

# *Astérisque*

PIERRE DELIGNE

## **Multizêtas, d'après Francis Brown**

*Astérisque*, tome 352 (2013), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 1048, p. 161-185

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_2013\\_\\_352\\_\\_161\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_2013__352__161_0)

© Société mathématique de France, 2013, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## MULTIZÊTAS, D'APRÈS FRANCIS BROWN

par Pierre DELIGNE

### 0. INTRODUCTION

Soient  $k \geq 0$  et  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$  une suite de  $k$  entiers  $\geq 1$ . Le nombre multizêta  $\zeta(\mathbf{s})$  est la somme itérée (l'appellation est expliquée en 1.1)

$$(0.1) \quad \zeta(\mathbf{s}) := \sum_{n_1 > \dots > n_k > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}}$$

(somme sur les suites strictement décroissantes de  $k$  entiers  $> 0$ ). Pour  $k = 0$ , cette définition donne  $\zeta(\mathbf{s}) = 1$ . Pour  $k \geq 1$ , la somme (0.1) converge si et seulement si  $s_1 \geq 2$ . Nous ne considérerons que les  $\zeta(\mathbf{s})$  *convergen*ts, i.e. tels que (0.1) converge.

Le produit de deux nombres multizêtas est une combinaison linéaire à coefficients entiers de nombres multizêtas. Voir 3.6. Il revient donc au même de déterminer les relations polynomiales à coefficients rationnels entre les nombres multizêtas, ou de déterminer les relations  $\mathbb{Q}$ -linéaires entre eux.

Pour  $k = 1$ , les  $\zeta(\mathbf{s})$  convergen

ts sont les valeurs en les entiers  $n \geq 2$  de la fonction  $\zeta$  de Riemann. Euler a montré que pour  $n$  pair,  $\zeta(n)$  est un multiple rationnel de  $\pi^n$  ([3]). Calculant  $\zeta(3)$  avec 10 chiffres significatifs, il a aussi vérifié que  $\zeta(3)$  n'était pas le produit de  $\pi^3$  par un nombre rationnel de petit dénominateur. À la suite d'une correspondance avec Goldbach, Euler a étudié dans [4], pour  $k = 2$ , la variante des sommes (0.1) dans laquelle on somme sur  $n_1 \geq n_2$  :  $\zeta_{\text{Euler}}(s_1, s_2) = \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_1 + s_2)$ . Il prouve une série de relations  $\mathbb{Q}$ -linéaires entre nombres multizêtas, parmi lesquelles  $\zeta(2, 1) = \zeta(3)$ . Une de ses motivations était l'espoir d'obtenir des informations sur les valeurs de  $\zeta$  en les entiers impairs  $\geq 3$  (voir la fin de sa lettre à Goldbach du 5 janvier 1743).

Le problème de déterminer toutes les relations  $\mathbb{Q}$ -linéaires entre nombres multizêtas a deux aspects :

- (A) À quelles relations faut-il s'attendre ? Les prouver.  
 (B) Prouver qu'il n'y en a pas d'autres.

L'évidence disponible, tant numérique que théorique, suggère que toute relation  $\mathbb{Q}$ -linéaire entre les  $\zeta(\mathbf{s})$  est somme de relations *isobares*, i.e. entre  $\zeta(\mathbf{s})$  de même poids  $\sum s_i$ . Si on se limite à ne considérer que les relations isobares, on ne sait rien sur le problème (B). Nous ne parlerons que de (A).

F. Brown a défini une classe de relations  $\mathbb{Q}$ -linéaires entre les  $\zeta(\mathbf{s})$ , les relations *motiviques*. Plus précisément, il définit une  $\mathbb{Q}$ -algèbre graduée  $\mathcal{M}$ , des éléments homogènes  $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$  de  $\mathcal{M}$ , de degré le poids  $\sum s_i$  de  $\mathbf{s}$ , et un homomorphisme réel :  $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\text{real}(\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})) = \zeta(\mathbf{s})$ . L'algèbre  $\mathcal{M}$  est en tant qu'espace vectoriel engendrée par les  $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$ . Les *relations motiviques* entre  $\zeta(\mathbf{s})$  sont celles qui proviennent de relations entre les  $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$ .

Une variante de la conjecture des périodes de Grothendieck implique que toute relation  $\mathbb{Q}$ -linéaire entre les  $\zeta(\mathbf{s})$  est motivique. Cette prédiction a été vérifiée pour beaucoup des relations connues. Mise en garde : si certaines preuves de relations entre les  $\zeta(\mathbf{s})$  sont faciles à relever en une preuve des mêmes relations entre les  $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$ , c'est loin d'être toujours le cas.

**THÉORÈME 0.2** (F. Brown [1]). – *Les  $\zeta^{\mathbf{m}}(s_1, \dots, s_k)$  pour lesquels chaque  $s_i$  vaut 2 ou 3 forment une base de  $\mathcal{M}$  sur  $\mathbb{Q}$ .*

Chaque  $\zeta(\mathbf{s})$  peut donc être exprimé uniquement, de façon motivique, comme combinaison linéaire à coefficients rationnels de  $\zeta(s_1, \dots, s_k)$  avec  $k \geq 0$  et chaque  $s_i \in \{2, 3\}$ . Malheureusement, la preuve de Brown ne fournit pas un algorithme, du moins pas un algorithme utilisable, pour trouver quelle est cette combinaison linéaire. Du théorème 0.2, F. Brown déduit que la catégorie des motifs de Tate mixte sur  $\mathbb{Z}$  est engendrée par le groupe fondamental de  $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ . Voir 7.18.

Certaines de nos notations diffèrent de celles de [1]. La correspondance entre les notations est involutive :  $\zeta(s_1, \dots, s_k)$  devient  $\zeta(s_k, \dots, s_1)$ , la composition des chemins  $\alpha\beta$  devient  $\beta\alpha$ , un monôme en les  $e_t$  (resp. une suite de 0 et 1) est à remplacer par le même, lu de droite à gauche, et  $e_1$  est à remplacer par  $-e_1$ .

## 1. FORMULE INTÉGRALE

**1.1.** Soient  $\omega_1, \dots, \omega_N$  des 1-formes sur l'intervalle  $[0, 1]$ . L'intégrale itérée  $It_0^1 \omega_1, \dots, \omega_N$  est l'intégrale, sur le simplexe

$$(1.1.1) \quad \sigma_N := \{(t_1, \dots, t_N) \mid 1 \geq t_1 \geq \dots \geq t_N \geq 0\},$$

contenu dans le cube  $[0, 1]^N$ , de  $\text{pr}_1^* \omega_1 \wedge \text{pr}_2^* \omega_2 \wedge \dots \wedge \text{pr}_N^* \omega_N$ . Soit  $S$  l'opération qui à une 1-forme  $\omega$  attache la fonction  $S[\omega](t) := \int_0^t \omega$ . L'intégrale itérée  $It \int_0^1 \omega_1, \dots, \omega_N$  peut être construite comme suit : appliquer  $S$  à  $\omega_N$ , multiplier la fonction obtenue par  $\omega_{N-1}$ , appliquer  $S$ , multiplier par  $\omega_{N-2}, \dots$ , à la fin, évaluer en 1 :

$$(1.1.2) \quad It \int_0^1 \omega_1, \dots, \omega_N = S[\omega_1 \cdot S[\omega_2 \dots S[\omega_N] \dots]](1).$$

C'est cette construction qui explique l'appellation « *intégrale itérée* ». Une somme telle que (0.1) admet une description analogue, en terme de l'opérateur  $\sum$  qui à une fonction  $f(n)$  ( $n \geq 1$ ) attache la fonction  $\sum[f](n) := \sum_{m=1}^{n-1} f(m)$ ; ceci explique l'appellation de « *somme itérée* » donnée à (0.1).

Calculons ainsi l'intégrale itérée

$$(1.1.3) \quad It \int_0^1 \underbrace{\frac{dt}{t}, \dots, \frac{dt}{t}}_{(s_1-1)\text{fois}}, \underbrace{\frac{dt}{1-t}, \frac{dt}{t}, \dots, \frac{dt}{t}}_{(s_2-1)\text{fois}}, \dots, \underbrace{\frac{dt}{1-t}, \dots, \frac{dt}{t}}_{(s_k-1)\text{fois}}, \frac{dt}{1-t}.$$

On a  $\frac{dt}{1-t} = \sum_{n \geq 0} t^n dt$ . Appliquant  $S$  terme à terme, on obtient  $\sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n}$ . Multipliant par  $\frac{dt}{t}$  et appliquant  $S$ , on obtient  $\sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n^2}$ . Itérant  $(s_k - 1)$  fois, on obtient  $\sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n^{s_k}}$ .

