Astérisque

MICHEL BRION

Restriction de représentations et projections d'orbites coadjointes [d'après Belkale, Kumar et Ressayre]

Astérisque, tome 352 (2013), Séminaire Bourbaki, exp. n° 1043, p. 1-33

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2013__352__1_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 2011
64e année, 2011-2012, n° 1043, p. 1 à 33

RESTRICTION DE REPRÉSENTATIONS ET PROJECTIONS D'ORBITES COADJOINTES [d'après Belkale, Kumar et Ressayre]

par Michel BRION

1. LE PROBLÈME DE LA RESTRICTION POUR LES GROUPES DE LIE COMPACTS CONNEXES

1.1. Introduction

Soient K un groupe de Lie compact connexe et L un sous-groupe fermé connexe. Le problème considéré dans cet exposé est de *déterminer les représentations irréductibles (continues, complexes) de L qui apparaissent dans la restriction d'une représentation irréductible de K.*

En théorie, ce problème a une solution complète : rappelons que les représentations irréductibles de K sont paramétrées par les poids dominants. Notons Λ_K^+ l'ensemble de ces poids, et $V_K(\lambda)$ le K-module simple de plus haut poids $\lambda \in \Lambda_K^+$. Définissons de même Λ_L^+ et $V_L(\mu)$; on a alors un isomorphisme de L-modules

$$\operatorname{Res}_L^K V_K(\lambda) \cong \bigoplus_{\mu \in \Lambda_L^+} m(\mu, \lambda)\, V_L(\mu)$$

où les multiplicités $m(\mu, \lambda)$ sont des entiers naturels uniquement déterminés. En notant $\chi_K(\lambda)$ le caractère de $V_K(\lambda)$ et $\chi_L(\mu)$ celui de $V_L(\mu)$, on obtient

$$m(\mu, \lambda) = \dim \operatorname{Hom}^L(V_L(\mu), \operatorname{Res}_L^K V_K(\lambda)) = \int_L \chi_K(\lambda)\, \overline{\chi_L(\mu)}\, dl$$

où dl désigne la mesure de Haar de L, normalisée de sorte que $\int_L dl = 1$. Grâce aux formules des caractères et d'intégration de Weyl, on peut donc exprimer la fonction $(\mu, \lambda) \mapsto m(\mu, \lambda)$ en termes de données combinatoires associées à K et L. Cependant, la formule ainsi obtenue ([**14**, Lem. 3.1]) ne permet que rarement de caractériser les couples (λ, μ) tels que $m(\mu, \lambda) \neq 0$, comme l'illustrent les exemples suivants.

Exemple 1.1. — Prenons pour L un tore maximal T de K. Soit Λ le groupe des caractères de T ; alors $\Lambda^+ := \Lambda^+_K$ est l'intersection du groupe des poids $\Lambda = \Lambda^+_T$ et de la chambre positive C dans l'espace vectoriel réel $\Lambda_{\mathbb{R}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. De plus, $m(\mu, \lambda)$ est la multiplicité du poids μ dans $V_K(\lambda) =: V(\lambda)$.

La formule des caractères de Weyl se réécrit sous la forme

$$m(\mu, \lambda) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, \mathfrak{P}(w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho))$$

où on note W le groupe de Weyl, $\varepsilon : W \to \{\pm 1\}$ le déterminant (pour la représentation de W dans $\Lambda_{\mathbb{R}}$), ρ la demi-somme des racines positives, et $\mathfrak{P}$ la fonction de partitions en racines positives ([**9**, Ch. VIII, §9, Prop. 1]). Ceci exprime $m(\mu, \lambda)$ comme une somme alternée d'entiers positifs, en général très grands.

Cependant, l'ensemble des poids de $V(\lambda)$ admet une description directe très simple : c'est l'intersection du translaté $\lambda + \Lambda_R$ où Λ_R désigne le sous-groupe de Λ engendré par les racines, et de l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(W\lambda)$ de l'orbite de λ par W ([**9**, Ch. VIII, §7, Prop. 5 et Exer. 1]).

Lorsque K est semi-simple, le polytope $\mathrm{Conv}(W\lambda)$ est formé des $\mu \in \Lambda_{\mathbb{R}}$ qui sont solutions du système d'inéquations linéaires

$$(\mu, w\varpi_i) - (\lambda, \varpi_i) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, r,\ w \in W/W_i)$$

où $\varpi_1, \dots, \varpi_r$ désignent les poids fondamentaux, W_i le groupe d'isotropie de ϖ_i dans W, et $(-,-)$ la forme bilinéaire symétrique sur $\Lambda_{\mathbb{R}}$ provenant de la forme de Killing. Si de plus la représentation de K dans $V(\lambda)$ a un noyau fini, ces inéquations forment un système minimal : elles sont deux à deux non équivalentes, et chacune définit une face de codimension 1 de $\mathrm{Conv}(W\lambda)$.

Exemple 1.2. — Considérons l'inclusion diagonale de K dans $K \times K$. Avec les notations de l'exemple précédent, les $K \times K$-modules simples ne sont autres que les produits tensoriels $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ où $\lambda, \mu \in \Lambda^+$. Les multiplicités $m(\nu, \lambda, \mu)$ sont classiquement notées $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ et appelées *coefficients de Littlewood-Richardson*; on a donc un isomorphisme de K-modules

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) \cong \bigoplus_{\nu \in \Lambda^+} c^{\nu}_{\lambda,\mu} V(\nu).$$

On déduit de la formule des caractères de Weyl l'identité

$$c^{\nu}_{\lambda,\mu} = \sum_{(w,w') \in W \times W} \varepsilon(ww')\, \mathfrak{P}(w(\lambda + \rho) + w'(\mu + \rho) - (\nu + 2\rho))$$

([**9**, Ch. VIII, §9, Prop. 2]) où le membre de droite est encore une somme alternée d'entiers positifs. Par ailleurs, les $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ se déterminent de façon combinatoire, par la règle de Littlewood-Richardson lorsque K est le groupe unitaire U_n ([**27**, I.9]), et par le « modèle des chemins » pour K arbitraire ([**26**]).

En notant ν^* le plus haut poids du G-module simple dual $V(\nu)^*$, on obtient

$$c_{\lambda,\mu}^{\nu^*} = \dim(V(\lambda) \otimes V(\mu) \otimes V(\nu))^G.$$

En particulier, $c_{\lambda,\mu}^{\nu^*}$ est symétrique en λ, μ et ν. Posons

$$\mathrm{LR}(K) := \{(\lambda, \mu, \nu) \in (\Lambda^+)^3 \mid c_{\lambda,\mu}^{\nu^*} \neq 0\}.$$

On verra en 2.1 que $\mathrm{LR}(K)$ est un sous-monoïde de type fini de $(\Lambda^+)^3$, et en 2.2 que le sous-groupe de Λ^3 engendré par $\mathrm{LR}(K)$ est formé des (λ, μ, ν) tels que $\lambda+\mu+\nu \in \Lambda_R$.

Lorsque $K = \mathrm{U}_n$, on pose $\mathrm{LR}(K) := \mathrm{LR}_n$; on identifie les poids dominants aux suites décroissantes $(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n)$ formées d'entiers relatifs. Une description récursive de LR_n est obtenue par la combinaison de travaux de Klyachko ([**21**]) et de Knutson et Tao ([**23**]) : $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathrm{LR}_n$ si et seulement si on a l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j + \sum_{k=1}^{n} \nu_k = 0$$

et les inégalités

$$\sum_{a\in A} \lambda_a + \sum_{b\in B} \mu_b + \sum_{c\in C} \nu_c \leq 0$$

pour tous les sous-ensembles A, B, C de $\{1, \ldots, n\}$ qui ont le même nombre r d'éléments (où $r = 1, \ldots, n-1$) et qui satisfont

$$(\lambda(A), \lambda(B), \lambda(C) - (n-r)^r) \in \mathrm{LR}_r$$

où $\lambda(A) := (n-r+1-a_1, \ldots, n-a_r)$ lorsque $A = (a_1 < \cdots < a_r)$, et où on pose $(n-r)^r := (n-r, \ldots, n-r)$. Knutson, Tao et Woodward ont montré que les inéquations pour lesquelles $c_{\lambda(A),\lambda(B)}^{(c_r - r, \ldots, c_1 - 1)} = 1$ forment un système minimal ([**24**, Sec. 6]).

Pour un groupe K arbitraire, le « monoïde de Littlewood-Richardson » $\mathrm{LR}(K)$ est en général inconnu. Mais le cône qu'il engendre est convexe, polyédral et rationnel, et on sait le décrire par des inéquations ; le résultat le plus fin est dû à Belkale et Kumar ([**4**]) après de nombreux travaux antérieurs. La mystérieuse condition sur les triplets d'indices (A, B, C) s'interprète et se généralise en termes de calcul de Schubert.

Plus généralement, le monoïde associé de façon analogue au problème de la restriction est de type fini ; les inéquations minimales du cône qu'il engendre ont été obtenues par Ressayre dans l'article [**32**]. Après quelques préliminaires de théorie géométrique des invariants, on exposera une partie de cet article, pour aboutir à la description du « cône de la restriction » (théorème 4.9) et, en particulier, du « cône de Littlewood-Richardson » (théorèmes 4.10 et 4.11). On terminera par une brève présentation des résultats de [**4**], ainsi que de travaux ultérieurs et de questions ouvertes.

1.2. Projection d'orbites coadjointes

Un lien entre restriction de représentations et projection d'orbites coadjointes a été découvert par Heckman ([**14**]), puis généralisé par Guillemin et Sternberg ([**13**]) dans le cadre de la géométrie hamiltonienne. Pour présenter ce lien, introduisons quelques notations.

Le groupe K opère dans son algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ par la représentation adjointe ; on note $\mathfrak{k}^*$ l'espace de la représentation duale, appelée *coadjointe.* On définit de même $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}^*$. L'inclusion de $\mathfrak{l}$ dans $\mathfrak{k}$ se transpose en la projection

$$p : \mathfrak{k}^* \to \mathfrak{l}^*$$

qui est équivariante relativement à L. Soient T_K un tore maximal de K, et $\mathfrak{t}_K$ son algèbre de Lie ; alors le groupe Λ_K des caractères de T s'identifie à un réseau de l'espace vectoriel réel $\mathfrak{t}_K^*$, et ce dernier, au sous-espace de $\mathfrak{k}^*$ formé des points fixes de T. On identifie ainsi la chambre $C_K \subset \mathfrak{t}_K^*$ à un domaine fondamental pour l'action de K dans $\mathfrak{k}^*$; on a de même la chambre $C_L \subset \mathfrak{t}_L^* \subset \mathfrak{l}^*$.

THÉORÈME 1.3. — *Soient $\lambda \in C_K$ et $\mathcal{O} = K\lambda$ son orbite dans $\mathfrak{k}^*$. La projection $p(\mathcal{O})$ rencontre C_L suivant un polytope convexe, rationnel si λ l'est. Sous cette hypothèse, les points rationnels de ce polytope ne sont autres que les $\mu \in C_L$ tels qu'il existe un entier $n \geq 1$ qui satisfait aux conditions suivantes : $n\lambda \in \Lambda_K^+$, $n\mu \in \Lambda_L^+$ et $m(n\mu, n\lambda) \neq 0$.*

Preuve (esquisse). — La variété différentielle compacte $\mathcal{O}$ est munie d'une structure symplectique invariante par K, pour laquelle l'inclusion dans $\mathfrak{k}^*$ est l'application moment ; la projection $p : \mathcal{O} \to \mathfrak{l}^*$ est donc l'application moment pour l'action de L. La première assertion résulte alors d'un théorème général de convexité ([**19**, Th. 2.1]). Les autres assertions seront démontrées à la suite du lemme 3.1.

Exemple 1.1 (suite) — Pour la projection $p : \mathfrak{k}^* \to \mathfrak{t}^*$, le théorème 1.3 entraîne que l'image de l'orbite $K\lambda$ est l'enveloppe convexe des $w\lambda$ où $w \in W$. Ce résultat est dû à Kostant ([**25**, Th. 4.1]) par une méthode différente.

Lorsque $K = \mathrm{U}_n$, le K-module $\mathfrak{k}^*$ s'identifie à l'espace H_n des matrices hermitiennes de taille n, dans lequel U_n opère par conjugaison ; la chambre C est l'ensemble des matrices diagonales à coefficients réels décroissants, c'est-à-dire des spectres (ordonnés) des matrices hermitiennes. Les orbites coadjointes sont formées des matrices hermitiennes ayant un spectre donné, et la projection p associe à chaque matrice la suite de ses coefficients diagonaux. On retrouve ainsi un résultat de Schur et Horn : *les suites des coefficients diagonaux des conjugués d'une matrice hermitienne A forment un polytope convexe dont les sommets sont le spectre de A et ses images par les permutations.*

Exemple 1.2 (suite) — La projection $\mathfrak{k}^* \times \mathfrak{k}^* \to \mathfrak{k}^*$ est donnée par la somme ; ainsi, la somme de deux orbites coadjointes rencontre chaque chambre suivant un polytope convexe. Lorsque $K = \mathrm{U}_n$, on obtient que *les spectres des sommes de deux matrices hermitiennes ayant des spectres donnés forment un polytope convexe.* La description de ce polytope en termes d'inéquations linéaires fait l'objet d'une conjecture de Horn ([**15**]), résolue par Klyachko et Knutson-Tao. Comme précédemment, on peut la reformuler sous une forme symétrique : *les spectres de trois matrices hermitiennes de taille n et de somme nulle ne sont autres que les solutions réelles du système récursif d'inéquations de l'exemple 1.2.*

2. MONOÏDE, CÔNE ET GROUPE DE LA RESTRICTION

2.1. Un résultat de finitude

Soit $K^{\mathbb{C}}$ le complexifié de K ; c'est un groupe algébrique complexe, réductif et connexe. Toute représentation (continue, complexe, de dimension finie) de K s'étend en une unique représentation (rationnelle, de dimension finie) de $K^{\mathbb{C}}$; ainsi, K et $K^{\mathbb{C}}$ ont les mêmes représentations irréductibles. On peut donc reformuler le problème de la restriction en termes des groupes réductifs connexes $L^{\mathbb{C}} \subset K^{\mathbb{C}}$; on va appliquer des méthodes classiques de théorie des invariants pour obtenir un résultat qualitatif de finitude.

