombre d'atomes est β-presque partout fini et constant. □

Rappelons que l'on a supposé que les orbites du commutateur L de Γ_μ sont négligeables. La même idée de démonstration donne :

PROPOSITION 3.3 ([**3**], Proposition 7.8). — *Pour β-presque tout $b \in B$, tout $x \in X$, $\nu_b(Lx) = 0$.*

4. LE FEUILLETAGE ALÉATOIRE EXP $\mathfrak{V}_b$

Montrer que la mesure ν est Γ_μ-invariante revient à montrer que $\nu_b = \nu$ pour presque tout b. Benoist et Quint ne montrent pas directement que $\nu_b = \nu$ pour presque tout b, mais qu'il existe pour presque tout b un sous-groupe Ad-unipotent R_b tel que ν_b est invariant par R_b. Le théorème de Ratner ([**29**]) dit alors que, pour presque tout b, la mesure ν_b est un mélange de mesures algébriques. La mesure ν est donc une mesure stationnaire ergodique qui est un mélange de mesures algébriques. Il s'ensuit (et c'est une des parties délicates de l'extension au cas p-adique) que la mesure ν elle-même est algébrique.

Rappelons que, dans le modèle des difféomorphismes aléatoires indépendants, ν_b décrit l'état actuel du système après avoir appliqué des difféomorphismes depuis toujours. Si ces difféomorphismes dilatent plus dans une direction que dans d'autres, on s'attend à ce que la mesure ν_b soit plus étalée le long de cette direction. Le théorème d'Osseledets suggère que c'est la direction instable qui sera ainsi favorisée. La différentielle du difféomorphisme $x \mapsto gx$ est donnée par l'action de $\mathrm{Ad}\, g$ sur l'espace tangent à X identifié à $\mathfrak{G}$. La composition des différentielles des difféomorphismes indépendants se ramène donc à la marche aléatoire sur le groupe semi-simple H_μ et de loi l'image de μ par l'application Ad. Soit $\mathfrak{L}$ l'algèbre de Lie du commutateur L de Γ_μ. Pour tout $v \in \mathfrak{L}$, tout $g \in H_\mu$, $\mathrm{Ad} g(v) = v$.

Le complément invariant de $\mathfrak{L}$ se décompose en une somme d'espaces $\mathfrak{H}_i, i \in I$ où l'action de H_μ est irréductible. Pour chacun de ces $\mathfrak{H}_i$, on applique le théorème d'Osseledets ([**28**]) au produit indépendant de cette action de H_μ. On obtient une décomposition aléatoire de l'espace $\mathfrak{H}_i$ en une somme d'espaces où les exposants sont strictement positifs (les espaces *instables*) et d'un espace où les exposants sont négatifs ou nuls (l'espace *stable*). On remarque alors que les sommes d'espaces instables associés aux plus grands exposants ne dépendent que des coordonnées du passé $b_0, b_1, \ldots$. En particulier, l'espace $\mathfrak{W}_i$ correspondant au plus grand exposant λ_i et la somme $\mathfrak{V}_i$ de tous les espaces instables ne dépendent que du passé. Il existe donc $\lambda_i, \delta > 0$ tels que, pour chacun de ces $\mathfrak{H}_i$, il existe pour β-presque tout $b \in B$, deux sous-espaces $\mathfrak{W}_{i,b} \subset \mathfrak{V}_{i,b}$ de $\mathfrak{H}_i$ tel que

- pour tout vecteur non nul $v \in \mathfrak{W}_{i,b}$, on a
$$\lim_n \frac{1}{n} \ln \| \operatorname{Ad}(b_{n-1}^{-1} \cdots b_0^{-1})v\| = -\lambda_i,$$
- pour tout vecteur non nul $v \in \mathfrak{V}_{i,b}$, on a
$$\lim_n \frac{1}{n} \ln \| \operatorname{Ad}(b_{n-1}^{-1} \cdots b_0^{-1})v\| < -\delta,$$
- pour tout vecteur v de $\mathfrak{H}_i$ qui n'est pas dans $\mathfrak{W}_{i,b}$, on a
$$\lim_n \frac{1}{n} \ln \| \operatorname{Ad}(b_{n-1}^{-1} \cdots b_0^{-1})v\| > -\lambda_i, \tag{4}$$
- pour tout vecteur non nul $v \in \mathfrak{H}_i$, pour $\mu^{\otimes \mathbb{N}}$-presque toute suite $a_0, a_1, \ldots$, on a
$$\lim_n \frac{1}{n} \ln \| \operatorname{Ad}(a_{n-1} \cdots a_0)v\| = \lambda_i,$$
- et
$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln \angle(\operatorname{Ad}(a_{n-1} \cdots a_0)v, \mathfrak{V}_{i,(bna)}) < 0,$$

où l'angle entre deux vecteurs d'un espace euclidien est donné par $\angle(v,w) = \frac{\|v \wedge w\|}{\|v\|\|w\|}$ et (bna) est la suite $a_{n-1}, \ldots, a_0, b_0, b_1, \ldots$. Les deux dernières propriétés découlent de l'indépendance et remontent à **[16]**. Des formes plus précises de ces convergences seront utilisées dans l'argument final. On a

$$\mathfrak{V}_{i,Tb} = \operatorname{Ad}(b_0^{-1})\mathfrak{V}_{i,b}, \qquad \mathfrak{W}_{i,Tb} = \operatorname{Ad}(b_0^{-1})\mathfrak{W}_{i,b}.$$

Pour β-presque tout b, on pose $\mathfrak{V}_b = \oplus_i \mathfrak{V}_{i,b}$. On a encore :

$$\mathfrak{V}_{Tb} = \operatorname{Ad}(b_0^{-1})\mathfrak{V}_b.$$

Les éléments de $\mathfrak{V}_b$ sont unipotents puisque, pour $v \in \mathfrak{V}_b$, $\|\operatorname{Ad}(b_{n-1}^{-1} \cdots b_0^{-1})v\|$ tend vers 0. De plus, si $u, v \in \mathfrak{V}_b$ ont pour exposants λ_u, λ_v et $[u,v] \neq 0$, l'exposant de $[u,v]$ est $\lambda_u + \lambda_v$. Il s'ensuit que $\mathfrak{V}_b$ est une sous-algèbre de Lie unipotente de $\mathfrak{G}$. En résumé, pour presque tout b, les orbites du groupe Ad-unipotent $V_b := \exp(\mathfrak{V}_b)$ forment le feuilletage instable aléatoire de l'action sur X par difféomorphismes indépendants :

$$y \in V_b x \iff \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln d(b_{n-1}^{-1} \cdots b_0^{-1} y, b_{n-1}^{-1} \cdots b_0^{-1} x) < -\delta.$$

Dans l'exemple d'un groupe d'automorphismes du tore, le feuilletage instable est un feuilletage en sous-espaces dans la direction limite des directions contractantes des produits $b_{n-1}^{-1} \cdots b_0^{-1}$. Dans l'exemple du mouvement brownien discret, le feuilletage instable est le feuilletage en les orbites $\{k_b u_t k_b^{-1} x, t \in \mathbb{R}\}$ où k_b est une rotation aléatoire et $(t,x) \mapsto u_t x$ est le flot horocyclique sur X.