Multipliant par  $\frac{dt}{1-t} = \sum_{m \geq 0} t^m dt$  et appliquant  $S$ , on obtient

$$S\left(\sum_{m \geq 0, n \geq 1} \frac{t^{m+n}}{n^{s_k}} dt\right) = \sum_{m, n \geq 1} \frac{t^{m+n}}{(m+n)n^{s_k}} = \sum_{m > n > 0} \frac{t^m}{mn^{s_k}}.$$

Continuant ainsi, on obtient finalement la

PROPOSITION 1.2. — *L'intégrale itérée (1.1.3) vaut  $\zeta(s_1, \dots, s_k)$ .*

**1.3.** Alors que la notion de somme infinie est étrangère à la géométrie algébrique, l'étude d'intégrales de quantités algébriques en est une des sources. C'est grâce à la proposition 1.2 que la géométrie algébrique, plus précisément la théorie des motifs de Tate mixte, est utile à l'étude des nombres multizétas.

## 2. GROUPE FONDAMENTAL PRO-UNIPOTENT ET COHOMOLOGIE

**2.1.** Nous aurons besoin d'une variante  $\mathcal{L}'$  de la série centrale descendante  $\mathcal{L}$  d'un groupe  $\Gamma$ . Pour chaque  $i \geq 1$ ,  $\Gamma/\mathcal{L}^i$  est un groupe nilpotent. L'ensemble  $T_i$  de ses éléments de torsion est donc un sous-groupe. On définit  $\mathcal{L}'^i$  comme étant l'image inverse de  $T_i$  dans  $\Gamma$ . Ci-dessous, nous supposons toujours  $\Gamma$  de génération finie.

Cette hypothèse implique que les  $\mathcal{L}^{i_i} / \mathcal{L}^{i_i+1}$  sont des groupes abéliens libres de type fini.

Supposons tout d'abord  $\Gamma$  nilpotent sans torsion, i.e. qu'il existe  $A$  tel que  $\mathcal{L}^{i_A} = 0$ . Pour chaque  $i$  ( $1 \leq i < A$ ), choisissons une base de  $\mathcal{L}^{i_i} / \mathcal{L}^{i_i+1}$  et relevons-la dans  $\mathcal{L}^{i_i}$ . Soient  $\gamma_1, \dots, \gamma_M$  les éléments de  $\Gamma$  obtenus, rangés dans un ordre quelconque, et soit  $w(j)$  l'entier  $i$  tel que  $\gamma_j$  relève un élément d'une base de  $\mathcal{L}^{i_i} / \mathcal{L}^{i_i+1}$ . On vérifie par induction sur  $A$  que l'application

$$\mathbb{Z}^M \rightarrow \Gamma: \mathbf{n} \mapsto \gamma_1^{n_1} \dots \gamma_M^{n_M}$$

est bijective. Dans un tel « système de coordonnées », la loi de groupe de  $\Gamma$  est donnée par des polynômes à coefficients rationnels et à valeurs entières sur les entiers. Plus précisément, si la coordonnée d'indice  $j$  est vue comme étant de poids  $w(j)$ , la  $j$ -ième coordonnée de  $\mathbf{m} \circ \mathbf{n}$  est un polynôme de poids  $\leq w(j)$  en les  $m_k$  et  $n_l$ .

Les mêmes polynômes définissent un groupe algébrique unipotent sur  $\mathbb{Q}$ , l'enveloppe unipotente  $\Gamma^{\text{un}}$  de  $\Gamma$ . Le groupe  $\Gamma^{\text{un}}(\mathbb{Q})$  de ses points rationnels est  $\mathbb{Q}^M$ , muni de la loi de groupe donnée par les mêmes formules que celle de  $\Gamma$ . Le groupe  $\Gamma^{\text{un}}(\mathbb{Q})$  est la complétion de Malcev  $\Gamma \otimes \mathbb{Q}$  de  $\Gamma$ .

Soient  $\mathbb{Q}[\Gamma]$  l'algèbre de groupe de  $\Gamma$ , et  $I$  son idéal d'augmentation. Quillen a donné une description élégante de l'algèbre affine  $\mathcal{O}(\Gamma^{\text{un}})$  de  $\Gamma^{\text{un}}$  : c'est la limite inductive des duals des  $\mathbb{Q}[\Gamma]/I^N$ . Plus précisément, l'inclusion de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{Q}[\Gamma]$  identifie le dual de  $\mathbb{Q}[\Gamma]$  à l'espace des fonctions  $\Gamma \rightarrow \mathbb{Q}$ , et par cette identification le dual de  $\mathbb{Q}[\Gamma]/I^{N+1}$  devient l'espace des polynômes en les  $n_j$  de poids  $\leq N$ .

Pour  $\Gamma$  de génération finie quelconque, ce qui précède s'applique aux  $\Gamma / \mathcal{L}^{i_i}$ , et on définit  $\Gamma^{\text{un}}$  comme étant le schéma en groupe limite projective des  $(\Gamma / \mathcal{L}^{i_i})^{\text{un}}$ . L'algèbre affine de  $\Gamma^{\text{un}}$  est encore la limite inductive des duals des  $\mathbb{Q}[\Gamma]/I^N$ .

**2.2.** Soit  $E$  un espace topologique raisonnable, par exemple une variété algébrique complexe. On suppose  $E$  connexe. Un chemin  $\gamma$  de  $a$  à  $b : [0, 1] \rightarrow E$  fournit  $\gamma^N : [0, 1]^N \rightarrow E^N$  et, par restriction au simplexe  $\sigma_N$  de (1.1.1), une chaîne singulière de  $E^N$  qui est un cycle modulo la réunion des  $b = x_1, x_1 = x_2, \dots, x_N = a$ . La classe d'homologie de ce cycle ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\gamma$ .

Faisons  $a = b$ . Élaborant la construction précédente (cf. [2] §3), on obtient un isomorphisme de  $\mathbb{Q}[\pi_1(E, a)]/I^{N+1}$  avec un groupe d'homologie relative de  $E^N$  et, de son dual  $(\mathbb{Q}[\pi_1(E, a)]/I^{N+1})^\vee$  avec un groupe de cohomologie relative de  $E^N$ . De là, par passage à la limite inductive, une description cohomologique de l'algèbre affine de  $\pi_1(E, a)^{\text{un}}$ .

Ne supposons plus que  $a = b$ . Soit  $\pi_1(E; b, a)$  l'ensemble des classes d'homotopie de chemins de  $a$  à  $b$ . Le groupe  $\pi_1(E, a)$  agit à droite, par composition des chemins, sur  $\pi_1(E; b, a)$ . Cette action fait de  $\pi_1(E; b, a)$  un espace principal homogène, nous préférons dire *torseur*, sous  $\pi_1(E, a)$ . On note  $\pi_1(E; b, a)^{\text{un}}$  le  $\pi_1(E, a)^{\text{un}}$  toseur qui s'en

déduit en poussant par  $\pi_1(E, a) \rightarrow \pi_1(E, a)^{\text{un}}$ . Soit  $\mathbb{Q}[\pi_1(E; b, a)]$  l'espace des combinaisons linéaires formelles d'éléments de  $\pi_1(E; b, a)$ . C'est un  $\mathbb{Q}[\pi_1(E, a)]$ -module à droite, libre de rang un. On pose

$$\mathbb{Q}[\pi_1(E; b, a)]/I^N := \mathbb{Q}[\pi_1(E; b, a)]/\mathbb{Q}[\pi_1(E; b, a)]I^N.$$

La construction qui précède fournit encore une description cohomologique des  $(\mathbb{Q}[\pi_1(E; b, a)]/I^N)^\vee$ , et de l'algèbre affine de  $\pi_1(E; b, a)^{\text{un}}$  qui en est la limite inductive.

**2.3.** Soit  $X$  une variété algébrique définie sur un sous-corps  $K$  de  $\mathbb{C}$ . La *cohomologie de Betti*  $H_B^*(X)$  de  $X$  est la cohomologie rationnelle de l'espace  $X(\mathbb{C})$  des points complexes de  $X$ , muni de sa topologie classique. Elle est munie de structures qui reflètent la structure algébrique de  $X$ . Notamment : une structure de Hodge mixte. On dispose aussi de la *cohomologie de de Rham* algébrique  $H_{dR}^*(X)$ . Si  $X$  est non singulière,  $H_{dR}^*(X)$  est l'hypercohomologie du complexe de de Rham des faisceaux de formes différentielles algébriques. C'est un  $K$ -espace vectoriel, on dispose d'un isomorphisme de comparaison

$$(2.3.1) \quad \text{comp}_{B, dR} : H_{dR}^i(X) \otimes_K \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H_B^i(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C},$$

et les filtrations  $W$  et  $F$  de la structure de Hodge mixte de  $H_B^i(X)$  proviennent de filtrations de  $H_{dR}^i(X)$ . Les coefficients de la matrice de l'isomorphisme (2.3.1), dans une base de  $H_{dR}^i(X)$  et une de  $H_B^i(X)$ , portent le nom de *périodes*.

Grâce à 2.2, tout ceci s'applique aux algèbres affines des schémas en groupe  $\pi_1(X, a)^{\text{un}}$  ou de leurs espaces homogènes  $\pi_1(X; b, a)^{\text{un}}$ . On écrira  $\pi_1(X, a)_B$  pour  $\pi_1(X, a)^{\text{un}}$ ,  $\pi_1(X, a)_{dR}$  pour sa variante de de Rham, et de même pour les  $\pi_1(X; b, a)$ . On mettra  $B/dR$  en indice quand l'énoncé vaut aussi bien en Betti qu'en de Rham.