Il s'avérera commode de noter G le « petit » groupe $L^{\mathbb{C}}$, et $\widehat{G}$ le « grand » groupe $K^{\mathbb{C}}$. Choisissons un sous-groupe de Borel B de G, puis un sous-groupe de Borel $\widehat{B}$ de $\widehat{G}$ qui contient B, si bien que $B = \widehat{B} \cap G$. Soient T un tore maximal de B, et $\widehat{T}$ un tore maximal de $\widehat{B}$ qui contient T ; alors $T = \widehat{T} \cap G$. On a $B = TU$ et $\widehat{B} = \widehat{T}\widehat{U}$ où U (resp. $\widehat{U}$) désigne la partie unipotente de B (resp. $\widehat{B}$) ; de plus, $U = \widehat{U} \cap G$. Soient $\Lambda = X^*(T)$ le groupe des caractères de T (qu'on notera additivement), W le groupe de Weyl, et R le système des racines de (G, T) ; soient aussi R^+ le sous-ensemble de racines positives formé des racines de (B, T), et Λ^+ l'ensemble des poids dominants associé à R^+. On a $\Lambda^+ = \Lambda \cap C$ où C désigne la chambre de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ associée à R^+. Rappelons que C est un cône convexe polyédral, rationnel relativement au réseau Λ. De plus, Λ^+ est un sous-monoïde de type fini de Λ ; autrement dit, il existe $\nu_1, \ldots, \nu_m \in \Lambda^+$ tels que

$$\Lambda^+ = \{n_1\nu_1 + \cdots + n_m\nu_m \mid n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}\}.$$

Lorsque G est semi-simple et simplement connexe, on peut prendre pour $\nu_1, \ldots, \nu_m$ les poids fondamentaux.

Définissons de même $\widehat{\Lambda}$, $\widehat{W}$, $\widehat{\Lambda}^+$ et $\widehat{C}$; posons

$$\Lambda^+(G, \widehat{G}) := \{(\nu, \widehat{\nu}) \in \Lambda^+ \times \widehat{\Lambda}^+ \mid m(\nu, \widehat{\nu}) \neq 0\}.$$

THÉORÈME 2.1. — *$\Lambda^+(G,\widehat{G})$ est un sous-monoïde de type fini de $\Lambda^+ \times \widehat{\Lambda}^+$.*

Preuve. — Observons que $m(\nu,\widehat{\nu})$ est la dimension du sous-espace vectoriel $V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu})^U_\nu$ de $V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu})$, formé des invariants de U qui sont vecteurs propres de T de poids ν. On va interpréter ce sous-espace en termes de l'algèbre des fonctions régulières sur $\widehat{G}$, notée $\mathbb{C}[\widehat{G}]$. Cette algèbre est un $\widehat{G}\times\widehat{G}$-module pour l'action induite par celle de $\widehat{G}\times\widehat{G}$ sur $\widehat{G}$ par multiplication à gauche et à droite, et on a un isomorphisme de $\widehat{G}\times\widehat{G}$-modules

$$\mathbb{C}[\widehat{G}] \cong \bigoplus_{\widehat{\nu}\in\widehat{\Lambda}^+} V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu}) \otimes V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu})^*.$$

Soient $\widehat{B}^-$ le sous-groupe de Borel de $\widehat{G}$ tel que $\widehat{B}^- \cap \widehat{B} = \widehat{T}$, et $\widehat{U}^-$ sa partie unipotente ; alors $\widehat{B}^- = \widehat{T}\widehat{U}^-$, et le $\widehat{T}$-module $(V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu})^*)^{\widehat{U}^-}$ est une droite de poids $-\widehat{\nu}$. Puisqu'on a un isomorphisme de $T\times\widehat{T}$-modules

$$\mathbb{C}[\widehat{G}]^{U\times\widehat{U}^-} \cong \bigoplus_{\widehat{\nu}\in\widehat{\Lambda}^+} V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu})^U \otimes (V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu})^*)^{\widehat{U}^-},$$

on obtient (avec des notations évidentes)

$$m(\nu,\widehat{\nu}) = \dim V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu})^U_\nu = \dim \mathbb{C}[\widehat{G}]^{U\times\widehat{U}^-}_{\nu,-\widehat{\nu}}.$$

Comme $\mathbb{C}[\widehat{G}]^{U\times\widehat{U}^-}$ est une sous-algèbre de l'algèbre intègre $\mathbb{C}[\widehat{G}]$, il en résulte que $\Lambda^+(G,\widehat{G})$ est un sous-monoïde de $\Lambda^+\times\widehat{\Lambda}^+$. Pour montrer que ce monoïde est de type fini, il suffit de vérifier que l'algèbre $\mathbb{C}[\widehat{G}]^{U\times\widehat{U}^-}$ est de type fini. Mais c'est le cas pour l'algèbre

$$\mathbb{C}[\widehat{G}]^{\widehat{U}^-} \cong \bigoplus_{\widehat{\nu}\in\widehat{\Lambda}^+} V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu}).$$

(En effet, cette décomposition est une graduation, qui correspond à l'action de $\widehat{T}$. Choisissons des générateurs $\widehat{\nu}_1,\ldots,\widehat{\nu}_m$ du monoïde $\widehat{\Lambda}^+$; alors on vérifie aussitôt que les $\widehat{G}$-modules simples $V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu}_1),\ldots,V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu}_m)$ engendrent l'algèbre $\mathbb{C}[\widehat{G}]^{\widehat{U}^-}$). De même, l'algèbre $\mathbb{C}[G]^U$ est de type fini. D'après un théorème de Hilbert et Nagata, l'algèbre des invariants $(\mathbb{C}[G]^U\otimes\mathbb{C}[\widehat{G}]^{\widehat{U}^-})^G$ est aussi de type fini, où G opère diagonalement dans $\mathbb{C}[G]^U\otimes\mathbb{C}[\widehat{G}]^{\widehat{U}^-}$. On conclut grâce à l'isomorphisme d'algèbres

$$(\mathbb{C}[G]^U\otimes\mathbb{C}[\widehat{G}]^{\widehat{U}^-})^G \cong \mathbb{C}[\widehat{G}]^{U\times\widehat{U}^-}$$

donné par $\sum_i \varphi_i\otimes\psi_i \mapsto \sum_i \varphi_i(e)\,\psi_i$, l'isomorphisme réciproque provenant de la « co-action » $\mathbb{C}[\widehat{G}] \to \mathbb{C}[G]\otimes\mathbb{C}[\widehat{G}] \cong \mathbb{C}[G\times\widehat{G}]$, $f\mapsto ((g,\widehat{g})\mapsto f(g\,\widehat{g}))$.

2.2. Le groupe de la restriction

DÉFINITION 2.2. — *Avec les notations de 2.1, on dit que* $\Lambda^+(G,\widehat{G})$ *est le* monoïde de la restriction*; on définit aussi le* groupe de la restriction $\Lambda(G,\widehat{G})$ *comme le sous-groupe de* $\Lambda \times \widehat{\Lambda}$ *engendré par* $\Lambda^+(G,\widehat{G})$*, et de même le* cône de la restriction $C(G,\widehat{G}) \subset C \times \widehat{C}$.

D'après le théorème 2.1, le cône $C(G,\widehat{G})$ est convexe, polyédral et rationnel ; on peut donc le décrire par un système d'inéquations linéaires, rationnelles et en nombre fini. Lorsque $C(G,\widehat{G})$ est d'intérieur non vide dans $\Lambda_{\mathbb{R}} \times \widehat{\Lambda}_{\mathbb{R}}$, un tel système est unique (à multiplication près de chaque inéquation par un rationnel strictement positif) s'il est minimal.

On a visiblement

$$\Lambda^+(G,\widehat{G}) \subset \Lambda(G,\widehat{G}) \cap C(G,\widehat{G})$$

et on dit que $\Lambda^+(G,\widehat{G})$ est *saturé* lorsque cette inclusion est une égalité ; en d'autres termes, si $(\nu,\widehat{\nu}) \in \Lambda(G,\widehat{G})$ et $m(n\nu,n\widehat{\nu}) \neq 0$ pour un entier $n \geq 1$, alors $m(\nu,\widehat{\nu}) \neq 0$.

Le groupe $\Lambda(G,\widehat{G})$ est décrit par le résultat suivant dû à Ressayre (non publié) :

PROPOSITION 2.3. — *Soit* $H := \bigcap_{\widehat{g}\in\widehat{G}} \widehat{g}G\widehat{g}^{-1}$ *le plus grand sous-groupe distingué de* $\widehat{G}$ *contenu dans* G*. Alors*

$$\Lambda(G,\widehat{G}) = \{(\nu,\widehat{\nu}) \in \Lambda \times \widehat{\Lambda} \mid \nu(t) = \widehat{\nu}(t) \textit{ pour tout } t \in T \cap H\}.$$

Preuve. — Il suffit de montrer que

$$\{(t,\widehat{t}) \in T \times \widehat{T} \mid \nu(t) = \widehat{\nu}(\widehat{t}) \text{ pour tout } (\nu,\widehat{\nu}) \in \Lambda(G,\widehat{G})\} = \{(t,t) \mid t \in T \cap H\}.$$

Soit I le groupe de gauche ; d'après la preuve du théorème 2.1, c'est aussi le noyau de l'action de $T \times \widehat{T}$ dans l'algèbre $\mathbb{C}[\widehat{G}]^{U\times\widehat{U}^-}$. C'est donc aussi le noyau de l'action de $T \times \widehat{T}$ dans le corps des fractions de cette algèbre, qui n'est autre que le corps des invariants $\mathbb{C}(\widehat{G})^{U\times\widehat{U}^-}$, où $\mathbb{C}(\widehat{G})$ désigne le corps des fonctions rationnelles sur $\widehat{G}$. Mais d'après la décomposition de Bruhat, l'application $\widehat{U} \times \widehat{T} \times \widehat{U}^- \to \widehat{G}$ (donnée par le produit dans $\widehat{G}$) est une immersion ouverte, d'où des isomorphismes de corps

$$\mathbb{C}(\widehat{G})^{U\times\widehat{U}^-} \cong \mathbb{C}(\widehat{U} \times \widehat{T})^U \cong \mathbb{C}(\widehat{U}/U \times \widehat{T}).$$

Par suite, I est le noyau de l'action induite de $T \times \widehat{T}$ dans $\widehat{U}/U \times \widehat{T}$, donnée par $(t,\widehat{t}) \cdot (\widehat{u}U,\widehat{x}) = (t\widehat{u}t^{-1}U, t\widehat{x}\widehat{t}^{-1})$. On a donc $I = \{(t,t) \mid t \in J\}$ où J désigne le noyau de l'action de T dans $\widehat{U}/U$ provenant de l'action dans $\widehat{U}$ par conjugaison.

Le point de base de l'espace homogène $\widehat{U}/U$ est fixé par l'action de T, et l'espace tangent en ce point est le quotient des algèbres de Lie, $\widehat{\mathfrak{u}}/\mathfrak{u}$. D'après le lemme 2.4

ci-après, J est le noyau de l'action de T dans $\widehat{\mathfrak{u}}/\mathfrak{u}$, et donc dans le quotient analogue $\widehat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ en raison de l'isomorphisme de T-modules

$$\widehat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g} \cong (\widehat{\mathfrak{u}}/\mathfrak{u}) \oplus (\widehat{\mathfrak{t}}/\mathfrak{t}) \oplus (\widehat{\mathfrak{u}}/\mathfrak{u})^*.$$

En appliquant une nouvelle fois le lemme 2.4, on voit que J est le noyau de l'action de T dans $\widehat{G}/G$ provenant de son action dans $\widehat{G}$ par conjugaison, c'est-à-dire, $J = T \cap H$.

LEMME 2.4. — *Soit X une variété algébrique dans laquelle opère un groupe réductif G avec un point fixe x. Alors les actions de G dans X et dans l'espace tangent de Zariski T_xX ont le même noyau.*

Preuve. — Il suffit de montrer que si $g \in G$ fixe T_xX (point par point), alors il fixe l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. Notons $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de cet anneau ; alors g fixe $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = (T_xX)^*$, donc aussi chaque puissance symétrique $S^n(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)$ et chaque quotient $\mathfrak{m}_x^n/\mathfrak{m}_x^{n+1}$. Comme $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{n+1}$ est un G-module rationnel de dimension finie, et donc semi-simple, il est aussi fixé par g. On conclut grâce au fait que $\bigcap_{n\geq 1} \mathfrak{m}_x^n = \{0\}$.

On déduit aussitôt de la proposition 2.3 le résultat suivant, où $\widehat{Z}$ désigne le centre de $\widehat{G}$ (si bien que $\widehat{Z} \subset \widehat{T}$ et $\widehat{Z} \cap G \subset T \cap H$) :

COROLLAIRE 2.5. — *On a l'inclusion*

$$\Lambda(G,\widehat{G}) \subset \{(\nu,\widehat{\nu}) \in \Lambda \times \widehat{\Lambda} \mid \nu(t) = \widehat{\nu}(t) \textit{ pour tout } t \in \widehat{Z} \cap G\},$$

avec l'égalité si tout sous-groupe distingué de $\widehat{G}$ contenu dans G est contenu dans $\widehat{Z}$.

Voici une autre conséquence immédiate de la proposition 2.3 :

COROLLAIRE 2.6. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *$\Lambda(G,\widehat{G})$ est d'indice fini dans $\Lambda \times \widehat{\Lambda}$.*
(ii) *$C(G,\widehat{G})$ est d'intérieur non vide dans $\Lambda_{\mathbb{R}} \times \widehat{\Lambda}_{\mathbb{R}}$.*
(iii) *G ne contient aucun sous-groupe distingué fermé connexe non trivial de $\widehat{G}$.*
(iv) *$\mathfrak{g}$ ne contient aucun idéal non nul de $\widehat{\mathfrak{g}}$.*

Pour un couple $(G,\widehat{G})$ arbitraire, on se ramène facilement à une situation où ce dernier corollaire s'applique : en effet, quitte à remplacer $\widehat{G}$ par un revêtement fini, et G par la composante neutre de son image réciproque dans ce revêtement, on peut supposer que $\widehat{G} = H^0 \times \widehat{G_1}$ et $G = H^0 \times G_1$, où H^0 désigne la composante neutre du groupe H défini à la proposition 2.3 ; alors $\Lambda^+(G,\widehat{G})$ s'identifie à $\Lambda^+(G_1,\widehat{G_1})$, et G_1 ne contient aucun sous-groupe distingué fermé connexe non trivial de $\widehat{G_1}$.

Exemple 1.1 (suite) — Le corollaire 2.5 s'applique, et on retrouve ainsi le fait que le groupe $\Lambda(T,G)$ est formé des couples (μ,λ) de Λ tels que $\mu - \lambda \in \Lambda_R$. On a vu que le cône $C(T,G)$ est engendré par les $(w\lambda,\lambda)$ où $w \in W$ et $\lambda \in \Lambda^+$; de plus, le monoïde $\Lambda^+(T,G)$ est saturé (mais en général, on ne sait pas en construire des générateurs).

Exemple 1.2 (suite) — Le corollaire 2.5 s'applique aussi, et montre que le groupe engendré par $\mathrm{LR}(G)$ est formé des triplets (λ,μ,ν) de Λ tels que $\lambda+\mu+\nu \in \Lambda_R$. Le rang de ce groupe abélien libre est donc $3r-z$, où r désigne le rang de G, et z la dimension de son centre. On a vu que le monoïde $\mathrm{LR}(\mathrm{GL}_n) = \mathrm{LR}_n$ est saturé ; la situation est beaucoup plus compliquée pour un groupe G arbitraire, et on essaiera de faire le point sur le « problème de saturation » en 5.3.

3. THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES INVARIANTS

3.1. Le théorème de Borel-Weil

On va traduire le problème de la restriction en termes géométriques, à l'aide du classique théorème de Borel-Weil dont on rappelle l'énoncé.

Avec les notations de 2.1, on considère chaque caractère ν de T comme un caractère de B, et on note $\mathcal{L}(\nu)$ le fibré en droites homogène sur la variété des drapeaux G/B associé à la représentation de B dans $\mathbb{C}$ de poids $-\nu$. L'espace des sections globales $H^0(G/B,\mathcal{L}(\nu))$ est alors un G-module rationnel, et on a

$$H^0(G/B,\mathcal{L}(\nu)) \cong \begin{cases} V_G(\nu)^* & \text{si } \nu \text{ est dominant,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons la variété des drapeaux de $G \times \widehat{G}$,

$$X = X(G,\widehat{G}) := G/B \times \widehat{G}/\widehat{B}$$

et, pour tout $(\nu,\widehat{\nu}) \in \Lambda \times \widehat{\Lambda}$, le fibré en droites homogène sur X

$$\mathcal{L}(\nu,\widehat{\nu}) := L(\nu) \boxtimes \mathcal{L}(\widehat{\nu})$$

avec des notations évidentes. Lorsque ν et $\widehat{\nu}$ sont dominants, le théorème de Borel-Weil donne un isomorphisme de $G \times \widehat{G}$-modules

$$H^0(X,\mathcal{L}(\nu,\widehat{\nu})) \cong V_G(\nu)^* \otimes V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu})^*.$$

En notant $\widehat{\nu}^*$ le plus haut poids du $\widehat{G}$-module simple $V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu})^*$ (si bien que $\widehat{\nu}^* = -\widehat{w}_0\widehat{\nu}$ où $\widehat{w}_0$ désigne l'unique élément de plus grande longueur de $\widehat{W}$), on a donc

$$m(\nu,\widehat{\nu}^*) = \dim \mathrm{Hom}^G(V_G(\nu), \mathrm{Res}_G^{\widehat{G}} V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu})^*) = \dim H^0(X,\mathcal{L}(\nu,\widehat{\nu}))^G.$$

On en déduit aussitôt le

LEMME 3.1. — *Soit $(\nu,\widehat{\nu}) \in \Lambda^+ \times \widehat{\Lambda}^+$. Alors $(\nu,\widehat{\nu}^*) \in C(G,\widehat{G})$ si et seulement s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $H^0(X,\mathcal{L}(\nu,\widehat{\nu})^{\otimes n})^G \neq 0$.*

Cette observation permet de compléter la preuve du théorème 1.3 : par construction, on a des sous-groupes compacts maximaux K de G et $\widehat{K}$ de $\widehat{G}$, tels que $K \subset \widehat{K}$, et donc une projection $p : \widehat{\mathfrak{k}}^* \to \mathfrak{k}^*$. En outre, C s'identifie à une chambre de K, et de même $\widehat{C}$ à une chambre de $\widehat{K}$. Avec ces notations, il suffit de montrer que, *pour tout point rationnel $\widehat{\nu}$ de $\widehat{C}$, le polytope convexe $p(\widehat{K}\widehat{\nu}) \cap C$ est l'intersection du cône $C(G,\widehat{G})$ et de l'espace affine $\Lambda_{\mathbb{R}} \times \{\widehat{\nu}\}$.*

On peut supposer que $\widehat{\nu} \in \widehat{\Lambda}^+$. L'orbite coadjointe $\mathcal{O} := \widehat{K}\widehat{\nu}$ s'identifie alors à l'unique orbite fermée de $\widehat{G}$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu}))$ des droites de $V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu})$: c'est l'orbite de la droite de plus haut poids $\widehat{\nu}$. Ainsi, $\mathcal{O}$ est une variété algébrique complexe, projective et lisse ; de plus, l'application moment issue de ce plongement projectif et $\widehat{K}$-équivariant est l'inclusion de $\mathcal{O}$ dans $\widehat{\mathfrak{k}}^*$. Par suite, $p : \mathcal{O} \to \mathfrak{k}^*$ est l'application moment pour le plongement K-équivariant de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{P}(\mathrm{Res}_G^{\widehat{G}} V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu}))$. L'assertion est donc conséquence du lemme 3.1 et d'un résultat de Mumford ([**30**, App. (A1)]).

3.2. Le critère de Hilbert-Mumford

Le lemme 3.1 permettra d'obtenir des inéquations linéaires qui définissent le cône $C(G,\widehat{G})$, grâce au critère de Hilbert-Mumford ([**29**, Ch. 2]). Pour rappeler l'énoncé de ce critère et l'adapter à nos besoins, on se place dans une situation un peu plus générale.

Considérons une variété algébrique complexe complète X dans laquelle opère le groupe réductif connexe G ; soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur X. On suppose que $\mathcal{L}$ est *G-linéarisé*, c'est-à-dire qu'on se donne une action de G dans $\mathcal{L}$ qui relève l'action dans X et qui est linéaire dans les fibres.

Définition 3.2. — *On dit qu'un point $x \in X$ est* semi-stable relativement à $\mathcal{L}$ *s'il existe un entier $n \geq 1$ et une section $\sigma \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ tels que $x \in X_\sigma$ (l'ouvert de X où σ ne s'annule pas).*

Ceci diffère de la définition originale de Mumford ([**29**, Def. 1.7]), qui demande de plus que l'ouvert X_σ soit affine ; cependant, les deux définitions coïncident lorsque $\mathcal{L}$ est ample.

On note $X^{\mathrm{ss}}(\mathcal{L})$ l'ensemble des points semi-stables de X ; c'est un ouvert de X, stable par G et inchangé lorsqu'on remplace $\mathcal{L}$ par une puissance strictement positive $\mathcal{L}^{\otimes n}$.

Définition 3.3. — *On dit que $\mathcal{L}$ est G-*effectif *si $X^{\mathrm{ss}}(\mathcal{L})$ est non vide ; autrement dit, s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})^G \neq 0$.*

Rappelons par ailleurs qu'un *sous-groupe à un paramètre* de G est un homomorphisme de groupes algébriques $\lambda : \mathbb{C}^* \to G$. L'ensemble des sous-groupes à un paramètre de G, noté $X_*(G)$, est muni d'opérations de puissance n-ième ($n \in \mathbb{Z}$) qu'on note $\lambda \mapsto n\lambda$. Lorsque $G = T$ est un tore, $X_*(T)$ est un groupe abélien pour la multiplication ; c'est le dual du groupe des poids, Λ. Dans le cas général, G opère dans $X_*(G)$ par conjugaison, et un domaine fondamental pour cette action est formé des sous-groupes à un paramètre de T qui sont dominants (relativement à R^+).

Étant donnés $\lambda \in X_*(G)$ et $x \in X$, le morphisme $\mathbb{C}^* \to X$, $t \mapsto \lambda(t)x$ s'étend en un morphisme $\varphi : \mathbb{C} \to X$ (car X est complète). Notons $y = \lim_{t\to 0} \lambda(t)x$ l'image de 0 par φ ; c'est un point fixe de $\mathbb{C}^*$ opérant dans X par λ. Comme $\mathcal{L}$ est G-linéarisé, il en résulte que $\mathbb{C}^*$ opère linéairement dans la fibre $\mathcal{L}_y$; le poids de cette action est un entier relatif, noté $-\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda)$. (Ce choix de signe s'explique par l'exemple où $X = \mathbb{P}(V)$ pour un G-module rationnel V, et $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ muni de sa linéarisation naturelle : si x est l'image de $v \in V$, alors $\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda)$ est l'ordre en 0 de la fonction rationnelle $t \mapsto \lambda(t)v$.)

On énonce quelques propriétés immédiates de $\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda)$:

(i) $\mu^{\mathcal{L}}(gx, g\lambda g^{-1}) = \mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda)$ pour tout $g \in G$.

(ii) $\mu^{\mathcal{L}}(x, n\lambda) = n\, \mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) $\mu^{\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2}(x, \lambda) = \mu^{\mathcal{L}_1}(x, \lambda) + \mu^{\mathcal{L}_2}(x, \lambda)$ pour tous fibrés en droites G-linéarisés $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$.

En notant $\mathrm{Pic}^G(X)$ le groupe des classes d'isomorphisme de ces fibrés (relativement au produit tensoriel), on voit donc que l'application $\mathcal{L} \mapsto \mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda)$ définit un homomorphisme de groupes

$$\mu^\bullet(x, \lambda) : \mathrm{Pic}^G(X) \to \mathbb{Z}.$$

(iv) Si X' est une G-variété complète et $f : X \to X'$ un morphisme équivariant, alors $\mu^{f^*(\mathcal{L}')}(x, \lambda) = \mu^{\mathcal{L}'}(f(x), \lambda)$ pour tout $\mathcal{L}' \in \mathrm{Pic}^G(X')$.

On aura besoin également de l'interprétation suivante du signe de $\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda)$ en termes de « limites » dans le fibré $\mathcal{L}$ (où on identifie X à la section nulle) :

LEMME 3.4. — *Soient $x \in X$ et $\tilde{x} \in \mathcal{L}_x \setminus \{x\}$. Alors*

$$\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda) \begin{cases} < 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \lambda(t)\tilde{x} = y, \\ = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \lambda(t)\tilde{x} \in \mathcal{L}_y \setminus \{\, y\}, \\ > 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \lambda(t)\tilde{x} \textit{ n'existe pas dans } \mathcal{L}. \end{cases}$$

Preuve. — Le morphisme $\varphi : \mathbb{C} \to X$ est équivariant pour l'action de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ par multiplication, et pour son action dans X par λ. De plus, le fibré en droites $\varphi^*(\mathcal{L})$ est $\mathbb{C}^*$-linéarisé ; on vérifie que c'est le fibré trivial $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dans lequel $\mathbb{C}^*$ opère par $t \cdot (z, w) = (tz, t^{-\mu}w)$. L'énoncé en résulte aussitôt.

On obtient à présent une version du critère de Hilbert-Mumford pour les fibrés en droites *semi-amples* (c'est-à-dire, dont une puissance strictement positive est engendrée par ses sections globales) :

PROPOSITION 3.5. — *Soient $\mathscr{L}$ un fibré en droites G-linéarisé sur une G-variété complète X, et x un point de X.*
(i) *Si $x \in X^{\mathrm{ss}}(\mathscr{L})$, alors $\mu^{\mathscr{L}}(x,\lambda) \leq 0$ pour tout $\lambda \in X_*(G)$.*
(ii) *Si $x \in X^{\mathrm{ss}}(\mathscr{L})$ et $\lambda \in X_*(G)$, alors on a : $\mu^{\mathscr{L}}(x,\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to 0}\lambda(t)x \in X^{\mathrm{ss}}(\mathscr{L})$.*
(iii) *Si $\mathscr{L}$ est semi-ample et $\mu^{\mathscr{L}}(x,\lambda) \leq 0$ pour tout $\lambda \in X_*(G)$, alors $x \in X^{\mathrm{ss}}(\mathscr{L})$.*

Preuve. — (i) Soit $\sigma \in H^0(X,\mathscr{L}^{\otimes n})^G$ telle que $x \in X_\sigma$. Considérons σ comme une fonction régulière sur le fibré dual $\mathscr{L}^{-1}$, et choisissons $\tilde{x} \in \mathscr{L}_x^{-1} \setminus \{x\}$. Alors $\sigma(\tilde{x}) \neq 0$, donc par invariance de σ, on ne peut pas avoir $\lim_{t\to 0}\lambda(t)\tilde{x} = y$ dans $\mathscr{L}^{-1}$. D'après le lemme 3.4, on a $\mu^{\mathscr{L}^{-1}}(x,\lambda) \geq 0$ pour tout $\lambda \in X_*(G)$, d'où l'assertion.

(ii) Avec les notations précédentes, supposons que $\mu^{\mathscr{L}}(x,\lambda) = 0$. Toujours d'après le lemme 3.4, on a $\tilde{y} := \lim_{t\to 0}\lambda(t)\tilde{x} \in \mathscr{L}_y \setminus \{y\}$. Par suite, $\sigma(\tilde{x}) = \sigma(\tilde{y})$, d'où $y \in X^{\mathrm{ss}}(\mathscr{L})$.

Réciproquement, si $y \in X^{\mathrm{ss}}(\mathscr{L})$, alors il existe $\sigma \in H^0(X,\mathscr{L}^{\otimes n})^G$ tel que $\sigma(\tilde{y}) \neq 0$ pour tout $\tilde{y} \in \mathscr{L}_y^{-1} \setminus \{0\}$. Mais $\sigma(\tilde{y}) = \sigma(\lambda(t)\tilde{y}) = t^{-n\mu^{\mathscr{L}}(x,\lambda)}\sigma(\tilde{y})$, d'où $\mu^{\mathscr{L}}(x,\lambda) = 0$.

(iii) Lorsque $\mathscr{L}$ est ample, l'assertion est due à Mumford ([**29**, Th. 2.1]). Le cas où $\mathscr{L}$ est semi-ample s'y ramène : en effet, quitte à remplacer $\mathscr{L}$ par une puissance strictement positive, on peut le supposer engendré par ses sections globales. Puisque $\mathscr{L}$ est G-linéarisé, l'espace vectoriel $V := H^0(X,\mathscr{L})$ est un G-module rationnel, et l'application canonique $F : X \to \mathbb{P}(V^*)$ est équivariante ; on a un isomorphisme de fibrés G-linéarisés $\mathscr{L} \cong F^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(1))$. La factorisation de Stein de F fournit alors une G-variété projective X', un morphisme équivariant $f : X \to X'$ tel que $f_*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_{X'}$ et un fibré en droites ample et G-linéarisé $\mathscr{L}'$ sur X' tel que $\mathscr{L} \cong f^*(\mathscr{L}')$. De plus, $\mu^{\mathscr{L}}(x,\lambda) = \mu^{\mathscr{L}'}(f(x),\lambda)$, et on a des isomorphismes $H^0(X,\mathscr{L}^{\otimes n}) \cong H^0(X',\mathscr{L}'^{\otimes n})$ équivariants et compatibles aux évaluations en x et $f(x)$.

3.3. Une caractérisation des fibrés G-effectifs

On suppose désormais que X est lisse et projective ; on va obtenir des inéquations linéaires qui caractérisent les fibrés en droites G-effectifs, en suivant [**32**, Sec. 3].