Les théorèmes de structure des groupes semi-simples vont nous permettre de décrire globalement les algèbres $\mathfrak{V}_b$ et la relation entre $\mathfrak{V}_b$ et $\mathfrak{V}_{Tb}$. Soit A un tore scindé maximal de H, P le minimal parabolique associé, U le radical nilpotent de P, Z le centralisateur de A dans P, ω le morphisme naturel (le 'logarithme') de Z dans $\mathfrak{A}$. On a $P = ZU$ et Z est une extension compacte de A. L'espace $\mathcal{P} := H/P$ est l'espace des drapeaux. On note ξ_0 le point fixe de l'action de P sur $\mathcal{P}$. Pour chaque drapeau, on choisit un représentant dans H/U. Il existe $\sigma(h,\eta) : H \times \mathcal{P} \to Z$ qui satisfait la relation de cocycle :

$$\sigma(hh',\eta) = \sigma(h,h'\eta)\sigma(h',\eta)$$

et qui représente la Z-déformation entre le représentant du drapeau $h\eta$ et l'image par h du représentant du drapeau η (voir **[3]**, section 4.2). L'action de H sur $\mathcal{P}$ est proximale (voir **[18]**, **[20]**). Soit $\nu_{\mathcal{P}}$ la mesure μ-stationnaire sur $\mathcal{P}$. Pour β-presque tout b, il existe $\xi_b \in \mathcal{P}$ donné par :

$$\delta_{\xi_b} \ = \ \lim_{n\to\infty} b_0 \cdots b_{n-1} \nu_{\mathcal{P}}.$$

On a : $\xi_{Tb} = b_0^{-1}\xi_b$, et on pose $\theta(b) = \sigma(b_0, \xi_{Tb}) = \left(\sigma(b_0^{-1}, \xi_b)\right)^{-1}, \theta_{\mathbb{R}}(b) = \omega(\theta(b))$. On définit :

$$\theta_n(b) := \theta(b_0 \cdots b_{n-1}, \xi_{T^n b}) = \theta(b) \cdots \theta(T^{n-1}b)$$
$$\theta_{\mathbb{R},n}(b) := \theta_{\mathbb{R}}(b_0 \cdots b_{n-1}, \xi_{T^n b}) = \sum_{k=0}^{n-1} \theta_{\mathbb{R}}(T^k b).$$

Par ergodicité de $(B,\beta;T)$, il existe $\sigma_\mu \in \mathfrak{A}$ tel que, pour presque tout b,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \theta_{\mathbb{R}}(T^k b) \ = \ \sigma_\mu.$$

Soit $\rho : H \to GL(E)$ une représentation irréductible de H et considérons alors la marche aléatoire sur $GL(E)$ de loi $\rho_*\mu$. Il existe un drapeau (peut-être incomplet) de sous-espaces de E, noté χ_0, qui est invariant par l'action de $\rho(P)$ et une application H-équivariante de $\mathcal{P}$ dans l'espace des drapeaux de E qui envoie ξ_0 sur χ_0 de telle manière que, pour β-presque tout b, l'image du drapeau ξ_b est le drapeau χ_b du théorème d'Osseledets appliqué au produit indépendant des $(\rho(\Gamma), \mu)$.

Pour tout $u \in E$, il y a une forme linéaire $\lambda_{b,u}$ sur $\mathfrak{A}$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \|\rho(b_{n-1}^{-1} \cdots b_0^{-1})u\| \;=\; -\lambda_{b,u}(\sigma_\mu).$$

Les $\lambda_{b,u}(\sigma_\mu)$ sont les exposants de Liapounoff de la marche $(GL(E), \rho_*\mu)$ et l'ensemble des $\lambda_{b,u}(\sigma_\mu)$ ne dépend pas de b. Pour presque tout b, le drapeau χ_b est le drapeau des sous-espaces vectoriels E définis par $\{u; \lambda_{b,u}(\sigma_\mu) > t\}$, où t parcourt $\mathbb{R}$. En particulier, si $E = \mathfrak{H}_i$, λ_i est la plus grande valeur de $\lambda_{b,u}(\sigma_\mu)$ pour $u \in \mathfrak{H}_i$, $\mathfrak{W}_{i,b}$ est le premier espace du drapeau $\chi_{i,b}$, $\mathfrak{V}_{i,b}$ est l'espace $\{u; \lambda_{b,u}(\sigma_\mu) > 0\}$ et δ est la plus petite valeur positive des $\lambda_{b,u}(\sigma_\mu), u \in \mathfrak{H}_i, i \in I$. Rappelons que l'on a noté $\mathfrak{V}_b = \oplus_i \mathfrak{V}_{i,b}$ et que $\mathfrak{V}_{Tb} = \mathrm{Ad} b_0^{-1} \mathfrak{V}_b$. Il existe donc un sous-espace $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{H}$ et une application s_b de H, qui dépend mesurablement de b tels que, pour presque tout b,

$$s_b \mathfrak{V} \;=\; \mathfrak{V}_b \;\text{ et } \mathrm{Ad}(b_0^{-1}) \circ (s_b) \;=\; s_{Tb} \circ \theta(b^{-1}). \tag{5}$$

5. MESURES CONDITIONNELLES SUR LES FEUILLES INSTABLES

Les feuilles instables aléatoires sont donc données par une action du groupe $V = \exp(\mathfrak{V})$ sur l'espace X. On veut montrer que la mesure ν_b est invariante par cette action, ou tout au moins par l'action d'un sous-groupe de V. Pour cela, regardons les mesures conditionnelles sur les orbites de cette action. La construction est générale pour une action d'un groupe localement compact R.