**2.4. Exemple.** Prenons  $K = \mathbb{Q}$  et soit  $X$  le groupe multiplicatif  $\mathbb{G}_m$ , de groupe de points complexes  $\mathbb{C}^*$ . Ici, le groupe fondamental, commutatif, est indépendant du point-base et s'identifie au groupe d'homologie  $H_1$ . En de Rham, le dual  $H_{dR}^1$  de  $H_1^{dR}$  est  $\mathbb{Q} \cdot \frac{dz}{z}$ . En Betti,  $H_1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z})$  est  $\mathbb{Z}$ , engendré par un tour positif autour de 0. Si on ne veut pas parler de « tour positif », i.e. choisir qui est  $i$  et qui est  $-i$ , il vaut mieux dire que  $H_1 = \pi_1 = 2\pi i\mathbb{Z}$ , avec  $\ell \in 2\pi i\mathbb{Z}$  correspondant au lacet  $\exp(\ell t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), sur lequel l'intégrale de  $\frac{dz}{z}$  vaut  $\ell$ .

Les  $H_1^B(\mathbb{G}_m) = H_1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Q})$  et  $H_1^{dR}(\mathbb{G}_m)$  sont les réalisations de Betti et de de Rham du motif de Tate  $\mathbb{Q}(1)$  (voir §5). On a  $\mathbb{Q}(1)_{dR} = \mathbb{Q}$  (1 étant dual de  $\frac{dz}{z} \in H_{dR}^1(\mathbb{G}_m)$ ), et  $\mathbb{Q}(1)_B$ , inclus dans  $\mathbb{Q}(1)_{dR} \otimes \mathbb{C}$  par  $\text{comp}_{dR, B}$ , est  $2\pi i\mathbb{Q}$ ;  $\mathbb{Q}(1)$  est purement de type de Hodge  $(-1, -1)$ .

Le groupe algébrique  $\pi_1(\mathbb{G}_m, 1)_{dR}$  est le groupe additif  $\mathbb{G}_a$ , de groupe de points rationnels  $\mathbb{Q}(1)_{dR} = \mathbb{Q}$ , et d'algèbre affine  $\mathbb{Q}[T]$  (plus précisément :  $\text{Sym}^*(H_{dR}^1(\mathbb{G}_m))$ ). Le groupe algébrique  $\pi_1(\mathbb{G}_m, 1)_B$  est le groupe additif de groupe de points rationnels

$2\pi i\mathbb{Q}$ . Algèbre affine :  $\text{Sym}^*(H_B^1(\mathbb{G}_m))$ . C'est l'algèbre des fonctions  $f$  sur  $2\pi i\mathbb{Z}$ , à valeurs rationnelles, et telles que si on identifie  $\mathbb{Z}$  à  $2\pi i\mathbb{Z}$  par  $n \mapsto 2\pi in$ , les conditions équivalentes suivantes soient vérifiées pour  $N$  assez grand : (a)  $f$  est un polynôme de degré  $< N$ ; (b) notant  $\Delta$  l'opérateur  $g \mapsto (g(n+1) - g(n))$ , on a  $\Delta^N f = 0$ ; (c) la forme linéaire sur l'algèbre de groupe  $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}]$  définie par  $f$  est nulle sur  $I^N$ .

Par abus de langage, nous écrirons parfois  $\mathbb{Q}(1)_{B/dR}$  pour ces groupes algébriques.

### 3. LE CAS DE $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$

**3.1.** Si  $X$  est le complément dans  $\mathbb{P}^1$  d'un ensemble fini  $T$  de points rationnels, la variété  $X$  est définie sur  $\mathbb{Q}$  et les structures de Hodge mixte de 2.2, 2.3 sont de Hodge-Tate :  $\text{Gr}_n^W$  est nul pour  $n$  impair, et pour  $n = 2m$  est purement de type de Hodge  $(m, m)$ . Pour chacun des groupes  $M$  considérés en 2.2, soit  $M_{dR}$  sa variante de de Rham (2.3). Après renumérotation, les filtrations par le poids  $W$  et de Hodge  $F$  de  $M_{dR}$  sont opposées. Elles définissent la graduation de  $M_{dR}$  pour laquelle

$$(3.1.1) \quad \begin{aligned} W_{-2n}(M_{dR}) &= \bigoplus_{m \geq n} M_{dR}^m \\ F^{-p}(M_{dR}) &= \bigoplus_{m \leq p} M_{dR}^m. \end{aligned}$$

La convention (3.1.1) assure que  $\mathbb{Q}(1)_{dR}$  est de degré un. Il est parfois commode de graduer par l'opposé du degré, le *codegré*, et de poser  $(M_{dR})_m := (M_{dR})^{-m}$ .

Cas particulier : l'algèbre affine de  $\pi_1(X; b, a)_{dR}$  est graduée. Elle est à degrés  $\leq 0$  et réduite à  $\mathbb{Q}$  en degré 0. Le morphisme d'augmentation  $\mathcal{O}(\pi_1(X; b, a)_{dR}) \rightarrow \mathbb{Q}$  est un point  ${}_b 1_a$  de  $\pi_1(X; b, a)_{dR}$ . En  $dR$ , on dispose ainsi d'un chemin canonique  ${}_b 1_a$  d'un point-base à un autre : pour un certain schéma en groupe pro-unipotent  $\Pi$ , chaque  $\pi_1(X; b, a)_{dR}$  s'identifie à une copie  ${}_b \Pi_a$  de  $\Pi$ , et la composition des chemins est la loi de groupe.

Le groupe  $\Pi$  admet la description suivante. Soit  $\mathcal{L}$  l'algèbre de Lie sur  $\mathbb{Q}$  engendrée par des éléments  $e_t$  ( $t \in T$ ) soumis à la seule relation  $\sum e_t = 0$ . On la munit de la graduation pour laquelle chaque  $e_t$  est homogène de degré 1. La série centrale descendante  $\mathcal{L}$  est la filtration par les « degré  $\geq i$  ». Soient  $\mathcal{L}^\wedge$  le complété de  $\mathcal{L}$  pour cette filtration, et  $\exp(\mathcal{L}/\mathcal{L}^i)$  le groupe algébrique unipotent d'algèbre de Lie  $\mathcal{L}/\mathcal{L}^i$ . On a

$$(3.1.2) \quad \Pi = \exp(\mathcal{L}^\wedge) := \lim \exp(\mathcal{L}/\mathcal{L}^i).$$

Autre description : l'algèbre enveloppante  $A$  de  $\mathcal{L}$  est l'algèbre associative engendrée par des éléments  $e_t$  ( $t \in T$ ) soumis à la seule relation  $\sum e_t = 0$ . Elle est graduée,

chaque  $e_t$  étant homogène de degré un, et la puissance  $N$ -ième de l'idéal d'augmentation  $I$  est la partie de  $A$  de degré  $\geq N$ . Le complété  $A^\wedge = \lim A/I^N$  de  $A$  est muni d'un coproduit

$$\Delta: A^\wedge \rightarrow A^\wedge \widehat{\otimes} A^\wedge: e_t \mapsto e_t \otimes 1 + 1 \otimes e_t,$$

$\mathcal{L}^\wedge$  est l'algèbre de Lie des éléments primitifs, et pour toute  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $R$ , si on pose  $A^\wedge \widehat{\otimes} R := \lim_N (A/I^N) \otimes_{\mathbb{Q}} R$ , le groupe  $\Pi(R)$  des  $R$ -points de  $\Pi$  est le groupe des éléments groupaux de  $(A^\wedge \widehat{\otimes} R)^*$  :

$$(3.1.3) \quad \Pi(R) = \{g \in (A^\wedge \widehat{\otimes} R)^* \mid \Delta g = g \otimes g\}.$$

L'algèbre affine  $\mathcal{O}(\Pi)$  de  $\Pi$  (munie de la topologie discrète) et l'algèbre enveloppante complétée  $A^\wedge$  (munie de sa topologie de limite projective) sont duales l'une de l'autre. Le dual topologique de  $A^\wedge$  s'identifie au dual gradué  $\oplus (A^n)^\vee$  de  $A$ , et ceci donne la graduation (à degrés  $\leq 0$ ) de  $\mathcal{O}(\Pi)$ .

On notera  $\omega$  la 1-forme logarithmique sur  $X$  à valeurs dans  $\mathcal{L}$

$$(3.1.4) \quad \omega := \sum_{t \neq \infty} e_t \frac{dz}{z-t}.$$

En chaque  $t \in T$ , elle a le résidu  $e_t$ .