Étant donné $\lambda \in X_*(G)$, on note X^λ le lieu de ses points fixes ; c'est une sous-variété lisse et fermée de X, en général réductible, et stable par le centralisateur G^λ (le sous-groupe des points fixes de λ opérant par conjugaison dans G). Puisque ce sous-groupe est connexe, il stabilise chaque composante connexe Y de X^λ. De plus, la fonction $x \mapsto \mu^{\mathscr{L}}(x,\lambda)$ est localement constante sur X^λ ; on note $\mu^{\mathscr{L}}(Y,\lambda)$ sa valeur sur Y. C'est aussi sa valeur sur l'ensemble

$$Y^+ := \{x \in X \mid \lim_{t\to 0}\lambda(t)x \in Y\}.$$

D'après un résultat de Bialynicki-Birula ([**8**, Th. 4.3]), Y^+ est une sous-variété localement fermée, lisse, de X, et l'application « limite »

$$\pi : Y^+ \to Y, \quad x \mapsto \lim_{t\to 0} \lambda(t)x$$

est une fibration localement triviale pour la topologie de Zariski, dont les fibres sont des espaces affines ; de plus, l'action de $\mathbb{C}^*$ par λ dans chaque fibre est linéarisable. (On ne sait pas si π est un fibré vectoriel.)

On peut maintenant énoncer l'observation clé suivante :

Lemme 3.6. — *On suppose que GY^+ est dense dans X et que $\mathcal{L}$ est G-effectif. Alors $\mu^{\mathcal{L}}(Y,\lambda) \leq 0$, et $\mu^{\mathcal{L}}(Y,\lambda) = 0$ si et seulement si $X^{\mathrm{ss}}(\mathcal{L})$ rencontre Y.*

Preuve. — Les hypothèses entraînent que $X^{\mathrm{ss}}(\mathcal{L})$ rencontre Y^+ ; les assertions résultent alors de la proposition 3.5 (i) et (ii).

Posons

$$P = P(\lambda) := \{g \in G \mid \lim_{t\to 0} \lambda(t)g\lambda(t)^{-1} \text{ existe}\}.$$

D'après [**29**, Prop. 2.6], P est un sous-groupe parabolique de G, et on a la décomposition de Levi

$$P = R_u(P)\,L \quad \text{où} \quad R_u(P) = \{g \in G \mid \lim_{t\to 0} \lambda(t)g\lambda(t)^{-1} = 1\} \quad \text{et} \quad L = G^{\lambda}.$$

(Réciproquement, toute décomposition de Levi d'un sous-groupe parabolique s'obtient à partir d'un sous-groupe à un paramètre.) Observons que $\lambda \in X_*(T)$ si et seulement si L contient T ; sous cette hypothèse, λ est dominant si et seulement si P contient B. Par ailleurs, $\mu^{\mathcal{L}}(gx,\lambda) = \mu^{\mathcal{L}}(x,\lambda)$ pour tout $g \in P$ ([**29**, Prop. 2.7]).

On vérifie aussitôt que Y^+ est stable par P ; de plus, π est invariante par $R_u(P)$ et équivariante pour L. Puisque le morphisme quotient $G \to G/P$ est un fibré principal localement trivial pour la topologie de Zariski, on peut former le fibré associé $G\times^P Y^+$. C'est une variété algébrique lisse, dans laquelle G opère par multiplication à gauche sur lui-même. Voici d'autres propriétés de cette construction :

Lemme 3.7. — (i) *La restriction à Y^+ induit des isomorphismes*

$$\mathrm{Pic}^G(G \times^P Y^+) \cong \mathrm{Pic}^P(Y^+)$$

et pour tout $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^G(G \times^P Y^+)$,

$$H^0(G \times^P Y^+, \mathcal{L})^G \cong H^0(Y^+, \mathcal{L})^P.$$

(ii) *La restriction à Y induit un isomorphisme $\mathrm{Pic}^P(Y^+) \cong \mathrm{Pic}^L(Y)$.*

(iii) *Si $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^P(Y^+)$ et $\mu^{\mathcal{L}}(Y,\lambda) \neq 0$, alors $H^0(Y,\mathcal{L})^{\lambda} = 0$.*

(iv) *Si $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^P(Y^+)$ et $\mu^{\mathcal{L}}(Y,\lambda) = 0$, alors la restriction à Y induit un isomorphisme*

$$H^0(Y^+, \mathcal{L})^P \cong H^0(Y, \mathcal{L})^L.$$

De plus, on a $(Y^+)_\sigma = \pi^{-1}(Y_\tau)$ *pour tout* $\sigma \in H^0(Y^+, \mathscr{L})^P$ *où on note* $\tau := \sigma|_Y$.

Preuve. — (i) Puisque le morphisme quotient $q : G \times Y^+ \to G \times^P Y^+$ est un fibré principal, l'application

$$q^* : \mathrm{Pic}^G(G \times^P Y^+) \to \mathrm{Pic}^{G\times P}(G \times Y^+)$$

est un isomorphisme dont l'inverse est l'image directe invariante, $\mathscr{L} \mapsto q_*(\mathscr{L})^P$. De même, la projection $p : G \times Y^+ \to Y^+$ induit un isomorphisme

$$p^* : \mathrm{Pic}^{G\times P}(G \times Y^+) \cong \mathrm{Pic}^P(Y^+).$$

On en déduit la première assertion. La deuxième résulte des isomorphismes

$$H^0(G \times^P Y^+, \mathscr{L}) \cong H^0(G \times Y^+, q^*(\mathscr{L}))^{G\times P} \cong H^0(G \times Y^+, p^*(\mathscr{L}|_{Y^+}))^{G\times P}.$$

(ii) Puisque $\pi : Y^+ \to Y$ est un fibré affine, l'application $\pi^* : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(Y^+)$ est surjective ; c'est donc un isomorphisme, car $\pi^*(\mathscr{L})|_Y = \mathscr{L}$ pour tout $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(Y^+)$. Pour tout $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}^P(Y^+)$, on en déduit que $\mathscr{L} \otimes \pi^*(\mathscr{L}|_Y)^{-1}$ est le fibré en droites trivial ; comme ce fibré est aussi P-linéarisé, l'action de P y est donnée par un caractère χ. En restreignant ce fibré à Y, on voit que $\chi|_L$ est trivial, donc aussi χ puisque $P = R_u(P)\, L$.

(iii) est immédiat.

(iv) D'après (ii), on a $\mathscr{L} = \pi^*(\mathscr{M})$ où $\mathscr{M} := \mathscr{L}|_Y$. D'où

$$H^0(Y^+, \mathscr{L})^P \cong H^0(Y, \pi_*(\mathscr{L}))^P \cong H^0(Y, \mathscr{M} \otimes \pi_*(\mathscr{O}_{Y^+}))^P.$$

En considérant les poids de l'action de λ dans $\pi_*(\mathscr{O}_{Y^+})$, on obtient que l'application naturelle $H^0(Y, \mathscr{M})^L \to H^0(Y, \mathscr{M} \otimes \pi_*(\mathscr{O}_{Y^+}))^P$ est un isomorphisme. En particulier, on a $\tau = p^*(\sigma)$, d'où les assertions.

Le morphisme $G \times Y^+ \to X$, $(g, x) \mapsto gx$ se factorise par un morphisme

$$\eta : G \times^P Y^+ \to X$$

équivariant pour les actions naturelles de G.

DÉFINITION 3.8. — *Le couple* (Y, λ) *est dit* dominant *(resp.* couvrant*) si le morphisme* η *est dominant (resp. birationnel).*

On dit que (Y, λ) *est* bien couvrant *si* η *est birationnel et si son lieu exceptionnel ne contient pas* Y.

L'intérêt de cette dernière notion provient du résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 3.9. — *Soit* $\mathscr{L}$ *un fibré en droites ample et* G*-linéarisé sur une* G*-variété projective lisse* X. *Alors* $\mathscr{L}$ *est* G*-effectif si et seulement si* $\mu^{\mathscr{L}}(Y, \lambda) \leq 0$ *pour tout couple bien couvrant* (Y, λ) *où* $\lambda \in X_*(T)$ *est dominant.*

Preuve. — Lorsque $X^{\mathrm{ss}}(\mathscr{L}) \neq \varnothing$, on a en fait $\mu^{\mathscr{L}}(Y,\lambda) \leq 0$ pour tout couple dominant (Y,λ), d'après le lemme 3.6.

Supposons maintenant que $X^{\mathrm{ss}}(\mathscr{L}) = \varnothing$. D'après [**20**, Sec. 13], X est alors réunion disjointe de sous-variétés localement fermées, stables par G et de la forme $G\Omega^+$ où $\lambda \in X_*(G)$ et Ω est un ouvert de X^λ, irréductible et stable par L ; de plus, $\mu^{\mathscr{L}}(\Omega,\lambda) > 0$ et le morphisme naturel $G \times^P \Omega^+ \to G\Omega^+$ est un isomorphisme. En particulier, le couple $(Y := \overline{\Omega}, \lambda)$ est bien couvrant. D'autre part, il existe $g \in G$ tel que le conjugué $g\lambda g^{-1}$ soit à valeurs dans T et dominant ; alors le couple $(gY, g\lambda g^{-1})$ est bien couvrant, et $\mu^{\mathscr{L}}(gY, g\lambda g^{-1}) = \mu^{\mathscr{L}}(Y,\lambda) > 0$.

Terminons par une caractérisation « différentielle » des couples bien couvrants :

Lemme 3.10. — *Soit $\mathscr{D} := \omega_{G\times^P Y^+} \otimes \eta^*\omega_X^{-1}$ le fibré canonique relatif de η, muni de sa G-linéarisation naturelle.*
(i) *Si η est génériquement fini, alors $\mu^{\mathscr{D}}(Y,\lambda) \geq 0$.*
(ii) *Pour que (Y,λ) soit bien couvrant, il faut et il suffit que η soit birationnelle et que $\mu^{\mathscr{D}}(Y,\lambda) = 0$.*

Preuve. — (i) Le « déterminant jacobien » de η (la puissance extérieure maximale de sa différentielle) s'identifie à une section $\delta \in H^0(G \times^P Y^+, \mathscr{D})$, invariante par G ; de plus, $\delta \neq 0$ si et seulement si η est génériquement fini. La restriction de δ à Y^+ est alors non nulle, d'où $H^0(Y^+, \mathscr{D})^\lambda \neq 0$. En considérant les poids de l'action de λ, on en déduit la première assertion.

(ii) Supposons (Y,λ) bien couvrant ; alors δ ne s'annule pas en un certain $y \in Y$. Il en résulte que $H^0(Y,\mathscr{D})^\lambda \neq 0$, d'où $\mu^{\mathscr{D}}(Y,\lambda) = 0$ d'après le lemme 3.7 (iii).

Réciproquement, si η est birationnelle et $\mu^{\mathscr{D}}(Y,\lambda) = 0$, alors il existe $x \in Y^+$ tel que $x \in X_\delta$. Soit $y = \lim_{t\to 0} \lambda(t)x$. On montre comme dans la preuve de la proposition 3.5 que $y \in X_\delta$; autrement dit, η est non ramifiée en y. On conclut grâce au théorème principal de Zariski.

4. LE CÔNE DE LA RESTRICTION

4.1. Géométrie des variétés des drapeaux

On va expliciter les objets introduits en 3.3, lorsque X est la variété des drapeaux $G/B \times \widehat{G}/\widehat{B}$ dans laquelle G opère diagonalement ; on suivra [**32**, Sec. 7].

Le groupe $\mathrm{Pic}^G(X)$ est décrit par le résultat suivant où chaque fibré en droites $\mathscr{L}(\nu,\widehat{\nu})$ est muni de sa G-linéarisation obtenue par la restriction à la diagonale de sa $G \times \widehat{G}$-linéarisation naturelle :

LEMME 4.1. — *L'application*

$$\Lambda \times \widehat{\Lambda} \to \mathrm{Pic}^G(X), \quad (\nu, \widehat{\nu}) \mapsto \mathcal{L}(\nu, \widehat{\nu})$$

est un homomorphisme de conoyau fini et de noyau

$$\{(-\widehat{\nu}|_T, \widehat{\nu}) \mid \widehat{\nu} \in \widehat{\Lambda}^{\widehat{W}}\} \cong \widehat{\Lambda}^{\widehat{W}}.$$

De plus, $\mathcal{L}(\nu, \widehat{\nu})$ est effectif (resp. ample) si et seulement si ν et $\widehat{\nu}$ sont dominants (resp. dominants réguliers); tout fibré en droites effectif (resp. ample) sur X est engendré par ses sections globales (resp. très ample).

Preuve (esquisse). — Pour toute G-variété lisse et complète X, l'application naturelle $\mathrm{Pic}^G(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ a un conoyau fini, et son noyau est isomorphe au groupe des caractères $X^*(G)$; on en déduit la première assertion en observant que $\Lambda \times \widehat{\Lambda} = \mathrm{Pic}^{G \times \widehat{G}}(X)$ et que $\widehat{\Lambda}^{\widehat{W}} = X^*(\widehat{G})$. Les autres assertions se déduisent du théorème de Borel-Weil.

Soient $\lambda \in X_*(T)$, $P = P(\lambda)$ et $L = L(\lambda)$. On note W_P le groupe de Weyl de (P, T), ou encore de (L, T) ; c'est aussi le groupe d'isotropie de λ pour l'action de W dans $X_*(T)$.

LEMME 4.2. — *Les composantes connexes de $(G/B)^\lambda$ ne sont autres que les sous-variétés LwB/B. Elles sont toutes isomorphes à la variété des drapeaux de L, et paramétrées par $W_P \backslash W$. De plus, on a $(LwB/B)^+ = PwB/B$.*

Preuve. — Soit Y une composante de $(G/B)^\lambda$. Rappelons que Y^+ est stable par le sous-groupe parabolique P de G. D'après la décomposition de Bruhat, Y^+ est donc réunion d'orbites PwB/B pour certains $w \in W$. Mais si $x \in PwB/B$, alors $\lim_{t \to 0} \lambda(t)x \in LwB/B$ (car $\lim_{t \to 0} \lambda(t) g \lambda(t)^{-1} \in L$ pour tout $g \in P$). De plus, l'orbite LwB/B est formée de points fixes de λ, et elle est isomorphe à $L/(wBw^{-1})^\lambda$, donc à la variété des drapeaux de L puisque $(wBw^{-1})^\lambda$ est un sous-groupe de Borel de $L = G^\lambda$. En particulier, LwB/B est une sous-variété irréductible et fermée de $(G/B)^\lambda$. Ceci entraîne les assertions sur les composantes Y de $(G/B)^\lambda$ et les variétés associées Y^+.

Pour l'assertion sur le paramétrage, on observe que $(G/B)^\lambda$ est stable par T, et que les points fixes de ce tore dans LwB/B ne sont autres que les vwB/B où $v \in W_P$.