Soient $(X, \mathcal{X}, m)$ un espace borélien standard et $(r, x) \mapsto rx$ une action mesurable de R sur X de stabilisateurs discrets. On ne suppose pas, *a priori*, que l'action de R préserve la mesure m ou même la classe de la mesure m. Les orbites de l'action de R forment une lamination mesurable. On dit qu'une partie borélienne Σ est une section discrète à l'action de R si pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{r; r \in R, rx \in \Sigma\}$ est discret et fermé dans R et que $R\Sigma = X$. D'après **[22]**, de telles sections discrètes existent. Pour une section discrète Σ, notons $\overline{m}$ la mesure sur $R \times \Sigma$ définie par :

$$\int f(r,x) d\overline{m}(r,x) := \int_X \Big(\sum_{\{(r,y); ry = x\}} f(r,y) \Big) dm(x).$$

La mesure $\overline{m}$ est σ-finie et en désintégrant par rapport à la projection sur Σ, on trouve, pour m_Σ presque tout $x \in \Sigma$ une mesure $\sigma_\Sigma(x)$ sur R telle que

$$\int f(r,x) d\overline{m}(r,x) = \int_\Sigma \Big(\int_R f(r,x) \sigma_\Sigma(x)(dr) \Big) dm_\Sigma(x),$$

où m_Σ est la projection sur Σ d'une mesure finie équivalente à $\overline{m}$. La mesure $\sigma_\Sigma(x)$ est une mesure de Radon sur R et ne dépend du choix de m_Σ que par une multiplication par une constante. On note $\mathcal{M}_1(R)$ l'espace des mesures de Radon sur R à une constante multiplicative près. On a donc défini une application mesurable de la section Σ dans $\mathcal{M}_1(R)$.

On voit que la mesure $\sigma_\Sigma(x)$ ne dépend que de l'orbite de x. Plus précisément, si x et x' sont deux points de Σ sur la même orbite, $\sigma_\Sigma(x')$ est la recentrée de $\sigma_\Sigma(x)$ autour de x'. Finalement, on a :

Proposition 5.1 ([**1**], Proposition 4.2). — *Considérons une action mesurable de R sur un espace borélien standard $(X, \mathcal{X})$ de stabilisateurs discrets et m une mesure sur $(X, \mathcal{X})$. Il existe une application mesurable σ de X dans $\mathcal{M}_1(R)$ et un ensemble mesurable E de m-mesure pleine tels que, pour toute section discrète Σ à l'action de R, pour m_Σ-presque tout x dans Σ, et pour tout r tel que $rx \in E$, $\sigma_\Sigma(x)$ est le translaté par r de $\sigma(rx)$.*

En particulier si, dans l'ensemble E de la proposition 5.1, on trouve deux points x, x' sur la même R-orbite avec $\sigma(x) = \sigma(x')$, cela signifie que la mesure $\sigma(x)$ est invariante (dans $\mathcal{M}_1(R)$) par la translation r qui envoie x sur x'. L'ensemble des translations qui préservent la mesure $\sigma(x)$ (à une constante près) est un sous-groupe fermé R_x de R. Si la mesure $\sigma(x)$ donne une mesure pleine à R_x, alors elle est nécessairement proportionnelle à $\exp(\zeta_x(r))d\lambda_x(r)$, où λ_x est la mesure de Haar sur R_x et ζ_x un caractère sur R_x. Ceci montre un résultat général de théorie ergodique :

Proposition 5.2. — *Considérons une action mesurable de R sur un espace borélien standard $(X, \mathcal{X})$ de stabilisateurs discrets et m une mesure sur $(X, \mathcal{X})$. Soient E, σ donnés par la proposition 5.1. Supposons qu'il existe un ensemble de mesure pleine $F \subset E$ tel que si x, x' sont deux points de F sur la même R-orbite, $\sigma(x) = \sigma(x')$. Alors, les mesures $\sigma(x)$ sont proportionnelles à $\exp(\zeta_x(r))d\lambda_x(r)$, où λ_x est la mesure de Haar sur R_x et ζ_x un caractère sur R_x.*

Nous avons une famille ν_b de mesures sur X, avec pour chaque b une lamination définie par une action de V. On va montrer que la proposition 5.2 s'applique à β-presque toute mesure ν_b et on va donc obtenir une famille mesurable $(\zeta_{b,x}, R_{b,x})$ telle que pour β-presque tout b, pour ν_b-presque tout x, $\sigma(x)$ est la famille de mesures proportionnelles à $\exp(\zeta_x(r))d\lambda_x(r)$. On a alors les deux propriétés suivantes :

- pour β-presque tout b, pour ν_b-presque tout x, $R_{b,x}$ est un sous-groupe connexe R_1 de R, presque partout le même, $\zeta_{b,x}$ est le caractère nul, et
- pour β-presque tout b, pour ν_b-presque tout x, $R_{b,x}$ n'est pas réduit à $\{\mathrm{Id}\}$.

La première propriété suit des propriétés d'ergodicité et de récurrence de systèmes dynamiques mesurés auxiliaires (voir Section 6). La deuxième propriété est le point clé de la démonstration (voir Section 7). On aura donc bien trouvé un groupe Ad-unipotent R_1, non réduit à l'identité, tel que pour presque tout b, la mesure ν_b est R_1-invariante.

6. DYNAMIQUE MESURÉE ET FLOT HOROCYCLIQUE

On construit dans cette section les systèmes dynamiques mesurés qui dirigent les différentes itérations. On a déjà considéré le produit

$$(B, \mathscr{B}, \beta; T) = (\otimes^{\mathbb{N}}(\Delta_\mu, \mathscr{A}, \mu); T),$$

où $\mathscr{A}$ est la tribu borélienne du compact Δ_μ et T le décalage des coordonnées sur B. Rappelons qu'il représente la suite des choix possibles d'éléments de G dans le passé. La tribu $\mathscr{Q}_n$ engendrée par les coordonnées $b_m, m \geq n$, représente donc les choix possibles dans un passé au-delà de n. Le point de $\mathscr{Q}_n$ contenant la suite b est paramétré par toutes les suites de B de la forme $aT^n b$, c'est-à-dire avec les n premières coordonnées $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ arbitraires et pour coordonnées suivantes celles de b. L'espérance conditionnelle par rapport à $\mathscr{Q}_n$ est donnée, pour une fonction φ $\mathscr{B}$-mesurable, par :

$$E(\varphi|\mathscr{Q}_n)(b) = \int \varphi(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, T^n b) d(\mu^{\otimes n})(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

Par la loi « 0–1 » de Kolmogoroff, la tribu $\mathscr{Q}_\infty := \cap_n \mathscr{Q}_n$ est grossière : tous ses éléments ont mesure 0 ou 1.