Supposons que  $\infty \in T$  et posons  $T' := T - \{\infty\}$ . On a  $A = \mathbb{Q}\langle (e_t)_{t \in T'} \rangle$  et  $A^\wedge = \mathbb{Q} \ll (e_t)_{t \in T'} \gg$  (séries formelles associatives en les  $e_t$ ). Pour tout mot  $w = t_1 \cdots t_k$  en l'alphabet  $T'$ , notons  $c(w)$  la forme linéaire sur  $A^\wedge$  « coefficient du monôme  $e_{t_1} \cdots e_{t_k}$  ». On note encore  $c(w)$  la restriction de  $c(w)$  à  $\Pi \subset A^{\wedge*}$ , et pour une combinaison linéaire formelle de mots, on pose  $c(\sum \lambda_w w) = \sum \lambda_w c(w)$ . Les  $c(w)$  forment une base vectorielle de  $\mathcal{O}(\Pi)$ . Le produit dans  $\mathcal{O}(\Pi)$  correspond au produit de mélange des mots :

$$(3.1.5) \quad c(w')c(w'') = c(w' \amalg w'')$$

où, pour  $w' = t_1 \cdots t_k$  et  $w'' = t_{k+1} \cdots t_{k+\ell}$ ,  $w' \amalg w''$  est la somme des  $t_{\sigma^{-1}(1)} \cdots t_{\sigma^{-1}(k+\ell)}$  pour  $\sigma$  parcourant l'ensemble  $S_{k,\ell}$  des permutations de  $\{1, \dots, k+\ell\}$  croissantes sur  $\{1, \dots, k\}$  et sur  $\{k+1, \dots, k+\ell\}$  (shuffle product).

**3.2.** Un chemin  $\gamma$  de  $a$  à  $b$  définit un point rationnel de  $\pi_1(X; b, a)_B = \pi_1(X(\mathbb{C}); b, a)^{\text{un}}$ . Soit  $\text{comp}_{dR,B}(\gamma)$  l'image de ce point rationnel par l'isomorphisme de comparaison

$$\text{comp}_{dR,B}: \pi_1(X; b, a)_B(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X; b, a)_{dR}(\mathbb{C}) = \Pi(\mathbb{C}).$$

Cette image est obtenue par « intégration » le long de  $\gamma$ , dans le groupe non commutatif  $\Pi$ , de la forme  $\omega$  : c'est la valeur en 1 de la solution  $g: [0, 1] \rightarrow \Pi(\mathbb{C})$ , valant 1 en 0, de

$$(3.2.1) \quad dg(t).g(t)^{-1} = \omega \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) dt.$$

**3.3.** Le même formalisme s'applique quand on permet aux points-base  $a, b$  d'être des points-base tangentiels (vecteur tangent non nul en un « point rationnel à l'infini »  $t \in T$  de  $X$ ). Soit  $\Theta_t$  l'espace tangent à  $\mathbb{P}^1$  en  $t$ ,  $\Theta_t^* := \Theta_t - \{0\}$ , et  $a \in \Theta_t^*$  un point-base tangentiel en  $t$ . Tout se passe comme si on disposait d'un morphisme de  $\Theta_t^*$  dans  $X$  : on dispose de morphismes

$$(3.3.1) \quad \pi_1(\Theta_t^*, a)_{B/dR} = \mathbb{Q}(1)_{B/dR} \rightarrow \pi_1(X, a)_{B/dR}$$

compatibles aux isomorphismes de comparaison. Côté Betti, ce morphisme est induit par les germes d'applications  $\varphi$  de  $(\Theta_t, 0)$  dans  $(\mathbb{P}^1, t)$  de différentielle l'identité. L'espace de ces germes est contractile, et chaque  $\varphi$  induit une application d'un petit disque épointé autour de 0 (homotope à  $\Theta_t^*$ ) dans  $X$ . En de Rham, et après passage aux algèbres de Lie, (3.3.1) est le morphisme de  $\mathbb{Q}(1)_{dR} = \mathbb{Q}$  dans  $\mathcal{L}^\wedge$  qui envoie 1 sur  $e_t$ .

La  $\mathbb{Q}$ -forme  $\pi_1(X; b, a)_B$  de  $\Pi(\mathbb{C})$  est caractérisée par la propriété que les images des chemins de  $a$  à  $b$  sont des points rationnels.

Mise en garde :  $\pi_1(X; b, a)_{dR}$  est indépendant de  $a$  et  $b$ , et  $\pi_1(X; b, a)_B$  est localement constant en  $a$  et  $b$ , mais l'isomorphisme de comparaison entre leurs complexifiés n'est pas localement constant. Que  $\pi_1(X; b, a)_{dR}$  soit indépendant de  $a$  et  $b$  provient de ce qu'on dispose du chemin  $dR$  canonique  $b1_a$  entre deux points-base quelconques. L'image de ce chemin par  $\text{comp}_{B, dR}$  n'est pas localement constante.

**3.4.** Le cas qui nous intéresse est celui où  $X = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$  et où comme points-base on prend les points-base tangentiels 1 en 0 et  $-1$  en 1. Ils seront notés 0 et 1. On a ici

$$\omega = e_0 \frac{dz}{z} + e_1 \frac{dz}{z-1}$$

et pour toute  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $R$ ,  $\Pi(R) = \{\text{éléments groupaux de } R \ll e_0, e_1 \gg^*\}$  (3.1.3). En Betti, on dispose du « droit chemin » dch de 0 à 1. On notera encore dch son image par  $\text{comp}_{dR, B}$  dans  $\Pi(\mathbb{C})$ . Cette image est la limite suivante pour  $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$  par valeurs  $> 0$  :

$$(3.4.1) \quad \text{comp}_{dR, B}(\text{dch}) = \lim \exp(-\log \eta \cdot e_1) \text{comp}_{dR, B}([\varepsilon, 1 - \eta]) \exp(\log \varepsilon \cdot e_0).$$

Le troisième (resp. premier) facteur doit être vu comme calculant, dans l'espace tangent épointé en 0 (resp. en 1),  $\text{comp}_{dR, B}([1, \varepsilon])$  (resp.  $\text{comp}_{dR, B}([-\eta, -1])$ ), la forme  $\omega$  étant remplacée par  $\frac{du}{u} e_0$  (resp.  $\frac{du}{u} e_1$ ).

On peut en général exprimer la solution de (3.2.1) comme une somme d'intégrales itérées. Appliquant 1.2, on obtient que pour  $\zeta(s_1, \dots, s_k)$  convergent, on a :

**PROPOSITION 3.5.** — *Le coefficient de  $e_0^{s_1-1} e_1 \dots e_0^{s_k-1} e_1$  dans  $\text{dch} \in \Pi(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \ll e_0, e_1 \gg^*$  est  $(-1)^k \zeta(s_1, \dots, s_k)$ .*

Cette proposition ne détermine les coefficients de monômes  $c(w)$  de  $dch$  que pour  $w$  un mot en l'alphabet  $\{0, 1\}$  qui ne commence pas par 1 et ne finit pas par 0. Les coefficients  $c(0)$  de  $e_0$  et  $c(1)$  de  $e_1$  dans  $dch$  sont nuls. Ceci, joint au fait que  $dch$  est groupal, détermine les coefficients manquants. Plus précisément, la nullité de  $c(0)$  et  $c(1)$  signifie que  $dch$  appartient au groupe dérivé  $\Pi'$  de  $\Pi$ , d'algèbre de Lie graduée la partie de degré  $\geq 2$  de celle de  $\Pi$ . Sur  $\Pi'$ , on a, notant  $\{^p\}$  une puissance dans le monoïde des mots,

$$(3.5.1) \quad c(0\{^p\}) = c(1\{^p\}) = 0 \quad \text{pour } p > 0$$

et, appliquant (3.1.5) à  $w10\{^{p-1}\}$  et 0 (resp. 1 et  $1\{^{p-1}\}0w$ ), on vérifie par récurrence sur  $p \geq 0$  que

$$(3.5.2) \quad \begin{aligned} c(w10\{^p\}) &= (-1)^p c((w \text{ III } 0\{^p\})1) \\ (\text{resp. } c(1\{^p\}0w) &= (-1)^p c(0(1\{^p\} \text{ III } w)) \quad (\text{sur } \Pi'). \end{aligned}$$

**3.6.** L'identité (3.1.5), évaluée en  $dch$ , exprime le produit de deux nombres multizétas comme combinaison linéaire à coefficients entiers de nombres multizétas.