Identifions λ à un sous-groupe à un paramètre de $\widehat{T}$, et posons $\widehat{P} = \widehat{P}(\lambda)$, $\widehat{L} = \widehat{L}(\lambda)$; alors le sous-groupe parabolique de $G \times \widehat{G}$ associé à $(\lambda, \lambda) \in X_*(T \times \widehat{T})$ est $P \times \widehat{P}$, avec $L \times \widehat{L}$ comme sous-groupe de Levi. D'après le lemme 4.2 appliqué à X, les composantes irréductibles de X^λ sont les

$$Y = Y_{w, \widehat{w}} := Lw^{-1}B/B \times \widehat{L}\widehat{w}^{-1}\widehat{B}/\widehat{B}$$

où $(w,\widehat{w}) \in W/W_P \times \widehat{W}/\widehat{W}_P$ (ce choix du paramétrage s'avérera commode). De plus, on a

$$Y^+_{w,\widehat{w}} := Pw^{-1}B/B \times \widehat{P}\widehat{w}^{-1}\widehat{B}/\widehat{B}.$$

On va maintenant caractériser les couples $(Y_{w,\widehat{w}}, \lambda)$ qui sont dominants ou couvrants, en termes du « calcul de Schubert » dans la variété de drapeaux G/P. Puisque $P = G \cap \widehat{P}$, l'application naturelle

$$i : G/P \to \widehat{G}/\widehat{P}$$

est une immersion fermée. Notons $H^*(G/P)$ l'anneau de cohomologie de G/P à coefficients entiers, et

$$i^* : H^*(\widehat{G}/\widehat{P}) \to H^*(G/P)$$

l'homomorphisme défini par i. Rappelons que G/P a une décomposition cellulaire formée des orbites

$$C^P_w := BwP/P \quad (w \in W/W_P)$$

(les cellules de Bruhat). Leurs adhérences

$$X^P_w := \overline{C^P_w}$$

sont les variétés de Schubert. Les classes de cohomologie de ces variétés,

$$\sigma^P_w := [X^P_w] \quad (w \in W/W_P),$$

forment donc une base du groupe abélien $H^*(G/P)$; de plus, σ^P_e est la classe du point. En particulier, la cohomologie de G/P est nulle en degrés impairs, si bien que le produit $\cup$ est commutatif.

On définit de même la base $(\sigma^{\widehat{P}}_{\widehat{w}})_{\widehat{w} \in \widehat{W}/\widehat{W}^{\widehat{P}}}$ de $H^*(\widehat{G}/\widehat{P})$.

Proposition 4.3. — *Soit $(w,\widehat{w}) \in W/W_P \times \widehat{W}/\widehat{W}_{\widehat{P}}$. Le couple $(Y_{w,\widehat{w}}, \lambda)$ est dominant (resp. couvrant) si et seulement si $\sigma^P_w \cup i^*(\sigma^{\widehat{P}}_{\widehat{w}}) \neq 0$ (resp $= \sigma^P_e$) dans $H^*(G/P)$.*

Preuve. — Rappelons que $(Y_{w,\widehat{w}}, \lambda)$ est dominant (resp. couvrant) si et seulement si la fibre en x du morphisme $\eta : G \times^P Y^+_{w,\widehat{w}} \to X$ est non vide (resp. un point) pour tout x dans un ouvert non vide de X. Mais cette fibre s'identifie à

$$F_x := \{gP \in G/P \mid g^{-1}x \in Y_{w,\widehat{w}}\}$$

par l'application naturelle $G \times^P Y^+_{w,\widehat{w}} \to G/P$. De plus, comme η est équivariante pour G, on peut supposer que x est de la forme $(P/P, \widehat{g}\widehat{P}/\widehat{P})$ pour un $\widehat{g} \in \widehat{G}$. On a alors pour tout $g \in G$:

$$gP \in F_x \Leftrightarrow g^{-1}B/B \in Pw^{-1}B/B \text{ et } g^{-1}\widehat{g}\widehat{B}/\widehat{B} \in \widehat{P}\widehat{w}^{-1}\widehat{B}/\widehat{B}$$

ce qui équivaut, après quelques manipulations, à $g \in BwP \cap \widehat{g}\widehat{B}\widehat{w}\widehat{P}$. Ainsi,

$$F_x = C_w^P \cap i^{-1}(\widehat{g}C_{\widehat{w}}^{\widehat{P}}).$$

D'après un théorème de transversalité dû à Kleiman, l'intersection des adhérences, $X_w^P \cap i^{-1}(\widehat{g}X_{\widehat{w}}^{\widehat{P}})$, est transverse pour tout $\widehat{g}$ dans un ouvert non vide de $\widehat{G}$; de plus, F_x est dense dans cette intersection. On en déduit que la classe de cohomologie de $\overline{F_x}$ est $\sigma_w^P \cup i^*(\sigma_{\widehat{w}}^{\widehat{P}})$; les assertions en résultent aussitôt.

4.2. Couples bien couvrants et sous-groupes à un paramètre admissibles

On va obtenir une caractérisation cohomologique des couples bien couvrants, et en déduire des inéquations linéaires en nombre fini qui définissent le cône de la restriction. On commence par deux résultats techniques qui permettront d'appliquer le critère du lemme 3.10.

Fixons $\lambda \in X_*(T)$ dominant, si bien que $P = P(\lambda)$ contient B, et que $L = L(\lambda)$ contient T. Rappelons que chaque classe wW_P, où $w \in W$, contient un unique représentant de longueur minimale, caractérisé par $w(R^+ \cap R_L) \subset R^+$. Notons W^P l'ensemble de ces *représentants minimaux* et définissons de même $\widehat{W}^{\widehat{P}}$.

LEMME 4.4. — *Soit $w \in W^P$. Notons γ_w^P la somme des poids de T dans l'espace normal à BwP/P dans G/P au point wP/P. Alors*

$$\gamma_w^P = -\rho - ww_{0,P}\,\rho$$

où $w_{0,P}$ désigne l'élément de plus grande longueur de W_P.

Preuve (esquisse). — Cet espace normal est isomorphe au quotient $\mathfrak{g}/(\mathfrak{b} + w\mathfrak{p})$ et ses poids ne sont autres que les $\alpha \in R^-$ telles que $w^{-1}\alpha \in R^- \setminus R_L$.

LEMME 4.5. — *Soient $(w, \widehat{w}) \in W^P \times \widehat{W}^{\widehat{P}}$ et $\mathcal{D}$ le fibré canonique relatif du morphisme $\eta : G \times^P Y_{w,\widehat{w}} \to X$. Alors T opère dans la fibre de $\mathcal{D}$ au point $(w^{-1}B/B, \widehat{w}^{-1}\widehat{B}/\widehat{B})$ par le poids $w^{-1}\gamma_w^P + (\widehat{w}^{-1}\gamma_{\widehat{w}})^{\widehat{P}}|_T - \gamma_e^P$.*

Preuve (esquisse). — On a

$$\mathcal{D} \cong \eta^*(\Lambda^{\max}T_X) \otimes \Lambda^{\max}T^*_{G\times^P Y^+}$$

où $\Lambda^{\max}$ désigne la plus grande puissance extérieure non nulle. D'où

$$\mathcal{D}_x \cong \Lambda^{\max}T_{G/B,w^{-1}B/B} \otimes \Lambda^{\max}T_{\widehat{G}/\widehat{B},\widehat{w}^{-1}\widehat{B}/\widehat{B}} \otimes \Lambda^{\max}T^*_{G/P,P/P} \otimes \Lambda^{\max}T^*_{Y^+,x}$$

où $x := (w^{-1}B/B, \widehat{w}^{-1}\widehat{B}/\widehat{B})$. En utilisant le lemme 4.2, on obtient

$$\mathcal{D}_x \cong \Lambda^{\max}N_{G/B,Pw^{-1}B/B,w^{-1}B/B} \otimes \Lambda^{\max}N_{\widehat{G}/\widehat{B},\widehat{P}\widehat{w}^{-1}\widehat{B}/\widehat{B},\widehat{w}^{-1}\widehat{B}/\widehat{B}} \otimes \Lambda^{\max}T^*_{G/P,P/P}$$

où $N_{G/B,Pw^{-1}B/B,w^{-1}B/B}$ désigne le fibré normal à $Pw^{-1}B/B$ dans G/B au point $w^{-1}B/B$, et de même pour $N_{\widehat{G}/\widehat{B},\widehat{P}\widehat{w}^{-1}\widehat{B}/\widehat{B},\widehat{w}^{-1}\widehat{B}/\widehat{B}}$. On conclut grâce au lemme 4.4.

PROPOSITION 4.6. — *Soient λ un sous-groupe à un paramètre dominant de T, et $(w,\widehat{w}) \in W^P \times \widehat{W}^{\widehat{P}}$. Alors le couple $(Y := Y_{w,\widehat{w}}, \lambda)$ est bien couvrant si et seulement s'il satisfait aux deux conditions suivantes :*
(i) $\sigma_w^P \cup i^*(\sigma_{\widehat{w}}^{\widehat{P}}) = \sigma_e^P$ *dans* $H^*(G/P)$.
(ii) $\langle \rho, \lambda - w\lambda \rangle = \langle \widehat{\rho}, \lambda + \widehat{w}\lambda \rangle$.

Preuve. — D'après la proposition 4.3, la condition (i) équivaut à ce que η soit birationnelle. Par ailleurs, d'après le lemme 4.5, on a

$$\mu^{\mathscr{D}}(Y,\lambda) = \langle \lambda, w^{-1}\gamma_w^P + (\widehat{w}^{-1}\gamma_{\widehat{w}}^{\widehat{P}})|_T - \gamma_e^P \rangle = \langle w\lambda, \gamma_w^P \rangle + \langle \widehat{w}\lambda, \gamma_{\widehat{w}}^{\widehat{P}} \rangle - \langle \lambda, \gamma_e^P \rangle.$$

En utilisant le lemme 4.4, on en déduit que

$$\mu^{\mathscr{D}}(Y,\lambda) = \langle \lambda - w\lambda, \rho \rangle - \langle \lambda + \widehat{w}\lambda, \widehat{\rho} \rangle.$$

L'assertion résulte alors du lemme 3.10.

On introduit à présent une classe de sous-groupes à un paramètre qui permettra de décrire les faces de codimension 1 du cône de la restriction, lorsque celui-ci est d'intérieur non vide. Parmi ces faces, il suffit alors de déterminer celles qui ne proviennent pas d'un mur de la chambre $C \times \widehat{C}$; autrement dit, celles qui rencontrent l'intérieur de cette chambre.

DÉFINITION 4.7. — *Un sous-groupe à un paramètre non trivial de T est dit* admissible *si l'hyperplan de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ qu'il définit est engendré par des poids de la représentation de T dans $\widehat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.*

Les sous-groupes à un paramètre admissibles et indivisibles sont donc en nombre fini.

LEMME 4.8. — *Soit $(Y = Y_{w,\widehat{w}}, \lambda)$ un couple bien couvrant tel que l'hyperplan $(\mu^\bullet(Y,\lambda) = 0)$ rencontre le cône $C(G,\widehat{G})$ suivant une face F de codimension 1 qui ne provient pas d'un mur de $C \times \widehat{C}$. Alors λ est admissible.*

Preuve. — Soit $(\nu,\widehat{\nu}) \in F$ où ν et $\widehat{\nu}$ sont des poids dominants réguliers. Le fibré en droites G-linéarisé $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\nu,\widehat{\nu})$ est ample et G-effectif, et $\mu^{\mathscr{L}}(Y,\lambda) = 0$; par suite, Y rencontre $X^{\mathrm{ss}}(\mathscr{L})$ d'après le lemme 3.6. Soit donc $y \in Y \cap X^{\mathrm{ss}}(\mathscr{L})$; alors le groupe d'isotropie G_y opère dans la fibre $\mathscr{L}_y$ par un caractère, qui est d'ordre fini (par l'argument de la preuve de la proposition 3.5 (ii)). Ainsi, la composante neutre G_y^0 opère trivialement dans $\mathscr{L}_y$.

Le groupe des caractères $X^*(G_y)$ s'identifie à $\mathrm{Pic}^G(Gy) \cong \mathrm{Pic}^G(G/G_y)$. Montrons que la restriction

$$\mathrm{res} : \mathrm{Pic}^G(X) \to \mathrm{Pic}^G(Gy)$$

est surjective. En effet, la projection

$$p : X = G/B \times \widehat{G}/\widehat{B} \to G/B$$

envoie y sur un sous-groupe de Borel $B(y)$ qui contient G_y, et la composée de res et de l'homomorphisme $p^* : \mathrm{Pic}^G(G/B) \to \mathrm{Pic}^G(X)$ s'identifie (par les isomorphismes $\mathrm{Pic}^G(G/B) \cong \mathrm{Pic}^G(G/B(y)) \cong X^*(B(y)))$ à la restriction $X^*(B(y)) \to X^*(G_y)$, laquelle est bien surjective.

Montrons à présent que le groupe G_y est diagonalisable ; en particulier, G_y^0 est un tore. En effet, l'adhérence de l'orbite Gy dans $X^{\mathrm{ss}}(\mathscr{L})$ contient une unique orbite fermée Gz, et G_y est contenu dans un conjugué de G_z d'après le théorème du slice de Luna ([**29**, App. to Ch. 1, D]). Mais G_z est réductif (car la variété Gz est affine), et résoluble (car contenu dans un conjugué de B) ; il est donc diagonalisable, d'où l'assertion.

Montrons enfin que $G_y^0 = \mathrm{Im}(\lambda)$. En effet, la composée des restrictions,

$$\mathrm{res}^0 : \mathrm{Pic}^G(X) \to X^*(G_y) \to X^*(G_y^0),$$

est identiquement nulle sur F, et d'autre part, le conoyau de res^0 est fini. Comme F est de codimension 1, il en résulte que $X^*(G_y^0)$ est de rang au plus 1 ; par ailleurs, G_y^0 contient $\mathrm{Im}(\lambda)$, d'où l'égalité.

Le groupe $L = G^\lambda$ opère dans Y à travers son quotient $L/\mathrm{Im}(\lambda)$; d'après l'assertion précédente, le groupe d'isotropie d'un point général de Y dans ce quotient est fini. Puisque $Y \cong L/B^\lambda \times \widehat{L}/\widehat{B}^\lambda$ comme L-variété, cela revient à dire que le groupe d'isotropie dans $B^\lambda/\mathrm{Im}(\lambda)$ d'un point général de $\widehat{L}/\widehat{B}^\lambda$ est fini. D'après la décomposition de Bruhat, on peut remplacer dans cette assertion $\widehat{L}/\widehat{B}^\lambda$ par $\widehat{B}^\lambda/\widehat{T} \cong \widehat{U}^\lambda$. Puisque $B^\lambda = U^\lambda T$, il en résulte que le groupe d'isotropie dans $T/\mathrm{Im}(\lambda)$ d'un point général de $\widehat{U}^\lambda/U^\lambda$ est fini. Par suite, $\mathrm{Im}(\lambda)$ est la composante neutre du noyau de l'action de T dans $\widehat{U}^\lambda/U^\lambda$. En raisonnant comme à la fin de la preuve de la proposition 2.3, on peut remplacer $\widehat{U}^\lambda/U^\lambda$ par $\widehat{\mathfrak{g}}^\lambda/\mathfrak{g}^\lambda \cong (\widehat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g})^\lambda$. Cela signifie que $\mathrm{Im}(\lambda)$ est la composante neutre de l'intersection des noyaux de certains poids de T dans $\widehat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$, ce qui équivaut à l'admissibilité.