Pour représenter l'action de ces éléments de G sur X, on note

$$(B^X, \mathscr{B}^X, \beta^X; T^X) := (B \times X, \mathscr{B} \otimes \mathscr{X}, \beta^X; T^X),$$

avec :

$$\int f(b,x) d\beta^X := \int_B \left(\int f(b,x) d\nu_b(x) \right) d\beta(b), \quad T^X(b,x) := (Tb, b_0^{-1} x).$$

La relation (3) entraîne que la mesure β^X est T^X invariante. Notons $\mathscr{Q}_n^X$ la tribu $(T^X)^{-n} \mathscr{B}^X$. Le point de $\mathscr{Q}_n^X$ contenant le point (b,x) est formé des suites

$$(aT^n b, h_{n,a,b} x)$$

où $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ décrit Δ_μ^n et où on pose $h_{n,a,b} := a_0 a_1 \cdots a_{n-1} b_{n-1}^{-1} \cdots b_0^{-1}$. Un calcul direct donne, pour une fonction φ $\mathscr{B}^X$-mesurable,

$$E(\varphi|\mathscr{Q}_n^X)(b,x) = \int \varphi\big((a_0, \ldots, a_{n-1}, T^n b), h_{n,a,b} x\big) d(\mu^{\otimes n})(a_0, \ldots, a_{n-1}).$$

Pour représenter les changements d'échelle induits par l'action de Z dans la direction instable, on note

$$(B^\theta, \mathcal{B}^\theta, \beta^\theta; T^\theta) := (B \times Z, \mathcal{B} \otimes \mathcal{Z}, \beta \otimes \lambda; T^\theta),$$

où λ est la mesure de Haar sur Z et T^θ est donné par :

$$T^\theta(b, z) := \big(Tb, \theta(b^{-1})z\big).$$

La mesure β^θ est invariante mais elle est infinie, la transformation n'est pas conservative, mais néanmoins la tribu $\mathcal{Q}_\infty^\theta := \cap_n (T^\theta)^{-n}\mathcal{B}^\theta$ peut être décrite en termes de Γ_μ (**[19]**). Pour calculer des conditionnelles par rapport à la tribu $\mathcal{Q}_n^\theta := (T^\theta)^{-n}\mathcal{B}^\theta$, on peut se restreindre à un sous-ensemble borélien $U \subset Z$ avec $0 < \lambda(U) < \infty$. Soit donc

$$(B^U, \mathcal{B}^U, \beta^U) := \Big(B \times U, \mathcal{B} \otimes \mathcal{U}, \frac{1}{\lambda(U)}(\beta \otimes \lambda)_{|B \times U}\Big).$$

On note $\mathcal{Q}_n^U$ la restriction de la tribu $\mathcal{Q}_n^\theta$ à l'ensemble B^U. Soit $c = (b, z) \in U$. Notons $Q_{n,c}^U$ l'ensemble des n-uplets $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ tels que

$$\theta_n(aT^n b)\theta_n(b^{-1})z \in U.$$

Pour β^U-presque tout $c \in B^U$, z est un point de densité de U et b est un point de continuité de θ_n sur un ensemble de mesure positive. Il s'ensuit que $\mu^{\otimes n}(Q_{n,c}^U) > 0$ pour β^U-presque tout $c \in B^U$. Le point de $\mathcal{Q}_n^U$ contenant $c = (b, z)$ est formé des couples

$$\big((a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}), \theta_n(aT^n b)\theta_n(b^{-1})z\big), \quad \text{avec} \quad (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in Q_{n,c}^U.$$

On a alors, pour φ_U une fonction $\mathcal{B}^U$-mesurable sur B^U :

$$E(\varphi_U | \mathcal{Q}_n^U)(c) = \frac{\int_{Q_{n,c}^U} \varphi_U((aT^n b, \theta_n(aT^n b)\theta_n(b^{-1})z))d\mu^{\otimes n}(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})}{\mu^{\otimes n}(Q_{n,c}^U)}.$$

La dernière construction consiste à coupler les deux précédentes. On note donc

$$(B^{\theta,X}, \mathcal{B}^{\theta,X}, \beta^{\theta,X}; T^{\theta,X}) := (B \times Z \times X, \mathcal{B} \otimes \mathcal{Z} \otimes \mathcal{X}, \beta^{\theta,X}; T^{\theta,X}),$$

avec :

$$\begin{aligned} \int f(b, z, x)d\beta^{\theta,X} &:= \int_B \left(\int f(b, z, x)d(\lambda \otimes \nu_b)(z, x)\right) d\beta(b), \\ T^{\theta,X}(b, z, x) &:= (Tb, \theta(b^{-1})z, b_0^{-1}x). \end{aligned}$$

La mesure $\beta^{\theta,X}$ est infinie invariante. On définit encore $\mathcal{Q}_n^{U,X}$ la restriction de la tribu $\mathcal{Q}_n^{\theta,X} = (T^{\theta,X})^{-n}\mathcal{B}^{\theta,X}$ à l'ensemble $B^U \times X$. Pour $(c, x) = (b, z, x) \in B^{\theta,X}$, le point de $\mathcal{Q}_n^{U,X}$ contenant $c = (b, z)$ est formé de

$$\big((a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}), \theta_n(aT^n b)\theta_n(b^{-1})z, h_{n,a,b}x\big) \quad \text{avec} \quad (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in Q_{n,c}^U.$$

Alors, l'espérance conditionnelle par rapport à la tribu $Q_n^{U,X}$ est donnée, pour φ une fonction $(\mathscr{B}^U \otimes \mathscr{X})$-mesurable sur $B^U \times X$, pour presque tout $(c,x) \in B^U \times X$:

$$(6) \qquad E(\varphi | Q_n^{U,X})(c,x) = \frac{\int_{Q_{n,c}^U} \varphi_U((aT^n b, \theta_n(aT^n b)\theta_n(b^{-1})z, h_{n,a,b}x)) d\mu^{\otimes n}(a)}{\mu^{\otimes n}(Q_{n,c}^U)}.$$