#### 4. LES MULTIZÉTAS MOTIVIQUES

**4.1.** Continuons à poser  $X := \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$  et à prendre pour points-base les points-base tangentiels 0 ou 1 (voir 3.4). Nous donnerons en 5.6 un sens précis à l'expression « structure motivique sur les algèbres affines des  $\pi_1(X; b, a)_{B/dR}$  ». Nous dirons aussi « structure motivique sur les  $\pi_1(X; b, a)_{B/dR}$  ». Heuristiquement, il s'agit de structures provenant de la géométrie, ayant donc un sens tant pour Betti que pour de Rham, et respectées par les isomorphismes de comparaison. Exemples : le produit donnant la structure d'algèbre, les coproduits provenant de la composition des chemins, la filtration par le poids, l'isomorphisme  $\pi_1(X; b, a)_{B/dR} \rightarrow \pi_1(X; \sigma(b), \sigma(a))_{B/dR}$  induit par l'involution  $\sigma: x \mapsto 1 - x$  de  $\mathbb{P}^1$ . De même, les morphismes (3.3.1) sont une structure motivique sur  $\mathbb{Q}(1)_{B/dR}$  et  $\pi_1(X, a)_{B/dR}$ . Par contre, ni la filtration de Hodge de l'algèbre affine de  $\pi_1(X; b, a)_{dR}$ , ni donc sa graduation, ni l'indépendance de  $\pi_1(X; b, a)_{dR}$  de  $a$  et  $b$  ne sont motiviques. On n'en dispose que pour  $dR$ . Les structures en question seront des structures d'algèbre multilinéaire. Soit  $H_B$  (resp.  $H_{dR}$ ) le schéma en groupe sur  $\mathbb{Q}$  des automorphismes de  $\pi_1(X; 1, 0)_B$  (resp.  $\pi_1(X; 1, 0)_{dR}$ ) respectant toutes ses structures motiviques. La filtration par le poids  $W$  de l'algèbre affine est une filtration par des sous-espaces de dimension finie, et  $H_B$  (resp.  $H_{dR}$ ) est une limite projective de sous-groupes algébriques des  $GL(W_i)$ .

**4.2.** Soit  $P_{dR,B}$  le schéma des isomorphismes de  $\pi_1(X; 1, 0)_B$  avec  $\pi_1(X; 1, 0)_{dR}$  respectant toutes les structures motiviques. Le groupe  $H_B$  agit à droite sur  $P_{dR,B}$ . L'isomorphisme de comparaison  $\text{comp}_{dR,B}$  est un point complexe de  $P_{dR,B}$ . Le schéma  $P_{dR,B}$  est donc non vide. C'est un  $H_B$ -torseur (terminologie de 2.2).

Si  $Z_B$  est un sous-schéma de  $\pi_1(X; 1, 0)_B$  stable sous  $H_B$ , la torsion par le  $H_B$ -torseur  $P_{dR,B}$  transforme  $\pi_1(X; 1, 0)_B$  en  $\pi_1(X; 1, 0)_{dR} = {}_1\Pi_0$  (notations de 3.1), et  $Z_B$  en un sous-schéma  $Z_{dR}$  de  ${}_1\Pi_0$ . Sur  $\mathbb{C}$ ,  $Z_{dR}(\mathbb{C})$  est l'image de  $Z_B(\mathbb{C})$  par  $\text{comp}_{dR,B}$ .

J'aime penser à la  $H_B$ -orbite de dch comme étant l'espace des points ch de  $\pi_1(X; 1, 0)_B$  ayant toutes les propriétés de dch exprimables en termes motiviques. Par exemple : le morphisme  $\pi_1(X; 1, 0)_B \rightarrow \pi_1(X; 0, 1)_B$  induit par l'involution  $x \mapsto 1 - x$  de  $\mathbb{P}^1$  doit transformer ch en son inverse.

Soit  $\mathbf{M}_B \subset \pi_1(X; 1, 0)_B$  l'adhérence de la  $H_B$ -orbite de dch. Le tordu de  $\mathbf{M}_B$  par  $P_{dR,B}$  est un sous-schéma fermé  $\mathbf{M}_{dR}$  de  ${}_1\Pi_0$ . Notons encore dch l'image de dch par  $\text{comp}_{dR,B}$ . C'est un point complexe de  $\mathbf{M}_{dR}$ , et  $\mathbf{M}_{dR}(\mathbb{C}) \subset {}_1\Pi_0(\mathbb{C})$  est l'adhérence de sa  $H_{dR}(\mathbb{C})$ -orbite.

**DÉFINITION 4.3.** — Soit  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$ . Si  $k \neq 0$ , on suppose que  $s_1 \geq 2$ . Soient  $w$  le mot  $0^{\{s_1-1\}}1 \dots 0^{\{s_k-1\}}1$  en l'alphabet  $\{0, 1\}$  et  $c(w) \in \mathcal{O}(\Pi)$  la fonction « coefficient du monôme  $e_0^{s_1-1}e_1 \dots e_0^{s_k-1}e_1$  » (3.1). On note  $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$  la restriction à  $\mathbf{M}_{dR}$  de  $(-1)^k c(w)$ .

Les  $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$  sont les *multizêtas motiviques* (F. Brown [1] 2.3). L'algèbre notée  $\mathcal{M}$  dans l'introduction est  $\mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR})$ . Avant [1], seule la restriction des  $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$  à l'orbite de 1 était considérée. Ceci donnait lieu à des contorsions pénibles. D'après 3.5, la valeur de  $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$  en le point complexe dch de  $\mathbf{M}_{dR}$  est  $\zeta(\mathbf{s})$ . Toute identité polynomiale à coefficients rationnels en les  $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$  fournit donc par évaluation en dch une relation polynomiale entre les  $\zeta(\mathbf{s})$ . Le yoga des périodes de Grothendieck prédit que toute relation polynomiale entre les  $\zeta(\mathbf{s})$  provient de la géométrie. Plus précisément, qu'elle est obtenue comme ci-dessus.

Pour tout mot  $w$  en 0 et 1, notons de même  $c_{\mathbf{m}}(w)$  la restriction de  $c(w)$  à  $\mathbf{M}_{dR}$ . S'appuyant sur la remarque qui suit 3.5, on peut montrer que les  $c_{\mathbf{m}}(w)$  sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des  $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$ .

Par construction,  $H_{dR}$  agit sur  $\mathbf{M}_{dR}$ . Son algèbre de Lie agit donc par dérivations sur l'algèbre affine de  $\mathbf{M}_{dR}$ , quotient de celle de  $\Pi$ . Ces dérivations, qui n'ont de sens qu'une fois qu'on est remonté des  $\zeta(\mathbf{s})$  aux  $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$ , joueront un rôle-clé dans les arguments de F. Brown.

## 5. MOTIFS DE TATE MIXTE

**5.1.** Nous sommes ici dans l'un des cas où la philosophie des motifs est non seulement un guide précieux, mais permet des démonstrations. Sur tout corps  $K$ , Voevodsky a défini une catégorie triangulée motivique  $\mathcal{V}_K$ , munie d'un produit tensoriel, et contenant des objets de Tate  $\mathbb{Z}(n)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Si  $K$  est un corps de nombres, on peut après tensorisation avec  $\mathbb{Q}$  construire une sous-catégorie  $MT(K)$  de  $\mathcal{V}_K \otimes \mathbb{Q}$ , la *catégorie des motifs de Tate mixte* sur  $K$  et cette catégorie est tannakienne. Ceci repose sur notre connaissance des groupes de K-théorie d'un corps de nombres, due à la détermination par voie transcendante des  $H^i(BGL(n, K), \mathbb{C})$  pour  $n \gg i$ .

Tout ceci est pour moi une boîte noire. Elle est difficile à ouvrir et c'est pourquoi les identités promises par 0.2. ne sont pas explicites.

**5.2.** Passons en revue quelques propriétés de la catégorie  $MT(K)$ . C'est une catégorie tannakienne sur  $\mathbb{Q}$ . Elle contient un objet de rang un  $\mathbb{Q}(1)$ , le *motif de Tate*. Ce motif étant de rang un,  $\mathbb{Q}(n) := \mathbb{Q}(1)^{\otimes n}$  est défini pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Les objets de  $MT(K)$  sont munis d'une filtration finie croissante fonctorielle et compatible au produit tensoriel, la *filtration par le poids*  $W$ . Elle est indexée par les entiers pairs. Le foncteur  $M \mapsto Gr^W(M)$  est exact, et  $Gr_{-2n}^W(M)$  est somme de copies de  $\mathbb{Q}(n)$ .

Supposons pour simplifier que  $K = \mathbb{Q}$ . On dispose alors de *foncteurs fibres de Betti et de de Rham*

$$\omega_B, \omega_{dR}: MT(K) \rightarrow \mathbb{Q}\text{-espaces vectoriels}$$

et d'un isomorphisme de comparaison

$$\text{comp}_{dR,B}: \omega_B \otimes \mathbb{C} \rightarrow \omega_{dR} \otimes \mathbb{C}.$$

Noter que, parce que  $K = \mathbb{Q}$ , le foncteur fibre  $\omega_{dR}$  coïncide avec le foncteur fibre  $\omega$  de [2]. Pour le motif  $\mathbb{Q}(1)$ ,  $\omega_B(\mathbb{Q}(1))$ ,  $\omega_{dR}(\mathbb{Q}(1))$  et  $\text{comp}_{dR,B}$  sont comme en 2.4.

Le foncteur  $\omega_{dR}$  est muni d'une *filtration de Hodge*  $F$ , opposée, à une renumérotation près, à la *filtration par le poids* de  $\omega_{dR}(M)$  par les  $\omega_{dR}(W_{2n}M)$ . Ceci en fait un foncteur gradué, comme en 3.1.