On peut à présent énoncer le résultat principal de cet exposé :

THÉORÈME 4.9. — *On suppose que $\mathfrak{g}$ ne contient aucun idéal non nul de $\widehat{\mathfrak{g}}$. Alors le cône $C(G,\widehat{G})$ est l'ensemble des $(\nu,\widehat{\nu}) \in C \times \widehat{C}$ tels que*

$$\langle \nu, w\lambda \rangle + \langle \widehat{\nu}^*, \widehat{w}\lambda \rangle \leq 0$$

pour tout sous-groupe à un paramètre λ de T, dominant et admissible, et pour tout $(w, \widehat{w}) \in W^P \times \widehat{W}^{\widehat{P}}$ tel que $\sigma_w^P \cup i^*(\sigma_{\widehat{w}}^{\widehat{P}}) = \sigma_e^P$ dans $H^*(G/P)$, et que $\langle \rho, \lambda - w\lambda \rangle = \langle \widehat{\rho}, \lambda + \widehat{w}\lambda \rangle$.

Preuve. — Le cône $C(G, \widehat{G})$ est convexe, rationnel et polyédral (d'après le théorème 2.1) et d'intérieur non vide dans $\Lambda_{\mathbb{R}} \times \widehat{\Lambda}_{\mathbb{R}}$ (corollaire 2.6). Par suite, il suffit d'établir l'énoncé pour les couples $(\nu, \widehat{\nu})$ de poids dominants réguliers. Mais cela résulte du lemme 3.1, du théorème 3.9, de la proposition 4.6 et du lemme 4.8.

4.3. Le cône de Littlewood-Richardson

Rappelons qu'il s'agit du cône engendré par les triplets de poids dominants (λ, μ, ν) tels que $(V(\lambda) \otimes V(\mu) \otimes V(\nu))^G \neq 0$; notons-le $\mathscr{LR}(G)$. On a pour tout $(\lambda, \mu, \nu) \in C^3$:

$$(\lambda, \mu, \nu) \in \mathscr{LR}(G) \Leftrightarrow (\lambda, \mu, \nu^*) \in C(G, G \times G) \Leftrightarrow 0 \in K\lambda + K\mu + K\nu$$

où la seconde équivalence résulte du théorème 1.3.

THÉORÈME 4.10. — *Supposons que G soit semi-simple ; notons $P_1, \ldots, P_r$ les sous-groupes paraboliques maximaux de G qui contiennent B, et $\varpi_1, \ldots, \varpi_r$ les poids fondamentaux qui leur correspondent. Pour $i = 1, \ldots, r$, désignons par L_i le sous-groupe de Levi de P_i qui contient T, par $W_i \subset W$ le groupe de Weyl de (L_i, T), et par ρ_i la demi-somme des racines positives de (L_i, T). Identifions W/W_i à l'ensemble W^i de ses représentants minimaux dans W, et posons pour tout $w \in W^i$:*

$$\chi_w^{P_i} := \rho + w^{-1}\rho - 2\rho_i.$$

Alors un triplet (λ, μ, ν) de points de C appartient à $\mathscr{LR}(G)$ si et seulement si

$$(\lambda, u\varpi_i) + (\mu, v\varpi_i) + (\nu, w\varpi_i) \leq 0$$

pour $i = 1, \ldots, r$ et pour tout triplet (u, v, w) de W^i tel que $\sigma_u^{P_i} \cup \sigma_v^{P_i} \cup \sigma_w^{P_i} = \sigma_e^{P_i}$ dans $H^*(G/P_i)$, et que $(\chi_u^{P_i} + \chi_v^{P_i} + \chi_w^{P_i} - \chi_e^{P_i}, \varpi_i) = 0$.

Preuve (esquisse). — On applique le théorème 4.9 avec $\widehat{G} = G \times G$. Les poids de G dans $\widehat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ ne sont autres que les racines ; il en résulte que les sous-groupes à un paramètre dominants et admissibles de T ne sont autres que les multiples strictement positifs des poids fondamentaux (en identifiant $X_*(T)_{\mathbb{R}}$ à $\Lambda_{\mathbb{R}}$ par la forme de Killing).

Ce résultat, dû à Belkale et Kumar ([**4**, Th. 28]), raffine et généralise de nombreux travaux antérieurs, dont ceux de Klyachko [**21**] pour $G = \mathrm{SL}_n$ et de Kapovich, Leeb et Millson ([**17**]) pour G arbitraire. En fait, [**17**, Th. 5.5] décrit $\mathscr{LR}(G)$ par les inéquations linéaires provenant des couples couvrants au sens de la définition 3.8 ; le cas où $G = \mathrm{SL}_n$ n'est autre que la conjecture de Horn. Par ailleurs, le cône de la restriction $C(G, \widehat{G})$ est déterminé par Berenstein et Sjamaar en termes des inéquations linéaires qui proviennent des couples dominants ([**7**, Th. 3.1.1]).

L'énoncé suivant est dû à Ressayre ([**32**, Th. 10]) :

THÉORÈME 4.11. — *Les inéquations linéaires du théorème 4.10 sont deux à deux distinctes, et chacune définit une face de codimension* 1 *de* $\mathscr{LR}(G)$.

Preuve. — La première assertion résulte du fait que W_i est le groupe d'isotropie de ϖ_i dans W, si bien que (par exemple) les $u\varpi_i$, $u \in W^i$, sont deux à deux distincts.

Pour la seconde assertion, puisque le cône $\mathscr{LR}(G)$ est de dimension r, il suffit de construire des points de ce cône qui engendrent l'hyperplan d'équation $(\lambda, u\varpi_i) + (\mu, v\varpi_i) + (\nu, w\varpi_i) = 0$, où i et (u, v, w) vérifient les hypothèses. (Cet hyperplan n'est visiblement pas un mur de la chambre C^3.) L'équation s'écrit $\mu^\bullet(Y, \theta) = 0$ où $\theta \in X_*(T)$ est un multiple strictement positif de ϖ_i (ainsi, $L(\theta) = L_i$ et $P(\theta) = P_i$), et où

$$Y := L_i u^{-1}B/B \times L_i v^{-1}B/B \times L_i w^{-1}B/B \subset G/B \times G/B \times G/B = X.$$

De plus, $Y \cong (L_i/B \cap L_i)^3$.

Puisque G est semi-simple, l'application naturelle $\Lambda^3 \to \mathrm{Pic}^G(X)$ induit un isomorphisme $\Lambda^3_{\mathbb{R}} \cong \mathrm{Pic}^G(X)_{\mathbb{R}}$ (lemme 4.1). Cet isomorphisme identifie $\mathscr{LR}(G)$ au cône $\mathrm{Pic}^G(X)^+_{\mathbb{R}}$ engendré par les classes des fibrés G-effectifs. Si $\mathscr{L}$ est un tel fibré et si $\mu^{\mathscr{L}}(Y, \theta) = 0$, alors la restriction $\mathrm{res}(\mathscr{L}) := \mathscr{L}|_Y$ est un fibré L_i-effectif d'après le lemme 3.6. Autrement dit, avec des notations évidentes, $\mathscr{LR}(G) \cap (\mu^\bullet(Y, \theta) = 0)$ est contenu dans $\mathrm{res}^{-1}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Pic}^{L_i}(Y)^+_{\mathbb{R}})$. Mais ce dernier cône n'est autre que $\mathscr{LR}(L_i)$ (en effet, toujours d'après le lemme 4.1, $\mathrm{res}_{\mathbb{R}}$ s'identifie à l'application naturelle $\Lambda^3_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Pic}^{L_i}(Y)_{\mathbb{R}}$; l'assertion résulte alors de la définition de $\mathscr{LR}(L_i)$). Donc $\mathscr{LR}(G) \cap (\mu^\bullet(Y, \theta) = 0) \subset \mathscr{LR}(L_i)$.

Par hypothèse, le morphisme $\eta : G \times^P Y^+ \to X$ est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert Ω de X, stable par G et qui rencontre Y. Par ailleurs, les applications de restriction $\mathrm{Pic}^G(G \times^{P_i} Y^+) \to \mathrm{Pic}^{P_i}(Y^+) \to \mathrm{Pic}^{L_i}(Y)$ sont des isomorphismes d'après le lemme 3.7. On peut donc identifier res à $\eta^* : \mathrm{Pic}^G(X) \to \mathrm{Pic}^G(G \times^{P_i} Y^+)$. Toujours d'après le lemme 3.7, il en résulte que $\mathscr{LR}(L_i) \subset (\mu^\bullet(Y, \theta) = 0)$.

Par ailleurs, le cône $\mathscr{LR}(L_i)$ est de dimension $3r - 1$ d'après l'exemple 1.2 (suite). On peut donc choisir $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{3r-1} \in \mathrm{Pic}^G(X)$ linéairement indépendants, tels que $\mu^{\mathscr{L}_j}(Y, \theta) = 0$ et que $\mathscr{M}_j := \mathrm{res}(\mathscr{L}_j)$ soit L_i-effectif pour $j = 1, \ldots, 3r - 1$. Quitte à remplacer chaque $\mathscr{L}_j$ par une puissance strictement positive, on peut supposer qu'il existe une section non nulle $\tau_j \in H^0(Y, \mathscr{M}_j)^{L_i}$. D'après le lemme 3.7, τ_j s'étend en une unique section $\sigma_j \in H^0(G \times^{P_i} Y^+, \eta^*(\mathscr{L}_j))^G$. On peut voir σ_j comme une section rationnelle invariante de $\mathscr{L}_j$, régulière sur Ω. Soient $E_1, \ldots, E_m$ les composantes irréductibles de codimension 1 de $X \setminus \Omega$. Pour $k = 1, \ldots, m$, notons s_k la section canonique du diviseur E_k, et $a_k \in \mathbb{N}$ le maximum des ordres des pôles de $\sigma_1, \ldots, \sigma_{3r-1}$ le long de E_k. Alors chaque E_k est stable par G, donc $\mathscr{O}_X(E_k)$ est G-linéarisé et s_k est invariante. Par suite, $\mathscr{L}_0 := \mathcal{O}_X(\sum_{k=1}^m a_k E_k)$ est un fibré en droites G-linéarisé sur X, muni d'une section invariante $\sigma_0 := \prod_{k=1}^m s_k^{a_k}$ qui ne s'annule pas identiquement sur Y (car Ω rencontre Y). Ainsi, $\mathscr{L}_0$ définit un point de $\mathscr{LR}(G)$, et $\mu^{\mathscr{L}_0}(Y,\lambda) = 0$ d'après le lemme 3.7. De même, $\mathscr{L}_j \otimes \mathscr{L}_0$ est un fibré en droites G-linéarisé sur X, avec une section invariante $\sigma_j \otimes \sigma_0$ qui ne s'annule pas identiquement sur Y : on a aussi $\mathscr{L}_j \otimes \mathscr{L}_0 \in \mathscr{LR}(G) \cap (\mu^\bullet(Y,\lambda) = 0)$. Comme les $\mathscr{L}_j$ sont linéairement indépendants, il en résulte que le cône $\mathscr{LR}(G) \cap (\mu^\bullet(Y,\lambda) = 0)$ est de dimension $3r - 1$.

On montre de façon analogue que *les inéquations du théorème 4.9 sont minimales* ([**32**, Th. 10]) ; l'ingrédient nouveau est le fait que le cône $C(L(\lambda), \widehat{L}(\lambda))$ est de codimension 1 dans $\Lambda_{\mathbb{R}} \times \widehat{\Lambda}_{\mathbb{R}}$ pour tout λ admissible, ce qui résulte de [**28**, Cor. 1].

5. COMPLÉMENTS ET QUESTIONS OUVERTES

5.1. Le produit de Belkale et Kumar

Il s'agit d'une « dégénérescence » du produit $\cup$ sur la cohomologie des variétés de drapeaux, qui permet de mieux comprendre la structure du cône de la restriction. Avant de définir ce produit (en suivant [**4**]), introduisons quelques notations.

Soit P un sous-groupe parabolique de G contenant B. Comme en 4.1, on note W_P le groupe de Weyl de (P,T), et on désigne par W^P l'ensemble des représentants de longueur minimale de W/W_P. Pour tout $w \in W^P$, on note pour simplifier $C_w := C_w^P$ la cellule de Bruhat correspondante dans G/P ; on définit de même la variété de Schubert X_w et sa classe de cohomologie σ_w. Puisque $\dim(X_w) = \ell(w)$, le degré de σ_w est $2(\dim(G/P) - \ell(w))$. On a l'égalité dans $H^*(G/P)$:

$$\sigma_u \cup \sigma_v = \sum_{w \in W^P} c_{u,v}^w \, \sigma_w$$

où les « constantes de structure » $c_{u,v}^w$ sont des entiers uniquement déterminés. Pour des raisons de degré, on a $\ell(u)+\ell(v) = \ell(w)+\dim(G/P)$ lorsque $c_{u,v}^w \neq 0$. Par ailleurs, la base duale de $(\sigma_w)_{w \in W^P}$ pour la dualité de Poincaré est

$$(\sigma_w^\vee := \sigma_{w_0 w w_{0,P}})_{w \in W^P}$$

où on rappelle que w_0 (resp. $w_{0,P}$) désigne l'élément de plus grande longueur de W (resp. W_P) ; l'application $w \mapsto w_0 w w_{0,P}$ est une involution de W^P. On a donc

$$\sigma_u \cup \sigma_v \cup \sigma_w^\vee = c_{u,v}^w \, \sigma_e.$$

Comme pour le produit tensoriel (Exemple 1.1), on introduit une variante symétrique des $c_{u,v}^w$ en posant

$$\sigma_u \cup \sigma_v \cup \sigma_w = c_{u,v,w} \, \sigma_e$$

lorsque $\ell(u) + \ell(v) + \ell(w) = 2\dim(G/P)$; dans le cas contraire, on pose $c_{u,v,w} = 0$.

Supposons donc que $\ell(u)+\ell(v)+\ell(w) = \dim(G/P)$. D'après le théorème de transversalité de Kleiman, l'intersection des translatés $g_u X_u \cap g_v X_v \cap g_w X_w$ est transverse lorsque $g_u, g_v, g_w \in G$ sont généraux, et cette intersection consiste en $c_{u,v,w}$ points contenus dans $g_u C_u \cap g_v C_v \cap g_w C_w$. En particulier, $c_{u,v,w} \geq 0$, et $c_{u,v,w} > 0$ si et seulement si les translatés généraux de C_u, C_v et C_w se rencontrent. On va énoncer une version « infinitésimale » de ce critère ([**4**, Prop. 2]).