Rappelons que Z agit sur $\mathfrak{H}$ essentiellement par des dilatations différentes dans les différentes directions. Une astuce de **[3]** est de reparamétrer l'action de V sur X en fonction de la « hauteur » z. Pour β^θ-presque tout $c = (b,z) \in B^\theta$ et pour tout $x \in X$, on définit le *flot horocyclique* qui est une action Φ de V donnée, si $v \in \mathfrak{V}$, par

$$\Phi_{\exp(v)}(c,x) \ = \ (c, (\exp[(s_b \circ z)v])x).$$

LEMME 6.1. — *Pour tout $v \in \mathfrak{V}$, $\beta^{\theta,X}$-presque tout (c,x),*

$$\Phi_{\exp(v)} T^{\theta,X}(c,x) \ = T^{\theta,X} \Phi_{\exp(v)}(c,x).$$

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned} \Phi_{\exp(v)} T^{\theta,X}(b,z,x) &= (Tb, \theta(b^{-1})z, (\exp[(s_{Tb} \circ \theta(b^{-1}) \circ z)(v)])(b_0^{-1}x)) \\ T^{\theta,X}\Phi_{\exp(v)}(b,z,x) &= (Tb, \theta(b^{-1})z, b_0^{-1}(\exp[(s_b \circ z)(v)])x). \end{aligned}$$

La commutation découle alors de la relation (5). □

Nous avons donc une action du groupe V sur X qui dépend de la hauteur z. Les mesures conditionnelles dans $\mathscr{M}_1(V)$ définies en section 5 dépendent donc aussi de la hauteur. Soit $\sigma(c,x) \in \mathscr{M}_1(V)$ la mesure conditionnelle de la mesure ν_b sur les trajectoires du flot horocyclique à la hauteur z. Il vient du lemme 6.1 que $\sigma(c,x) = \sigma(T^{\theta,X}(c,x))$. En particulier,

PROPOSITION 6.2. — *La fonction $(c,x) \mapsto \sigma(c,x)$ est $Q_\infty^{\theta,X}$-mesurable.*

Supposons que la tribu $Q_\infty^{\theta,X}$ est grossière. La mesure $\sigma(c,x)$ est $\beta^{\theta,X}$-presque-sûrement constante . La proposition 5.2 s'applique et cette mesure constante est de la forme $\rho = e^{\zeta(v)}d\lambda$ où ζ est un caractère sur V et λ une mesure de Haar sur un sous-groupe fermé R de V. Fixons une hauteur z telle que pour β-presque tout b, les mesures conditionnelles de ν_b sur les feuilles instables soient ν_b-presque toutes égales à ρ dans $\mathscr{M}_1(V)$. Quand T^X agit sur B^X, les mesures conditionnelles sont donc invariantes, à une renormalisation près et à une action de Z (par dilatations inhomogènes de plus en plus petites) près. La mesure β^X est finie. Par le théorème de récurrence de Poincaré, la mesure $\rho = e^{\zeta(v)}d\lambda$ est presque invariante par certaines dilatations/renormalisations. Cela impose que $\zeta = 0$ et que λ est la mesure de Haar sur un sous-groupe connexe R de V (**[3]**, paragraphe 8.4). Reste à montrer que ce groupe n'est pas réduit à $\{\mathrm{Id}\}$.

7. L'ARGUMENT DE DÉRIVE

Dans cette section, nous montrons, avec les notations précédentes,

PROPOSITION 7.1 ([**3**], Section 8). — *Si la tribu* $\mathcal{Q}_\infty^{\theta,X}$ *est grossière et si le groupe* R *est réduit à* $\{\mathrm{Id}\}$*, alors la mesure* ν_b *est atomique pour* β*-presque tout* b.

Si ν_b est atomique, la mesure ν est atomique (Proposition 3.2) et donc algébrique. Si ν_b n'est pas atomique, le groupe R n'est pas réduit à $\{\mathrm{Id}\}$ et la discussion précédente montre que ν est algébrique également. Le théorème 1.1 découle donc de cette proposition dans le cas où la tribu $\mathcal{Q}_\infty^{\theta,X}$ est grossière. Grâce à une construction supplémentaire ([**3**], Section 7.2), Benoist et Quint peuvent appliquer un argument analogue dans le cas général.

Idée de la démonstration : Supposons que, pour β-presque tout b, la mesure ν_b n'est pas atomique. On peut aussi supposer que $\nu_b(V_b x) = 0$. En effet, si $\nu_b(V_b x) \neq 0$ et le groupe R est réduit à $\{\mathrm{Id}\}$, alors $\nu_b(\{x\}) > 0$ et la mesure ν_b est atomique. On peut supposer de plus (Proposition 3.3) que les orbites du commutateur L de Γ_μ sont négligeables. Alors, le même argument couplé avec celui de la proposition 3.2 montre que pour β-presque tout b, $\nu_b(LV_b x) = 0$ ([**3**], Proposition 7.8).

Soient U un ouvert relativement compact de Z assez grand et $\varepsilon > 0$ asssez petit. Soit E un ensemble $\mathcal{B}^{\theta,X}$-mesurable de mesure pleine, $T^{\theta,X}$ invariant avec la propriété que si (c,x) et $\Phi_t(c,x)$ appartiennent tous les deux à E, alors $t \in R$. Il existe un ensemble compact $K \subset E \cap (B \times X \times U)$ tel que le flot horocyclique Φ_t dépend continûment de c pour chaque t dans un ensemble borné de V tant que $(c,x) \in K$ et tel que de plus,

$$\beta^{\theta,X}(K) > (1-\varepsilon^2)\beta^{\theta,X}(B \times X \times U).$$

D'après le théorème des martingales, pour $\beta^{\theta,X,U}$-presque tout (c,x),

$$E(1_K | \mathcal{Q}_n^{U,X})(c,x) \to E(1_K | \mathcal{Q}_\infty^{U,X})(c,x) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Il existe donc un ensemble compact $K' \subset K$ tel que

$$\beta^{\theta,X}(K') > (1-\varepsilon)\beta^{\theta,X}(B \times X \times U)$$

et tel que si $(c,x) \in K'$, $E(1_K | \mathcal{Q}_n^{U,X})(c,x)$ converge uniformément vers un nombre $> 1-\varepsilon$. D'après l'équation (6), cela signifie que, si $(c,x) \in K'$, la proportion de $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ dans $(\mathcal{Q}_{n,c}^U)$ avec la propriété que $(aT^n b, \theta_n(aT^n b)\theta_n(b^{-1})z, h_{n,a,b}x)$ appartient à K converge uniformément vers un nombre $> 1-\varepsilon$.