**5.3.** Si  $\mathcal{T}$  est une catégorie tannakienne, nous appellerons  *$\mathcal{T}$ -algèbre* un Ind-objet  $A$  de  $\mathcal{T}$ , muni d'un produit  $A \otimes A \rightarrow A$ . On définit la catégorie des  $\mathcal{T}$ -schémas affines comme étant l'opposée de celle des  $\mathcal{T}$ -algèbres commutatives à unité, et un  $\mathcal{T}$ -schéma en groupe affine comme un groupe dans cette catégorie. Pour  $\mathcal{T}$  une catégorie de motifs, on remplace le préfixe  $\mathcal{T}$  par l'adjectif *motivique*.

**5.4.** Les  $\pi_1(X; b, a)_B$ ,  $\pi_1(X; b, a)_{dR}$  de 3.1, 3.3 et l'isomorphisme de comparaison entre leurs complexifiés sont motiviques : images d'un schéma en groupe motivique

$\pi_1(X; b, a)_{\text{mot}}$  ([2] §4). Les morphismes « composition des chemins » et (3.3.1) sont eux aussi motiviques.

Si  $X = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$  et que  $a, b$  sont choisis parmi les points-base tangentiels 0, 1 de 3.4, les points 0, 1,  $\infty$  restent distincts après réduction modulo  $p$ , et les vecteurs tangents choisis en 0 et 1 restent non nuls. On peut en déduire que les algèbres affines  $\mathcal{O}(\pi_1(X; b, a)_{\text{mot}})$  sont des Ind-objets d'une sous-catégorie tannakienne  $MT(\mathbb{Z})$  de  $MT(\mathbb{Q})$ , celle des *motifs de Tate mixte à bonne réduction sur Spec(\mathbb{Z})* ([2] 1.7, 1.4, 1.8). Dans  $MT(\mathbb{Z})$ ,

$$(5.4.1) \quad \text{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) \text{ est } \begin{cases} \text{de dimension un sur } \mathbb{Q} \text{ pour } n \text{ impair } \geq 3, \\ 0 \text{ sinon;} \end{cases}$$

$$(5.4.2) \quad \text{Ext}^2(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) = 0 .$$

**5.5.** Soient  $\mathcal{T}$  une catégorie tannakienne sur un corps  $K$ , et  $\omega$  un foncteur fibre sur une extension  $K'$  de  $K$ . La famille des  $\omega(Y)$ , pour  $Y$  dans  $\mathcal{T}$ , munie des  $\omega(f) : \otimes \omega(Y_i) \rightarrow \otimes \omega(Z_j)$  pour  $f : \otimes Y_i \rightarrow \otimes Z_j$  un morphisme de  $\mathcal{T}$ , est une famille de  $K'$ -espaces vectoriels, munie d'une structure d'algèbre multilinéaire. Le sous-schéma en groupe de  $\Pi \text{GL}(\omega(Y))$  (produit sur  $\text{Ob}(\mathcal{T})$ ) qui respecte cette structure est le schéma en groupe  $\text{Aut}(\omega)$  des automorphismes du foncteur fibre  $\omega$ . On le note  $\pi(\mathcal{T}, \omega)$  et on l'appelle *groupe fondamental* de  $\mathcal{T}$  en  $\omega$ . On verra sur des exemples qu'il est de « même nature » que les  $\omega(Y)$ , par exemple que son algèbre affine est graduée si le foncteur  $\omega$  est gradué. L'explication de ce fait est qu'il existe un  $\mathcal{T}$ -schéma en groupe  $\pi(\mathcal{T})$ , agissant fonctoriellement sur chaque objet de  $\mathcal{T}$ , tel que pour tout foncteur fibre  $\omega$ ,  $\pi(\mathcal{T}, \omega)$  soit  $\omega(\pi(\mathcal{T}))$ .

Supposons que  $K' = K$ . Dans ce cas,  $\omega$  induit une équivalence de  $\mathcal{T}$  avec la catégorie des représentations linéaires de dimension finie de  $\pi(\mathcal{T}, \omega)$ . Si  $\mathcal{T}$  est une catégorie de motifs, les groupes fondamentaux s'appellent aussi *groupes de Galois motiviques*.

**5.6.** Soit  $\langle\langle Y_i \rangle\rangle$  la sous-catégorie tannakienne de  $\mathcal{T}$  engendrée (par sous-quotients, sommes, duaux et produits tensoriels) par une famille  $(Y_i)$  d'objets de  $\mathcal{T}$ . Une  $\mathcal{T}$ -structure sur la famille des  $\omega(Y_i)$  est l'image par  $\omega$  d'un morphisme de  $\langle\langle Y_i \rangle\rangle$ . Plus précisément c'est la donnée de l'image par  $\omega$  de sous-quotients de sommes de produits tensoriels de  $Y_i$  et  $Y_i^\vee$ , et de morphismes entre de tels sous-quotients. Si  $\mathcal{T}$  est une catégorie de motifs, on dira plutôt *structure motivique*. Le sous-groupe de  $\Pi \text{GL}(\omega(Y_i))$  qui respecte toutes les  $\mathcal{T}$ -structures est donc le groupe fondamental de  $\langle\langle Y_i \rangle\rangle$  en  $\omega$ . Tout sous-groupe algébrique d'un groupe  $\text{GL}(V)$  est le sous-groupe respectant quelques sous-espaces et éléments dans des espaces de tenseurs sur  $V$ . L'équivalence 5.5 assure donc que ce groupe fondamental de  $\langle\langle Y_i \rangle\rangle$  en  $\omega$  est le quotient

de  $\pi(\mathcal{T}, \omega)$  qui agit fidèlement sur la famille des  $\omega(Y_i)$ . Même terminologie si on part d'une famille de ind-objets de  $\mathcal{T}$  : on la remplace par la famille des sous-objets dans  $\mathcal{T}$ .

Prenons  $\mathcal{T} := MT(\mathbb{Z})$ . Avec la notation  $B/dR$  de 2.3, posons

$$(5.6.1) \quad G_{B/dR} := \pi(MT(\mathbb{Z}), \omega_{B/dR}).$$

Le schéma en groupe  $H_{B/dR}$  des automorphismes de  $\pi_1(X; 1, 0)_{B/dR}$  « respectant toutes les structures motiviques » considéré en 4.1 est le quotient de  $G_{B/dR}$  agissant fidèlement sur  $\pi_1(X; 1, 0)_{B/dR} = \omega_{B/dR}(\pi_1(X; 1, 0)_{\text{mot}})$ . D'après l'équivalence 5.5, un sous-schéma fermé de  $\pi_1(X; 1, 0)_B$  stable sous  $H_B$  est la réalisation de Betti d'un sous-schéma fermé de  $\pi_1(X; 1, 0)_{\text{mot}}$ . Exemple : il existe un unique sous-schéma motivique  $\mathbf{M}_{\text{mot}}$  de  $\pi_1(X; 1, 0)_{\text{mot}}$  de réalisation de Betti l'adhérence d'orbite  $\mathbf{M}_B$ ; le sous-schéma  $\mathbf{M}_{dR}$  (4.2) de  $\pi_1(X; 1, 0)_{dR}$  est sa réalisation de de Rham.

**5.7.** L'action de  $G_{B/dR}$  sur  $\mathbb{Q}(1)_{B/dR}$  définit un morphisme  $t$  de  $G_{B/dR}$  dans le groupe multiplicatif  $\mathbb{G}_m$ . Pour tout  $M$  dans  $MT(\mathbb{Z})$ ,  $G_{B/dR}$  respecte la filtration par le poids de  $\omega_{B/dR}M$ , et, puisque  $\text{Gr}_{-2n}^W(M)$  est somme de copies de  $\mathbb{Q}(n)$ , l'action de  $g$  dans  $G_{B/dR}$  sur  $\text{Gr}_{-2n}^W(M)$  est la multiplication par  $t(g)^n$ . Le noyau  $U_{B/dR}$  de  $t$  agit donc trivialement sur les  $\text{Gr}_{-2n}^W(M)$  : c'est un schéma en groupe pro-unipotent.

Soit  $\tau(\lambda)$  la multiplication par  $\lambda^n$  sur  $\omega_{dR}^n(M)$ . Les  $\tau(\lambda)$  définissent une section  $\tau: \mathbb{G}_m \rightarrow G_{dR}$  de  $t$ , qui fait de  $G_{dR}$  un produit semi-direct  $\mathbb{G}_m \ltimes U_{dR}$ . L'action de  $\mathbb{G}_m$  sur  $U_{dR}$  (par automorphismes intérieurs dans  $G_{dR}$ ) sera encore notée  $\tau$ . Elle permet de définir l'algèbre de Lie graduée  $\text{Lie}^{\text{gr}}(U_{dR})$ . La nullité (5.4.2) implique que cette algèbre de Lie graduée est libre, et (5.4.1) qu'elle est librement engendrée par un générateur en chaque degré impair  $\geq 3$ . Le foncteur  $\omega_{dR}$  induit une équivalence de catégories de  $MT(\mathbb{Z})$  avec la catégorie des espaces vectoriels gradués de dimension finie, munis d'une action, compatible aux graduations et donc nilpotente, de  $\text{Lie}^{\text{gr}}(U_{dR})$ .