La variété de Schubert translatée $w^{-1}X_w$ est stable par T et contient le point de base P/P de l'espace homogène G/P comme point lisse et fixé par T. Notons T_w l'espace tangent en P/P à $w^{-1}C_w$, si bien que T_w est un sous-T-module du P-module $T_{P/P}(G/P)$.

Proposition 5.1. — *Pour tout triplet (u,v,w) de W^P, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $c_{u,v,w} > 0$.
(ii) $\ell(u) + \ell(v) + \ell(w) = \dim(G/P)$ *et de plus,* $p_u T_u \cap p_v T_v \cap p_w T_w = \{0\}$ *dans* $T_{P/P}(G/P)$ *lorsque* $p_u, p_v, p_w \in P$ *sont généraux.*

Définition 5.2. — *Soit L le sous-groupe de Levi de P qui contient T. On dit que (u,v,w) est L-*mobile *s'il existe p_u, p_v, p_w dans L qui vérifient la condition précédente* (ii) *de transversalité.*

Cette notion est en fait étroitement liée à celle de couple bien couvrant, comme le montre le résultat suivant (conséquence de [**4**, Cor. 8]) :

Proposition 5.3. — *Soient $\lambda \in X_*(T)$ dominant, $P = P(\lambda)$ et $L = L(\lambda)$; soient (u,v,w) un triplet de W^P, et $Y = Lu^{-1}B/B \times Lv^{-1}B/B \times Lw^{-1}B/B$ la composante irréductible de $(G/B \times G/B \times G/B)^\lambda$ qui lui correspond. On suppose que le couple (Y,λ) est couvrant. Alors ce couple est bien couvrant si et seulement si (u,v,w) est L-mobile.*

Le critère suivant ([**4**, Th. 15]) peut se déduire de la proposition 4.6 :

Proposition 5.4. — *Notons $\chi_w^P := \rho + w^{-1}\rho - 2\rho_L$ pour tout $w \in W^P$. Alors le triplet (u,v,w) de W^P est L-mobile si et seulement s'il satisfait aux conditions suivantes : $c_{u,v,w} \neq 0$ et $\langle \chi_u^P + \chi_v^P + \chi_w^P - \chi_e^P, \lambda\rangle = 0$ pour tout $\lambda \in X_*(T)$ tel que $P = P(\lambda)$.*

On définit un produit $\cup_0$ sur $H^*(G/P)$ par

$$\sigma_u \cup_0 \sigma_v = \sum_w c_{u,v}^w \, \sigma_w$$

où la somme porte sur les $w \in W^P$ tels que $(u, v, w_0ww_{0,P})$ soit L-mobile. Ainsi,

$$\sigma_u \cup_0 \sigma_v \cup_0 \sigma_w = \begin{cases} c_{u,v,w}\, \sigma_e & \text{si } (u,v,w) \text{ est } L\text{-mobile,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les deux conditions sur le triplet (u, v, w) de W^i énoncées à la fin du théorème 4.10 sont équivalentes à l'unique condition $\sigma_u \cup_0 \sigma_v \cup_0 \sigma_w = \sigma_e$ dans $H^*(G/P_i)$.

Tout comme $\cup$, le produit de Belkale-Kumar $\cup_0$ est commutatif et admet pour élément unité $\sigma_e^\vee = \sigma_{w_0w_{0,P}}$; il vérifie également la dualité de Poincaré. En fait, $\cup_0$ est aussi associatif, comme le montre le résultat suivant (conséquence de [**4**, Prop. 17]) :

PROPOSITION 5.5. — *Soit $\lambda \in X_*(T)$ dominant tel que $P = P(\lambda)$. Alors les sous-groupes*

$$F^n H^*(G/P) := \bigoplus_{w \in W^P,\ \langle \chi_w^P, \lambda \rangle \geq n} \mathbb{Z}\sigma_w \quad (n \in \mathbb{N})$$

forment une filtration décroissante de l'algèbre $(H^*(G/P), \cup)$, et l'algèbre graduée associée est isomorphe à $(H^*(G/P), \cup_0)$.

Le produit $\cup_0$ coïncide avec $\cup$ lorsque le sous-groupe parabolique P est *cominuscule*, c'est-à-dire lorsque P est maximal et $R_u(P)$ est abélien. (En effet, $R_u(P)$ opère alors trivialement dans son algèbre de Lie $\mathfrak{n}$, et donc aussi dans $T_{P/P}(G/P) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \cong \mathfrak{n}^*$; par suite, un triplet (u, v, w) est L-mobile si et seulement si $c_{u,v,w} \neq 0$.) Ceci s'applique en particulier à la grassmannienne

$$\mathrm{Gr}_{r,n} := \mathrm{GL}_n / P_r \quad (r = 1, \ldots, n-1)$$

qui paramètre les sous-espaces de dimension r de $\mathbb{C}^n$. L'ensemble W^{P_r} est alors formé des partitions $\lambda(I)$ associées aux sous-ensembles I de $\{1, \ldots, n\}$ ayant r éléments, comme dans l'exemple 1.1. De plus, la constante de structure $c_{I,J}^K$ est égale au coefficient de Littlewood-Richardson $c_{\lambda(I),\lambda(J)}^{\lambda(K)}$. Le théorème 4.10 redonne donc la description du cône $\mathcal{LR}_n = \mathcal{LR}(\mathrm{GL}_n)$ présentée à la fin de cet exemple.

Par contre, le produit $\cup_0$ est très différent de $\cup$ lorsque $P = B$ (si bien que $L = T$). En effet, la proposition 5.1 entraîne que le triplet (u, v, w) de W est T-mobile si et seulement si on a

$$R^+ = (R^+ \cap u(R^-)) \sqcup (R^+ \cap v(R^-)) \sqcup (R^+ \cap w(R^-));$$

sous cette condition, u et v déterminent uniquement le sous-ensemble $R^+ \cap w(R^-)$ de R^+, donc aussi w. Ainsi, *$\sigma_u \cup_0 \sigma_v$ est nul, ou multiple de σ_w pour un unique $w \in W$. On conjecture qu'on a alors $c_{u,v}^w = 1$.* Cette conjecture a été établie par Richmond lorsque $G = \mathrm{GL}_n$ ([**37**, Cor. 4]). Pour ce même groupe et un sous-groupe parabolique P arbitraire, Knutson et Purbhoo ont obtenu une expression des constantes de structure de $\cup_0$, comme produits de coefficients de Littlewood-Richardson ([**22**, Th. 3]) ; leur résultat redonne la conjecture ci-dessus lorsque $P = B$.

Il résulte de ces observations que le produit de Belkale-Kumar n'est pas fonctoriel, au sens où l'application $\pi^* : H^*(G/P) \to H^*(G/B)$ induite par la projection naturelle $\pi : G/B \to G/P$ est incompatible aux produits $\cup_0$. Cependant, Ressayre et Richmond ([**36**]) ont obtenu un résultat de fonctorialité pour l'inclusion $i : G/P(\lambda) \to \widehat{G}/\widehat{P}(\lambda)$ où $\lambda \in X_*(G)$; ils en ont déduit une formulation plus compacte du théorème 4.9.

5.2. Faces et multiplicités

On considère le cône de la restriction $C(G, \widehat{G})$, supposé d'intérieur non vide dans la chambre $C \times \widehat{C}$. Le théorème 4.9 détermine en fait les faces de codimension 1 de ce cône qui sont *régulières*, c'est-à-dire qui rencontrent l'intérieur de la chambre. On va présenter deux résultats de Ressayre qui décrivent les faces régulières de codimension arbitraire ([**33**, Th. 5]), ainsi que le comportement de la fonction multiplicité $(\nu, \widehat{\nu}) \mapsto m(\nu, \widehat{\nu})$ en restriction à ces faces ([**35**, Th. 1]).

Ces résultats s'énoncent plus commodément en termes du cône modifié

$$C^*(G, \widehat{G}) := \{(\nu, \widehat{\nu}) \in C \times \widehat{C} \mid (\nu, \widehat{\nu}^*) \in C(G, \widehat{G})\}.$$

Observons que ce cône est engendré par les couples $(\nu, \widehat{\nu})$ de poids dominants tels que le fibré en droites G-linéarisé $\mathcal{L}(\nu, \widehat{\nu})$ soit G-effectif.

Définition 5.6. — *Un sous-tore S de T est dit* admissible *si S est la composante neutre de l'intersection des noyaux de poids de T dans $\widehat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.*

Soient $\widehat{W}^S$ le centralisateur de S dans $\widehat{W}$, et $\widehat{w} \in \widehat{W}/\widehat{W}^S$; posons

$$Y_{e,\widehat{w}} := G^S B/B \times \widehat{G}^S \widehat{w} \widehat{B}/\widehat{B}$$

(c'est une composante connexe de X^S, isomorphe à la variété des drapeaux de $G^S \times \widehat{G}^S$).

On dit que le couple $(S, \widehat{w})$ est admissible *si S l'est, et s'il existe $\lambda \in X_*(S)$ tel que $Y_{e,\widehat{w}}$ soit une composante connexe de X^λ et que le couple $(Y_{e,\widehat{w}}, \lambda)$ soit bien couvrant.*

On a une caractérisation cohomologique des couples admissibles ([**33**, Lem. 6]), dont l'énoncé et la preuve sont analogues à ceux de la proposition 4.6.

À tout couple admissible $(S, \widehat{w})$, on associe l'ensemble

$$F(S, \widehat{w}) := \{(\nu, \widehat{\nu}) \in C^*(G, \widehat{G}) \mid (\nu + \widehat{w}\widehat{\nu})|_S = 0\}.$$

Proposition 5.7. — *L'application $(S, \widehat{w}) \mapsto F(S, \widehat{w})$ est une bijection entre les couples admissibles et les faces régulières de $C^*(G, \widehat{G})$. De plus, la dimension de S est la codimension de $F(S, \widehat{w})$. Pour que $F(S, \widehat{w}) \subset F(S', \widehat{w}')$, il faut et il suffit que $S' \subset S$ et que $\widehat{w}'\widehat{G}^{S'} = \widehat{w}\widehat{G}^{S'}$.*

Par exemple, les faces régulières de codimension 1 proviennent de sous-tores de la forme $\mathrm{Im}(w^{-1}\lambda)$ où $w \in W$ et λ est dominant et admissible ; on retrouve ainsi le théorème 4.9.

Pour les multiplicités, on introduit de même la fonction modifiée

$$m^*_{G,\widehat{G}}(\nu,\widehat{\nu}) := m(\nu,\widehat{\nu}^*) = \dim(V_G(\nu) \otimes \mathrm{Res}^{\widehat{G}}_G V_{\widehat{G}}(\widehat{\nu}))^G.$$

On peut maintenant énoncer :

PROPOSITION 5.8. — *Soient $(S,\widehat{w})$ un couple admissible, et $(\nu,\widehat{\nu})$ un couple de poids dominants tels que $(\nu + \widehat{w}\widehat{\nu})|_S = 0$. Alors*

$$m^*_{G,\widehat{G}}(\nu,\widehat{\nu}) = m^*_{G^S,\widehat{G}^S}(\nu,\widehat{w}\widehat{\nu}).$$

Ce résultat se déduit aussitôt du théorème de Borel-Weil et de l'énoncé géométrique suivant ([**35**, Th. 2]), qui a un intérêt propre :

PROPOSITION 5.9. — *Soient $\mathscr{L}$ un fibré en droites G-linéarisé et G-effectif sur $X = G/B \times \widehat{G}/\widehat{B}$, et (Y,λ) un couple bien couvrant tel que $\mu^{\mathscr{L}}(Y,\lambda) = 0$. Alors la restriction*

$$\mathrm{res} : H^0(X,\mathscr{L})^G \to H^0(Y,\mathscr{L})^L$$

est un isomorphisme.

Preuve. — Notons $\overline{Y^+}$ l'adhérence de Y^+ dans X ; c'est une sous-variété stable par P, et le morphisme $\eta : G \times^P Y^+ \to X$ s'étend en un morphisme propre et birationnel

$$\overline{\eta} : G \times^P \overline{Y^+} \to X.$$

On en déduit un isomorphisme $H^0(X,\mathscr{L})^G \cong H^0(G \times^P \overline{Y^+}, \overline{\eta}^*(\mathscr{L}))^G$. Par ailleurs, on montre comme dans la preuve du lemme 3.7 que la restriction

$$H^0(G \times^P \overline{Y^+}, \overline{\eta}^*(\mathscr{L}))^G \to H^0(\overline{Y^+},\mathscr{L})^P$$

est un isomorphisme ; toujours d'après ce lemme, la restriction

$$H^0(Y^+,\mathscr{L})^P \to H^0(Y,\mathscr{L})^L$$

est aussi un isomorphisme. Il suffit donc de montrer que la restriction

$$H^0(\overline{Y^+},\mathscr{L})^P \to H^0(Y^+,\mathscr{L})^P$$

est un isomorphisme.

D'après le lemme 4.2, $\overline{Y^+}$ est une variété de Schubert ; elle est donc normale. On est ainsi ramené à montrer que tout $\sigma \in H^0(Y^+,\mathscr{L})^P$ est défini le long de tout diviseur irréductible D de $\overline{Y^+}$ qui ne rencontre pas Y^+. Pour cela, on va utiliser la structure locale d'une variété de Schubert le long d'un diviseur de Schubert.

Il existe un unique point $y \in Y^+$ fixé par $T \times \widehat{T}$ et dont l'orbite $(B \times \widehat{B})y$ est ouverte dans Y^+, et de même un unique $z \in D^{T\times\widehat{T}}$ tel que $(B \times \widehat{B})z$ soit ouvert dans D. De plus, on a une unique courbe irréductible de $\overline{Y^+}$, stable par $T \times \widehat{T}$ et contenant y et z ; cette courbe, qu'on notera Σ, est isomorphe à la droite projective. Enfin, z admet un unique voisinage Ω dans $\overline{Y^+}$, affine et stable par $T \times \widehat{T}$; on a un isomorphisme équivariant

$$\Omega \cong \Omega^+ \times (\Sigma \setminus \{y\})$$

où Ω^+ est un espace affine dans lequel $T \times \widehat{T}$ opère linéairement avec des poids tous positifs (relativement à λ), et $\Sigma \setminus \{y\}$ est la droite affine dans laquelle $T \times \widehat{T}$ opère linéairement avec un poids $\chi_{y,z}$ tel que $\langle \chi_{y,z}, \lambda \rangle < 0$. De plus, cet isomorphisme se restreint en un isomorphisme $D \cap \Omega \cong \Omega^+ \times \{z\}$.