Soit $(c,x) \in K'$. Puisque $\nu_b(LV_b x) = 0$, et que ν_b est non-atomique, on peut trouver des points y_p tels que (c, y_p) appartient à K, y_p est arbitrairement proche de

x et $y_p = \exp(u_p)x$, avec $u_p \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{V}_b$. Le point de $Q_n^{U,X}$ contenant $(c,x) = (b,z,x)$ est formé de

$$\big((a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}), \theta_n(aT^n b)\theta_n(b^{-1})z, h_{n,a,b}x\big)$$

avec $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in Q_{n,c}^U$ et $h_{n,a,b} := a_0 a_1 \cdots a_{n-1} b_{n-1}^{-1} \cdots b_0^{-1}$. D'après notre choix de K', pour tout n assez grand, pour une grande proportion de $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ dans $(Q_{n,c}^U)$, les points $(c'_n, x'_n) := (aT^n b, \theta_n(aT^n b)\theta_n(b^{-1})z, h_{n,a,b}x)$ et $(c'_n, y'_{n,p}) := (aT^n b, \theta_n(aT^n b)\theta_n(b^{-1})z, h_{n,a,b}y_p)$ appartiennent tous les deux à K. Pour montrer que R n'est pas réduit à $\{\mathrm{Id}\}$, il suffit de trouver pour tout p un entier n_p, et une proportion positive de suites $a_0, a_1, \ldots, a_{n_p-1}$ dans $(Q_{n_p,c}^U)$ tels que les points d'accumulation (c', x') et (c', y') de (c'_{n_p}, x'_{n_p}) et $(c'_{n_p}, y'_{n_p,p})$ vérifient $(c', y') = \Phi_t(c', x')$ pour un certain $t \neq 0 \in V$. On a :

$$y'_{n,p} = h_{n,a,b}y_p = h_{n,a,b}\exp(u_p)x = \exp[\mathrm{Ad}(h_{n,a,b})u_p]x'_{n,p}.$$

On veut donc trouver une proportion positive de suites $a_0, a_1, \ldots, a_{n_p-1}$ dans $(Q_{n_p,c}^U)$ tels que les $\mathrm{Ad}(h_{n,a,b})u_p$ s'accumulent vers un élément non nul de $\mathfrak{V}$.

On décompose $u_p = \sum_i u_{p,i}$ avec $u_{p,i} \in \mathfrak{H}_i$ et au moins un $u_{p,i}$ qui n'est pas dans $\mathfrak{V}_{b,i}$. Alors,

$$\mathrm{Ad}(h_{n,a,b})u_p = \sum_i \mathrm{Ad}(h_{n,a,b})u_{p,i} = \sum_i \mathrm{Ad}(a_0 a_1 \cdots a_{n-1})\mathrm{Ad}(b_{n-1}^{-1} \cdots b_0^{-1})u_{p,i}.$$

Si $u_{p,i}$ appartient à $\mathfrak{W}_{i,b}$, alors $e^{\lambda_i(\theta_{\mathbb{R},n}(b))}\|\mathrm{Ad}(b_{n-1}^{-1} \cdots b_0^{-1})u_{p,i}\|$ est borné. Si $u_{p,i}$ n'appartient pas à $\mathfrak{W}_{i,b}$ d'après l'équation (4),

$$\lim_n \frac{1}{n} \ln \|\mathrm{Ad}(b_{n-1}^{-1} \cdots b_0^{-1})u_{p,i}\| > -\lambda_i.$$

Il s'ensuit que $e^{\lambda_i(\theta_{\mathbb{R},n}(b))}\|\mathrm{Ad}(b_{n-1}^{-1} \cdots b_0^{-1})u_{p,i}\|$ tend vers l'infini β-presque sûrement. Comme de plus, pour tout i,

$$\frac{e^{\lambda_i(\theta_{\mathbb{R},n}(b))}\|\mathrm{Ad}(b_{n-1}^{-1} \cdots b_0^{-1})u_{p,i}\|}{e^{\lambda_i(\theta_{\mathbb{R},n-1}(b))}\|\mathrm{Ad}(b_{n-2}^{-1} \cdots b_0^{-1})u_{p,i}\|}$$

est borné entre deux constantes C et C^{-1}, il existe n_p tel que

$$C^{-1} \leq \max_{i \in I} \|e^{\lambda_i(\theta_{\mathbb{R},n_p}(b))}\mathrm{Ad}(b_{n_p-1}^{-1} \cdots b_0^{-1})u_{p,i}\| \leq C.$$

Nous choisissons un tel entier n_p. Soit $v_{p,i}$ le vecteur $\mathrm{Ad}(b_{n_p-1}^{-1} \cdots b_0^{-1})u_{p,i} \in \mathfrak{H}_i$. On sait que pour tout $i \in I$,

$$\|e^{\lambda_i(\theta_{\mathbb{R},n_p}(b))}v_{p,i}\| \leq C$$

et que au moins un des $v_{p,i}$ satisfait

$$C^{-1} \leq \|e^{\lambda_i(\theta_{\mathbb{R},n_p}(b))}v_{p,i}\|.$$

Grâce à plusieurs résultats précis sur les marches aléatoires sur les groupes semi-simples, on voit alors que pour n_p assez grand, pour une grande proportion de suites $(a_0, a_1, \dots, a_{n_p-1})$ dans $(Q^U_{n_p,c})$, le vecteur $v_{p,i}$ n'est pas proche de la direction stable de $\mathrm{Ad}(a_0 a_1 \cdots a_{n_p-1})$ complémentaire de la direction la plus dilatante, si bien que le vecteur $w_{n_p,i} = \mathrm{Ad}(a_0 a_1 \cdots a_{n_p-1}) v_{p,i}$ est proche de $\mathfrak{W}_{i,aT^{n_p}b} \subset \mathfrak{V}_{aT^{n_p}b}$ et de plus $\|w_{n_p,i}\|$ est de l'ordre de $e^{\lambda_i(\theta_{\mathbb{R},n_p}(aT^{n_p}b))}\|v_{p,i}\|$. Puisque $(a_0, a_1, \dots, a_{n_p-1}) \in (Q^U_{n_p,c})$,

$$\lambda_i(\theta_{\mathbb{R},n_p}(aT^{n_p}b)) - \lambda_i(\theta_{\mathbb{R},n_p}(b))$$

est borné et la norme $\|w_{n_p,i}\|$ est comparable à $e^{\lambda_i(\theta_{\mathbb{R},n_p}(b))}\|v_{p,i}\|$. Il existe donc C et au moins un $i \in I$ tels que $C^{-1} \le \|w_{p,i}\| \le C$ et $\|w_{p,j}\| \le C$ pour $j \neq i$.