**5.8.** Soit  $P$  le schéma des isomorphismes de foncteurs fibres de  $\omega_{dR}$  avec  $\omega_B$ . L'isomorphisme de comparaison  $\text{comp}_{B,dR}$  est un point complexe de  $P$ . Le schéma  $P$  est donc non vide, et est un  $G_{dR}$ -torseur. Le groupe  $G_{dR}$  étant extension de  $\mathbb{G}_m$  par  $U_{dR}$ , un argument de cohomologie galoisienne montre que tout  $G_{dR}$ -torseur a un point rationnel : il existe un isomorphisme de foncteurs fibres  $p: \omega_{dR} \rightarrow \omega_B$ . Écrivons

$$(5.8.1) \quad p = \text{comp}_{B,dR} \cdot a$$

avec  $a \in G_{dR}(\mathbb{C})$ . Il résulte de (5.8.1) que pour tout  $M$  dans  $MT(\mathbb{Z})$ , si on identifie  $\omega_{dR}(M) \otimes \mathbb{C}$  à  $\omega_B(M) \otimes \mathbb{C}$  par  $\text{comp}_{B,dR}$ ,  $\omega_B(M) \subset \omega_B(M) \otimes \mathbb{C} = \omega_{dR}(M) \otimes \mathbb{C}$  vérifie

$$(5.8.2) \quad \omega_B(M) = a(\omega_{dR}(M)).$$

Puisque  $\omega_B(\mathbb{Q}(1)) = 2\pi i\mathbb{Q}$ , on a  $t(a) \in 2\pi i\mathbb{Q}^*$ , et  $a = u\tau(\lambda)$  avec  $u \in U_{dR}(\mathbb{C})$  et  $\lambda \in 2\pi i\mathbb{Q}^*$ . Une compatibilité à la conjugaison complexe permet de montrer qu'on peut choisir ([2] 2.12)

$$(5.8.3) \quad a \in U_{dR}(\mathbb{R}) \cdot \tau(2\pi i).$$

### 6. L'ESPACE $\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3)$ DE FONCTIONS SUR $\pi_1(X; 1, 0)_{dR}$

Dorénavant,  $X := \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ , et les notations de 3.4 sont en vigueur. Par abus de langage, notons  $\mathbb{Q} \ll e_0, e_1 \gg$  (resp.  $\mathbb{Q} \ll e_0, e_1 \gg^*$ ) le schéma en groupe sur  $\mathbb{Q}$  tel que, pour toute  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $R$ , l'ensemble de ses  $R$ -points soit  $R \ll e_0, e_1 \gg$  (resp.  $R \ll e_0, e_1 \gg^*$ ). Rappelons que  $\pi_1(X; b, a)_{dR}$  est une copie  ${}_b\Pi_a$  du sous-schéma en groupe  $\Pi$  des éléments groupaux (3.1.3) de  $\mathbb{Q} \ll e_0, e_1 \gg^*$ . On la regardera comme contenue dans une copie  $\mathbb{Q} \ll e_0, e_1 \gg_{b,a}$  de  $\mathbb{Q} \ll e_0, e_1 \gg$ . Un point  $x$  de  $\mathbb{Q} \ll e_0, e_1 \gg$ , sera parfois noté  ${}_b x_a$  quand regardé comme appartenant à cette copie.

**6.1.** En tant que  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel, l'algèbre affine  $\mathcal{O}(\Pi)$  de  $\Pi$  a pour base les « coefficients de monômes »  $c(w)$  de 3.1. Elle est graduée. Si le mot  $w$  en l'alphabet  $\{0, 1\}$  est de longueur  $d$ , l'élément  $c(w)$  de  $\mathcal{O}(\Pi)$  est de degré  $-d$ , de codegré  $d$ . Quand nous noterons  $\mathcal{B}'$ , affecté de décorations, un ensemble de mots,  $\mathcal{B}$ , affecté des mêmes décorations, sera l'ensemble correspondant de  $c(w)$ .

**DÉFINITION 6.2.** — (i)  $\mathcal{B}'(2, 3)$  est l'ensemble des mots concaténation de mots 01 et 001 ;

(ii)  $\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3)$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{O}(\Pi)$  de base  $\mathcal{B}(2, 3)$ .

Les restrictions à  $\mathbf{M}_{dR}$  des  $c(w)$  dans  $\mathcal{B}(2, 3)$  sont ceux des  $(-1)^k \zeta^{\mathbf{m}}(s_1, \dots, s_k)$  où chaque  $s_i$  vaut 2 ou 3.

Pour tout espace vectoriel gradué  $Z$ , à composantes homogènes de dimension finie, la série de Poincaré de  $Z$  est

$$(6.2.1) \quad P(Z, t) = \sum \dim(Z_d) t^d.$$

Si  $\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3)$  est gradué par le codegré, on a

$$(6.2.2) \quad P(\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3), t) = (1 - t^2 - t^3)^{-1}.$$

On le vérifie en développant  $(1 - t^2 - t^3)^{-1} = \sum (t^2 + t^3)^n$ .

**6.3.** Les mots  $w \in \mathcal{B}'(2, 3)$  sont caractérisés par

- a. ils ne commencent pas par 1 et ne finissent pas par 0 ;
- b. ils ne contiennent pas deux 1 consécutifs ;
- c. ils ne contiennent pas trois 0 consécutifs.

Que la fonction  $f \in \mathcal{O}(\Pi)$  soit combinaison linéaire de  $c(w)$  où  $w$  vérifie a, b, ou c équivaut respectivement à ce que

- a'. pour  $\gamma$  dans  $\Pi$ ,  $f(\exp(ue_1)\gamma \exp(te_0))$  est indépendant de  $t$  et  $u$ ;
- b'. pour  $\gamma, \delta$  dans  $\Pi$ ,  $f(\gamma \exp(te_1)\delta)$  est de degré  $\leq 1$  en  $t$ ;
- c'. pour  $\gamma, \delta$  dans  $\Pi$ ,  $f(\gamma \exp(te_0)\delta)$  est de degré  $\leq 2$  en  $t$ .

Pour le vérifier, noter que les combinaisons linéaires d'éléments de  $\Pi(\mathbb{Q})$  sont denses dans  $\mathbb{Q} \ll e_0, e_1 \gg$ , et que si  $f$  est interprété comme une forme linéaire continue sur  $\mathbb{Q} \ll e_0, e_1 \gg$ , la condition a' (resp. b', resp. c') équivaut à la même condition, où on permet à  $\gamma, \delta$ , d'être arbitraires dans  $\mathbb{Q} \ll e_0, e_1 \gg$ . Les conditions a', b', c' sont motiviques, car exprimables en terme de composition des chemins, et de (3.3.1). Il faut ici interpréter  $\gamma$  (resp.  $\gamma, \delta$ ) comme étant dans  ${}_1\Pi_0$  (resp.  ${}_1\Pi_1$  et  ${}_1\Pi_0$ , resp.  ${}_1\Pi_0$  et  ${}_0\Pi_0$ ).

Pour se convaincre du caractère motivique de a', b', c', on peut observer que ces conditions admettent une formulation « Betti ». On l'obtient en regardant  $f$  comme une fonction sur  $\pi_1(X; 1, 0)$ , et en remplaçant  $\exp(te_0)$  (resp.  $\exp(te_1)$ ) par  $\sigma_0^t$  (resp.  $\sigma_1^t$ ) avec  $t \in \mathbb{Z}$  et  $\sigma_0$  (resp.  $\sigma_1$ ) un tour positif autour de 0 dans l'espace tangent épointé à  $\mathbb{P}^1$  en 0 (resp. 1) (cf. 3.3).

On laisse au lecteur la vérification du lemme suivant :

LEMME 6.4. — Soit  $f = \sum \lambda_w c(w)$  dans  $\mathcal{O}(\Pi)$ . Pour que, quels que soient  $\gamma_0, \dots, \gamma_r$  dans  $\Pi$ ,

$$(6.4.1) \quad f(\gamma_0 \exp(te_0)\gamma_1 \exp(te_0) \cdots \exp(te_0)\gamma_r)$$

soit de degré  $\leq d$  en  $t$ , il faut et suffit que pour tout  $w$  tel que  $\lambda_w \neq 0$ , la longueur totale d'au plus  $r$  suites disjointes de 0 consécutifs dans  $w$  soit  $\leq d$ .

**6.5.** Soit  $\mathcal{B}'_\ell(2, 3)$  (resp.  $\mathcal{B}'_{\leq \ell}(2, 3)$ ) l'ensemble des mots  $w$  dans  $\mathcal{B}'(2, 3)$  ayant exactement (resp. au plus)  $\ell$  facteurs 001. Avec la convention de 6.1, soit  $N_\ell$  le sous-espace de  $\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3)$  de base  $\mathcal{B}'_{\leq \ell}(2, 3)$ . Il résulte de 6.4 que pour que  $f$  dans  $\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3)$  soit dans  $N_\ell$ , il faut et il suffit que pour  $r = \ell + 1$ , et tout choix des  $\gamma_i$ , (6.4.1) soit de degré  $\leq 2\ell + 1$  en  $t$ . Cette propriété est motivique. L'action de  $G_{dR}$  sur  $\mathcal{O}({}_1\Pi_0)$  respecte donc  $\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3)$  et sa filtration croissante  $N$ .