La restriction $\mathscr{L}|_\Omega$ est donc le fibré T-linéarisé trivial associé au poids χ_z de T dans la fibre $\mathscr{L}_z$. Notons de même χ_y le poids de T dans $\mathscr{L}_y$; alors

$$\langle \chi_y - \chi_z, \lambda \rangle = \deg(\mathscr{L}|_\Sigma) \, \langle \chi_{yz}, \lambda \rangle.$$

Puisque $\langle \chi_y, \lambda \rangle = -\mu^{\mathscr{L}}(Y, \lambda) = 0$, on obtient

$$\deg(\mathscr{L}|_\Sigma) = -\frac{\langle \chi_z, \lambda \rangle}{\langle \chi_{y,z}, \lambda \rangle}.$$

Mais $\deg(\mathscr{L}|_\Sigma) \geq 0$ car $\mathscr{L}$ est G-effectif et donc engendré par ses sections globales. Ainsi, on a $\langle \chi_z, \lambda \rangle \leq 0$.

Soit w une coordonnée sur $\Sigma \setminus \{y\}$, qu'on voit comme une coordonnée sur l'espace affine Ω. Alors la restriction $\sigma|_\Omega \in H^0(\Omega, \mathscr{L})$ est invariante par T et régulière hors du diviseur $D \cap \Omega = (w = 0)$; elle s'identifie donc à un vecteur propre de T dans l'algèbre $\mathbb{C}[\Omega^+][w, w^{-1}]$, de poids $-\chi_z$. En considérant le poids relativement à λ, il en résulte que $\sigma \in \mathbb{C}[\Omega^+][w]$, c'est-à-dire que σ est définie le long de D.

La proposition 5.8 ramène la détermination des multiplicités sur une face à des groupes réductifs plus petits ; elle généralise un résultat de Roth sur les coefficients de Littlewood-Richardson ([**38**, Th. 3.1.1]) . On en trouvera d'autres applications, tant classiques que récentes, dans [**35**, Sec. 4].

Une question ouverte et très naturelle est de *caractériser les faces (non nécessairement régulières) du cône de la restriction, sur lesquelles la multiplicité vaut identiquement* 1. Dans cet ordre d'idées, on a le résultat suivant sur les coefficients de Littlewood-Richardson pour GL_n :

$$\text{si } c_{\lambda,\mu}^{\nu} = 1, \text{ alors } c_{N\lambda,N\mu}^{N\nu} = 1 \text{ pour tout } N \geq 1.$$

Cette conjecture de Fulton a été démontrée par Knutson, Tao et Woodward de façon combinatoire ([**24**]). Des preuves géométriques ont été obtenues par Belkale ([**3**]) et Ressayre ([**34**]).

Une version de la conjecture de Fulton pour un groupe G arbitraire est due à Belkale, Kumar et Ressayre ([**6**]) ; leur résultat, dont l'énoncé est assez technique, associe à chaque constante de structure égale à 1 pour le produit de Belkale et Kumar, une demi-droite d'un cône de Littlewood-Richardson sur laquelle la multiplicité vaut identiquement 1.

5.3. Cônes G-amples, saturation

Le cône de la restriction considéré dans cet exposé est en fait étroitement lié au « cône G-ample » de la théorie géométrique des invariants. Rappelons la définition de ce cône, introduit par Dolgachev et Hu ([**12**]). Soit X une variété algébrique complexe, projective et normale, munie d'une action du groupe réductif connexe G. Notons $\mathrm{NS}^G(X)$ le quotient du groupe $\mathrm{Pic}^G(X)$ par la relation de « G-équivalence algébrique » définie de façon évidente. On a une suite exacte

$$0 \to X^*(G) \to \mathrm{NS}^G(X) \to \mathrm{NS}(X)$$

où $\mathrm{NS}(X)$ désigne le groupe de Néron-Severi ; de plus, l'image de $\mathrm{NS}^G(X)$ est d'indice fini dans $\mathrm{NS}(X)$. En particulier, le groupe abélien $\mathrm{NS}^G(X)$ est de type fini.

Pour un fibré en droites G-linéarisé, on montre que la propriété d'être ample et G-effectif est invariante par G-équivalence algébrique. De plus, les classes dans $\mathrm{NS}^G(X)$ des fibrés en droites amples et G-effectifs forment un sous-monoïde, noté $\mathrm{NS}^G(X)^+$. Le *cône G-ample*, noté $C^G(X)$, est le cône engendré par $\mathrm{NS}^G(X)^+$ dans l'espace vectoriel réel $\mathrm{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}$; il est visiblement convexe et contenu dans l'image réciproque du cône ample, qu'on note $A^G(X)$. D'après [**31**, Th. 4], *$C^G(X)$ est défini dans $A^G(X)$ par un nombre fini d'inéquations linéaires rationnelles.*

Lorsque $X = G/B \times \widehat{G}/\widehat{B}$, le cône $A^G(X)$ n'est autre que l'intérieur de la chambre $C \times \widehat{C}$, et $C^G(X)$ est l'intersection de $C(G, \widehat{G})$ et de cet intérieur. En fait, une grande partie des résultats présentés dans cet exposé s'étendent au cône G-ample d'une G-variété X arbitraire ; on renvoie à [**32, 33**] pour ces développements.

Dans une toute autre direction, une importante question ouverte est de *déterminer les groupes semi-simples G tels que le monoïde de Littlewood-Richardson* $\mathrm{LR}(G)$ *soit saturé.* Rappelons que c'est le cas pour SL_n, la première preuve, de nature combinatoire, étant due à Knutson et Tao ([**23**]). Une autre démonstration a été obtenue par Derksen et Weyman, qui ont identifié LR_n au monoïde formé des degrés des semi-invariants d'un certain carquois ([**10**]) ; dans un article ultérieur ([**11**]), ils ont développé des méthodes de représentations des carquois pour décrire les faces du cône $\mathscr{LR}_n$. On trouvera aussi une preuve géométrique de la saturation de LR_n dans l'article [**2**] de Belkale.

Par ailleurs, Kapovich et Millson ont décrit explicitement le monoïde $\mathrm{LR}(G)$ lorsque G est de type B_2 ou G_2 ; dans les deux cas, ce monoïde n'est pas saturé. On conjecture que $\mathrm{LR}(G)$ *est saturé si G est simple et simplement lacé* (c'est-à-dire, si toutes ses racines ont la même longueur). Cette conjecture a été vérifiée par Kapovich, Kumar et Millson en type D_4 ([**16**]). Pour un groupe G arbitraire, on conjecture une version plus faible de la saturation : *soient* λ, μ, ν *des poids dominants* réguliers *tels que* $\lambda+\mu+\nu\in\Lambda_R$. *S'il existe un entier* $N\geq 1$ *tel que* $(V_{N\lambda}\otimes V_{N\mu}\otimes V_{N\nu})^G\neq 0$, *alors* $(V_\lambda\otimes V_\mu\otimes V_\nu)^G\neq 0$.

Une autre version affaiblie de la saturation a été obtenue par Kapovich et Millson ([**18**, Th. 1.1] ; voir aussi [**1**, Th. 1.1]) : il existe un entier $k=k_G\geq 1$ tel que, pour tous les poids dominants λ, μ, ν qui vérifient $\lambda+\mu+\nu\in\Lambda_R$ et $(V_{N\lambda}\otimes V_{N\mu}\otimes V_{N\nu})^G\neq 0$ pour un certain $N\geq 1$, on ait $(V_{k\lambda}\otimes V_{k\mu}\otimes V_{k\nu})^G\neq 0$. De plus, lorsque G est simple, on peut prendre pour « facteur de saturation » k le carré du plus petit commun multiple des coefficients de la plus grande racine du système de racines dual $R^\vee$, dans la base des coracines simples.

En particulier, k_G vaut 1 pour $G=\mathrm{SL}_n$, ce qui redonne la saturation dans ce cas. Pour un groupe G arbitraire, on conjecture que $k_G=2$ suffit. Ceci a été établi pour SO_{2n+1} et Sp_{2n} par Belkale et Kumar ([**5**, Th. 6, Th.7]), puis pour SO_{2n} par Sam ([**39**, Th. 1.1]) ; ce dernier obtient en fait un résultat uniforme pour tous les groupes classiques, par des méthodes de représentations de carquois munis de structures supplémentaires.

Remerciements

Ce texte doit beaucoup à des discussions et échanges avec Nicolas Ressayre. Je le remercie également, ainsi que Shrawan Kumar et Michèle Vergne, pour une lecture attentive de versions préliminaires.

RÉFÉRENCES

[1] N. Bardy-Panse, C. Charignon, S. Gaussent & G. Rousseau – Applications des immeubles en théorie des représentations, prépublication arXiv:1007.3803.

[2] P. Belkale – Geometric proofs of Horn and saturation conjectures, *J. Algebraic Geom.* **15** (2006), n° 1, p. 133–173.

[3] ———, Geometric proof of a conjecture of Fulton, *Adv. Math.* **216** (2007), n° 1, p. 346–357.

[4] P. Belkale & S. Kumar – Eigenvalue problem and a new product in cohomology of flag varieties, *Invent. Math.* **166** (2006), n° 1, p. 185–228.

[5] ———, Eigencone, saturation and Horn problems for symplectic and odd orthogonal groups, *J. Algebraic Geom.* **19** (2010), n° 2, p. 199–242.

[6] P. Belkale, S. Kumar & N. Ressayre – A generalization of Fulton's conjecture for arbitrary groups, *Math. Ann.* **354** (2012), n° 2, p. 401–425.

[7] A. Berenstein & R. Sjamaar – Coadjoint orbits, moment polytopes, and the Hilbert-Mumford criterion, *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), n° 2, p. 433–466.

[8] A. Białynicki-Birula – Some theorems on actions of algebraic groups, *Ann. of Math.* **98** (1973), p. 480–497.

[9] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique*, Hermann, 1975, Fasc. XXXVIII : Groupes et algèbres de Lie. Chapitre VII : Sous-algèbres de Cartan, éléments réguliers. Chapitre VIII : Algèbres de Lie semi-simples déployées, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1364.

[10] H. Derksen & J. Weyman – Semi-invariants of quivers and saturation for Littlewood-Richardson coefficients, *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), n° 3, p. 467–479.

[11] ______, The combinatorics of quiver representations, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **61** (2011), n° 3, p. 1061–1131.

[12] I. V. Dolgachev & Y. Hu – Variation of geometric invariant theory quotients, *Publ. Math. I.H.É.S.* (1998), n° 87, p. 5–56.

[13] V. Guillemin & S. Sternberg – Geometric quantization and multiplicities of group representations, *Invent. Math.* **67** (1982), n° 3, p. 515–538.

[14] G. J. Heckman – Projections of orbits and asymptotic behavior of multiplicities for compact connected Lie groups, *Invent. Math.* **67** (1982), n° 2, p. 333–356.

[15] A. Horn – Eigenvalues of sums of Hermitian matrices, *Pacific J. Math.* **12** (1962), p. 225–241.

[16] M. Kapovich, S. Kumar & J. J. Millson – The eigencone and saturation for Spin(8), *Pure Appl. Math. Q.* **5** (2009), n° 2, Special Issue : In honor of Friedrich Hirzebruch. Part 1, p. 755–780.

[17] M. Kapovich, B. Leeb & J. J. Millson – The generalized triangle inequalities in symmetric spaces and buildings with applications to algebra, *Mem. Amer. Math. Soc.* **192** (2008), n° 896.

[18] M. Kapovich & J. J. Millson – A path model for geodesics in Euclidean buildings and its applications to representation theory, *Groups Geom. Dyn.* **2** (2008), n° 3, p. 405–480.

[19] F. Kirwan – Convexity properties of the moment mapping. III, *Invent. Math.* **77** (1984), n° 3, p. 547–552.

[20] F. C. Kirwan – *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Mathematical Notes, vol. 31, Princeton Univ. Press, 1984.

[21] A. A. Klyachko – Stable bundles, representation theory and Hermitian operators, *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), n° 3, p. 419–445.

[22] A. Knutson & K. Purbhoo – Product and puzzle formulae for GL_n Belkale-Kumar coefficients, *Electron. J. Combin.* **18** (2011), n° 1, Paper 76, 20 p.

[23] A. Knutson & T. Tao – The honeycomb model of $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ tensor products. I. Proof of the saturation conjecture, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), n° 4, p. 1055–1090.

[24] A. Knutson, T. Tao & C. Woodward – The honeycomb model of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tensor products. II. Puzzles determine facets of the Littlewood-Richardson cone, *J. Amer. Math. Soc.* **17** (2004), n° 1, p. 19–48.

[25] B. Kostant – On convexity, the Weyl group and the Iwasawa decomposition, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **6** (1973), p. 413–455.

[26] P. Littelmann – Paths and root operators in representation theory, *Ann. of Math.* **142** (1995), n° 3, p. 499–525.

[27] I. G. Macdonald – *Symmetric functions and Hall polynomials*, second éd., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford Univ. Press, 1995.

[28] P.-L. Montagard & N. Ressayre – Sur des faces du cône de Littlewood-Richardson généralisé, *Bull. Soc. Math. France* **135** (2007), n° 3, p. 343–365.

[29] D. Mumford, J. Fogarty & F. C. Kirwan – *Geometric invariant theory*, 3e éd., Ergebn. Math. Grenzg., vol. 34, Springer, 1994.

[30] L. Ness – A stratification of the null cone via the moment map, *Amer. J. Math.* **106** (1984), n° 6, p. 1281–1329.

[31] N. Ressayre – The GIT-equivalence for G-line bundles, *Geom. Dedicata* **81** (2000), nos 1-3, p. 295–324.

[32] ———, Geometric invariant theory and the generalized eigenvalue problem, *Invent. Math.* **180** (2010), n° 2, p. 389–441.

[33] ———, Geometric invariant theory and generalized eigenvalue problem II, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **61** (2011), n° 4, p. 1467–1491.

[34] ———, A short geometric proof of a conjecture of Fulton, *Enseign. Math.* **57** (2011), nos 1-2, p. 103–115.

[35] ———, Reductions for branching coefficients, prépublication arXiv:1102.0196.

[36] N. Ressayre & E. Richmond – Branching Schubert calculus and the Belkale-Kumar product on cohomology, *Proc. Amer. Math. Soc.* **139** (2011), n° 3, p. 835–848.

[37] E. Richmond – A partial Horn recursion in the cohomology of flag varieties, *J. Algebraic Combin.* **30** (2009), n° 1, p. 1–17.

[38] M. Roth – Reduction rules for Littlewood-Richardson coefficients, *Int. Math. Res. Not.* **2011** (2011), n° 18, p. 4105–4134.

[39] S. V. Sam – Symmetric quivers, invariant theory, and saturation theorems for the classical groups, *Adv. Math.* **229** (2012), n° 2, p. 1104–1135.

Michel BRION

En congé de l'Institut Fourier
B.P. 74
38402 Saint-Martin d'Hères Cedex
E-mail : mbrion@ujf-grenoble.fr