Pour presque tout b, on peut donc choisir les vecteurs u_p, la suite n_p et, pour chaque p une de ces bonnes valeurs de $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n_p-1})$. Choisissons une sous-suite telle que les points (c'_{n_p}, x'_{n_p}) et (c'_{n_p}, y'_{n_p}) convergent dans K vers des points (b', z', x') et (b', z', y'). D'après le paragraphe précédent, on peut enfin choisir une sous-suite telle que les vecteurs $\mathrm{Ad}(h_{n_p,a,b})u_p$ s'accumulent sur un certain vecteur $v_{b'} \in \mathfrak{V}_{b'}$ de norme non nulle. On a bien obtenu un couple de points (c', x') et (c', y') de $K \subset E$ avec la propriété que $y' = \Phi_t x'$ pour

$$t = (z')^{-1} s_{b'}^{-1} v_{b'} \neq 0 \in \mathfrak{V}.$$

Ceci montre finalement la proposition 7.1 une fois justifiées les estimées du paragraphe précédent. □

Il reste à voir pourquoi, pour une grande proportion de suites $(a_0, \dots, a_{n_p-1})$ dans $(Q^U_{n_p,c})$, le vecteur $v_{p,i}$ n'est pas proche de la direction stable de $\mathrm{Ad}(a_0 a_1 \cdots a_{n_p-1})$ complémentaire de la direction la plus dilatante. Cette propriété suit d'une nouvelle propriété des marches aléatoires sur les groupes de matrices, la *loi des angles* ([**3**], Theorem 4.19).

Soit (E, ρ) une représentation irréductible du groupe H_μ de dimension e, $\chi_0 \in \mathcal{P}(E)$ le drapeau associé à la marche $(\rho(H), \rho_*\mu)$. À chaque élément $b'_0, \dots, b'_{n-1}$ de Γ^n_μ, on associe $\xi^M_{b'_{n-1}\cdots b'_0} \in \mathcal{P}(E)$ qui est l'image de χ_0 par $b'_{n-1} \cdots b'_0$. La loi des angles dit que, quand $n \to \infty$, pour β-presque tout $b \in B$, la loi de $\xi^M_{b'_{n-1}\cdots b'_0}$ pour la probabilité $\beta^U_{n,c}$,

$$\beta^U_{n,c}(A) := \beta(A | Q^U_{n,c})$$

converge vers la mesure μ-stationnaire sur $P(E)$. On a la même propriété pour la marche symétrique de loi $\check{\mu}, \check{\mu}(g) := \mu(g^{-1})$ et le drapeau $\xi^m_{b'_0\cdots b'_{n-1}}$ de $\mathcal{P}(E)$ associé à $(b'_{n-1})^{-1} \cdots (b'_0)^{-1}$: la loi de $\xi^m_{b'_0\cdots b'_{n-1}}$ pour la probabilité $\beta^U_{n,c}$ converge vers la loi $\check{\nu}$ qui est $\check{\mu}$-stationnaire sur $\mathcal{P}(E)$. Cela dit que la $\beta^U_{n,c}$-probabilité qu'un vecteur v appartienne au plus grand sous-espace propre du drapeau $\xi^m_{b'_0\cdots b'_{n-1}}$ tend vers la $\check{\nu}$-probabilité de l'ensemble des drapeaux ξ tels que ce vecteur v appartienne au plus grand sous-espace propre de ξ. Cette probabilité est nulle, et c'est exactement la propriété cherchée pour $v = v_{p,i}$.

Pour montrer la loi des angles, on estime d'abord $\mu^{\otimes n_p}(Q^U_{n_p,c})$, c'est-à-dire la probabilité de l'ensemble des suites $a = (a_0, \dots, a_{n_p-1})$ telles que

$$\theta_{n_p}(aT^{n_p}b)(\theta_{n_p}(b))^{-1}z \in U.$$

Rappelons qu'il existe un élément $\sigma_\mu \in \mathfrak{A}$ tel que, pour β presque tout b,

$$\frac{1}{n}\theta_{\mathbb{R},n}(b) \;\rightarrow\; \sigma_\mu.$$

La *loi du logarithme itéré* pour les produits de matrices donne une forme quadratique Φ sur $\mathfrak{A}$ telle que, pour β-presque tout b,

$$\limsup_n \Phi\left(\frac{\theta_{\mathbb{R},n}(b) - n\sigma_\mu}{\sqrt{2n\ln\ln n}}\right) = 1.$$

Si n_p est tel que $\Phi\left(\frac{\theta_{\mathbb{R},n_p}(b)-n_p\sigma_\mu}{\sqrt{2n_p\ln\ln n_p}}\right) \leq 1$, $Q^U_{n_p,c}$ est l'ensemble des $(a_0, \dots, a_{n_p-1})$ tels que $\theta_{\mathbb{R},n_p}(aT^{n_p}b)$ appartienne à un ouvert borné autour de $n_p\sigma_\mu + \tau$ avec $\Phi(\tau) \leq 2n_p \ln\ln n_p$. Un *théorème de la limite locale* nous dit que pour presque tout b, n assez grand, cet ensemble a une probabilité de l'ordre de $Cn^{-\ell}e^{-\Phi(\tau)/2n}\lambda(U)$ où ℓ est un demi-entier.

Ensuite, Benoist et Quint utilisent le théorème de la limite locale et deux autres propriétés des marches aléatoires sur les groupes de matrices : un théorème de *grandes déviations* et la régularité Hölder des mesures stationnaires sur $\mathscr{P}(E)$. L'idée est que la mesure stationnaire est déjà bien approchée par les $(\ln n)^2$ premières (ou dernières) itérations et qu'il en reste $n - (\ln n)^2$ pour ajuster $\theta_{n_p}(aT^{n_p}b)(\theta_{n_p}(b))^{-1}z$ dans U. La forme précise du théorème de la limite locale assure le résultat car il va s'agir finalement de comparer

$$\frac{\exp\left(-\frac{\Phi(\tau)}{2n}\right)}{n^\ell}\lambda(U) \quad \text{et} \quad \frac{\exp\left(-\frac{\Phi(\tau+\omega_n)}{2(n-(\ln n)^2)}\right)}{(n-(\ln n)^2)^\ell}\lambda(U)$$

où $\tau \leq \sqrt{n\ln\ln n}$ et $\omega_n = O((\ln n)^2)$.

Les propriétés des marches aléatoires sur les groupes semi-simples qui ont été utilisées dans ces dernières démonstrations : théorème central de la limite, théorème de la limite locale, loi du logarithme itéré, grandes déviations et régularité de la mesure stationnaire sont classiques et dues à Émile Le Page ([**24**]) dans le cas d'une marche proximale sur $SL(n,\mathbb{R})$. L'exposition de référence est celle du livre de Bougerol-Lacroix [**6**]. Yves Benoist et Jean-François Quint ont besoin d'extensions de ces résultats qui font l'objet d'un autre article ([**4**]).

Remerciements

Je remercie Yves Benoist et Jean-François Quint pour leur aide précieuse.

RÉFÉRENCES

[1] Y. Benoist & J.-F. Quint – Mesures stationnaires et fermés invariants des espaces homogènes, *Ann. of Math.* **174** (2011), n° 2, p. 1111–1162.

[2] Y. Benoist & J.-F. Quint – Random walks on finite volume homogeneous spaces, *Invent. Math.* **187** (2012), n° 1, p. 37–59.

[3] Y. Benoist & J.-F. Quint – Stationary measures and invariant subsets of homogeneous spaces (II), *J. Amer. Math. Soc.* **26** (2013), n° 3, p. 659–734.

[4] ______, Random walks on semi-simple groups, prépublication.

[5] ______, Stationary measures and invariant subsets of homogeneous spaces (III), prépublication `http://www.math.univ-paris13.fr/~quint/publications/stationaryIII.pdf`, à paraître dans *Annals of Math.*

[6] P. Bougerol & J. Lacroix – *Products of random matrices with applications to Schrödinger operators*, Progress in Probability and Statistics, vol. 8, Birkhäuser, 1985.

[7] J. Bourgain, A. Furman, E. Lindenstrauss & S. Mozes – Stationary measures and equidistribution for orbits of nonabelian semigroups on the torus, *J. Amer. Math. Soc.* **24** (2011), n° 1, p. 231–280.

[8] E. Breuillard – Local limit theorems and equidistribution of random walks on the Heisenberg group, *Geom. Funct. Anal.* **15** (2005), n° 1, p. 35–82.

[9] ______, Équidistribution des orbites toriques sur les espaces homogènes (d'après M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, Ph. Michel, A. Venkatesh), Séminaire Bourbaki, vol. 2008/09, exposé n° 1008, *Astérisque* **332** (2010), p. 305–339.

[10] L. Clozel, H. Oh & E. Ullmo – Hecke operators and equidistribution of Hecke points, *Invent. Math.* **144** (2001), n° 2, p. 327–351.

[11] A. Eskin & G. Margulis – Recurrence properties of random walks on finite volume homogeneous manifolds, in *Random walks and geometry*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, p. 431–444.

[12] A. Eskin, G. Margulis & S. Mozes – Upper bounds and asymptotics in a quantitative version of the Oppenheim conjecture, *Ann. of Math.* **147** (1998), n° 1, p. 93–141.

[13] A. Eskin & H. Oh – Ergodic theoretic proof of equidistribution of Hecke points, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **26** (2006), n° 1, p. 163–167.

[14] H. Furstenberg – Noncommuting random products, *Trans. Amer. Math. Soc.* **108** (1963), p. 377–428.

[15] H. Furstenberg – Stiffness of group actions, in *Lie groups and ergodic theory (Mumbai, 1996)*, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., vol. 14, Tata Inst. Fund. Res., 1998, p. 105–117.

[16] H. Furstenberg & H. Kesten – Products of random matrices, *Ann. Math. Statist.* **31** (1960), p. 457–469.

[17] É. Ghys – Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes, Séminaire Bourbaki, vol. 1991/92, exposé n° 747, *Astérisque* **206** (1992), p. 93–136.

[18] I. Y. Gol′dsheid & G. Margulis – Lyapunov exponents of a product of random matrices, *Uspekhi Mat. Nauk* **44** (1989), n° 5(269), p. 13–60.

[19] Y. Guivarc'h – Propriétés ergodiques, en mesure infinie, de certains systèmes dynamiques fibrés, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **9** (1989), n° 3, p. 433–453.

[20] Y. Guivarc'h & A. Raugi – Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **69** (1985), n° 2, p. 187–242.

[21] Y. Guivarc'h & A. N. Starkov – Orbits of linear group actions, random walks on homogeneous spaces and toral automorphisms, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **24** (2004), n° 3, p. 767–802.

[22] A. S. Kechris – Countable sections for locally compact group actions, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **12** (1992), n° 2, p. 283–295.

[23] Y. Le Jan – Équilibre statistique pour les produits de difféomorphismes aléatoires indépendants, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **23** (1987), n° 1, p. 111–120.

[24] É. Le Page – Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires, in *Probability measures on groups (Oberwolfach, 1981)*, Lecture Notes in Math., vol. 928, Springer, 1982, p. 258–303.

[25] E. Lindenstrauss – Rigidity of multiparameter actions, *Israel J. Math.* **149** (2005), p. 199–226.

[26] G. Margulis – *Discrete subgroups of semi-simple Lie groups*, Springer, 1991.

[27] R. Muchnik – Semigroup actions on $\mathbb{T}^n$, *Geom. Dedicata* **110** (2005), p. 1–47.

[28] V. I. Oseledec – A multiplicative ergodic theorem. Characteristic Ljapunov, exponents of dynamical systems, *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* **19** (1968), p. 179–210.

[29] M. Ratner – On Raghunathan's measure conjecture, *Ann. of Math.* **134** (1991), n° 3, p. 545–607.

[30] L.-S. Young – Stochastic stability of hyperbolic attractors, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **6** (1986), n° 2, p. 311–319.

François LEDRAPPIER

Université Pierre et Marie Curie - Paris 6
L.P.M.A.
Équipe de Théorie ergodique et Systèmes dynamiques
UMR 7599 du CNRS
Boîte courrier 188
F–75252 Paris Cedex 05

et

Department of Mathematics
University of Notre Dame
Notre Dame, IN 46556, USA
E-mail : `ledrappier.1@nd.edu`