PROPOSITION 6.6. — L'action de  $U_{dR}$  sur  $\text{Gr}^N \widetilde{\mathcal{H}}(2, 3)$  est triviale.

PREUVE – L'algèbre de Lie graduée de  $U_{dR}$  est engendrée par des éléments  $\nu_d$  de degrés impairs  $d \geq 3$ , et si on gradue  $\mathcal{O}({}_1\Pi_0)$  par le degré (6.1), l'action est compatible aux graduations. Il suffit de montrer que chaque  $\nu_d$  agit trivialement. Soit  $w$  un mot de longueur  $n$  concaténation de mots 01 et de  $\ell$  mots 001. On a  $n \equiv \ell(2)$ . L'image de  $c(w)$  par  $\nu_d$  est une combinaison linéaire de  $c(w')$  avec  $w'$  de longueur  $n - d$  et concaténation

de mots 01 et de  $\ell' \leq \ell$  mots 001. On a  $n - d \equiv \ell'(2)$  et,  $d$  étant impair,  $\ell$  et  $\ell'$  n'ont pas la même parité. Que  $\ell' < \ell$  prouve 6.6.

**6.7.** Il résulte de 6.6 que l'action de  $\text{Lie}^{\text{gr}} U_{dR}$  sur  $N_\ell/N_{\ell-2}$  se factorise par l'abélianisé  $\text{Lie}^{\text{gr}} U_{dR}^{\text{ab}}$ . L'action de  $\nu_d$  sur  $N_\ell/N_{\ell-2}$  ne dépend donc pas, à un facteur près, du choix des générateurs  $\nu_d$ . Elle est donnée par une application

$$(6.7.1) \quad \text{Gr}^N(\nu_d) : \text{Gr}_\ell^N(\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3)) \rightarrow \text{Gr}_{\ell-1}^N(\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3)).$$

L'espace vectoriel  $\text{Gr}_\ell^N(\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3))$  admet pour base l'image de  $\mathcal{B}_\ell(2, 3)$  (6.5). Il est gradué par le codegré. Soit  $\mathcal{B}'_\ell(2, 3)_n$  la partie de  $\mathcal{B}'_\ell(2, 3)$  formée des mots de longueur  $n$ . Notons  $\text{Gr}_\ell^N(\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3))_n$  le facteur direct de codegré  $n$  de  $\text{Gr}_\ell^N(\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3))$ . Il a pour base l'image de  $\mathcal{B}_\ell(2, 3)_n$ . Il n'est non nul que pour  $n \equiv \ell(2)$  et  $n - 3\ell \geq 0$ .

Les morphismes (6.7.1) induisent

$$(6.7.2) \quad \sum_d \text{Gr}^N(\nu_d) : \text{Gr}_\ell^N(\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3))_n \rightarrow \bigoplus_d \text{Gr}_{\ell-1}^N(\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3))_{n-d},$$

où il suffit de sommer sur  $d$  impair vérifiant  $3 \leq d \leq 3 + n - 3\ell$ . Le membre de gauche de (6.7.2) a une base indexée par  $\mathcal{B}'_\ell(2, 3)_n$ . Celui de droite a une base indexée par la réunion des  $\mathcal{B}'_{\ell-1}(2, 3)_{n-d}$ . Si  $\ell \geq 1$ , on obtient une bijection entre ces ensembles de mots en associant au mot  $w \in \mathcal{B}'_\ell(2, 3)_n$  le mot  $\bar{w}$  qui s'en déduit en ôtant de  $w$  son  $(001)(01) \cdots (01)$  final.

F. Brown calcule les morphismes (6.7.2) et prouve le

**THÉOREME 6.8.** — *Pour  $\ell \geq 1$ , les morphismes (6.7.2) sont des isomorphismes.*

La stratégie qu'il utilise pour prouver 6.8 sera expliquée au §8.

**COROLLAIRE 6.9.** — *Le morphisme de restriction à  $\mathbf{M}_{dR}$  :*

$$(6.9.1) \quad \text{restr} : \widetilde{\mathcal{H}}(2, 3) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR})$$

*est injectif.*

Appliquant (6.2.2), on déduit de 6.9 le

**COROLLAIRE 6.10.** — *La série de Poincaré de  $\mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR})$  vérifie*

$$(6.10.1) \quad P(\mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR}), t) \geq (1 - t^2 - t^3)^{-1} \quad (\text{inégalité terme à terme}),$$

*avec égalité si et seulement si (6.9.1) est bijectif.*

Admettons 6.8, et prouvons 6.9.

**LEMME 6.11.** — *Le morphisme (6.9.1) est injectif sur  $N_0$ .*

**PREUVE** — Le morphisme induit par (6.9.1) de  $N_0$  dans  $\mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR})$  est compatible aux graduations par le codegré. Il suffit donc de vérifier son injectivité séparément en chaque codegré. Les  $c((01)^n)$  forment une base de  $N_0$ , et  $c((01)^n)$  est de codegré

$2n$ . Ces codegrés étant distincts, il suffit de vérifier que pour chaque  $n$  la restriction de  $c((01)^n)$  à  $\mathbf{M}_{dR}$  est non nulle. La valeur de  $c((01)^n)$  en  $dch \in \mathbf{M}_{dR}(\mathbb{C})$  est  $(-1)^n \zeta(2^{\{n\}})$ , où  $\zeta(2^{\{n\}}) = \zeta(2, \dots, 2)$  avec  $n \ll 2$ . On conclut en observant que tout nombre multizêta est  $> 0$ , donc non nul.

REMARQUE 6.12. — Développant les identités dues à Euler

$$\prod_{n>0} (1 - z^2/n^2) = \sin(\pi z)/\pi z = \sum (-1)^n (\pi z)^{2n}/(2n+1)!,$$

on voit que  $\zeta(2^{\{n\}}) = \pi^{2n}/(2n+1)!$ . Que  $\zeta(2^{\{n\}})$  soit un multiple rationnel de  $\pi^{2n}$  résultait déjà de ce que le sous-espace motivique  $N_0$  de  $\mathcal{O}({}_1\Pi_0)$  est fixe sous  $U_{dR}$ , donc la réalisation  $dR$  d'une somme de motifs de Tate. Ceci force  $\zeta(2^{\{n\}})$  à être une période de  $\mathbb{Q}(-2n)$ .

6.13. Preuve de 6.8  $\Rightarrow$  6.9. Filtrons l'image  $\text{restr}(\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3))$  de  $\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3)$  dans  $\mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR})$  par les images des  $N_\ell$ . Il suffit de montrer l'injectivité de

$$(6.13.1) \quad \widetilde{\mathcal{H}}(2, 3) \rightarrow \text{restr}(\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3))$$

après passage aux gradués. Prouvons par récurrence sur  $\ell \geq 0$  l'injectivité sur  $\text{Gr}_\ell^N(\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3))$ . Le lemme 6.11 prouve cette injectivité pour  $\ell = 0$ . Si  $\ell > 0$ , considérons le morphisme

$$\sum \text{Gr}^N(\nu_d) : \text{Gr}_\ell^N \widetilde{\mathcal{H}}(2, 3) \rightarrow \oplus \text{Gr}_{\ell-1}^N \widetilde{\mathcal{H}}(2, 3),$$

où le but est une somme de copies de  $\oplus \text{Gr}_{\ell-1}^N \widetilde{\mathcal{H}}(2, 3)$  indexées par les entiers impairs  $d \geq 3$ . Le théorème 6.8 assure que ce morphisme est bijectif. Le morphisme (6.9.1) commute aux dérivations  $\nu_d$ . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Gr}_\ell^N \widetilde{\mathcal{H}}(2, 3) & \xrightarrow{\text{Gr}_\ell^N(6.13.1)} & \text{Gr}_\ell^N \text{restr}(\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3)) \\ \downarrow \sum \nu_d & & \downarrow \sum \nu_d \\ \oplus \text{Gr}_{\ell-1}^N \widetilde{\mathcal{H}}(2, 3) & \xrightarrow{\text{Gr}_{\ell-1}^N(6.13.1)} & \oplus \text{Gr}_{\ell-1}^N \text{restr}(\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3)) \end{array}$$

est donc commutatif. L'hypothèse de récurrence assure que  $\text{Gr}_{\ell-1}^N(6.13.1)$  est injectif. La première flèche verticale étant injective,  $\text{Gr}_\ell^N(6.13.1)$  l'est aussi.

## 7. STRUCTURE DE L'ADHÉRENCE D'ORBITE $\mathbf{M}_{dR}$

7.1. Considérons le groupoïde des  ${}_b\Pi_a$  pour  $a, b \in \{0, 1\}$ , muni de  $e_0 \in \text{Lie}_0\Pi_0$  et de  $e_1 \in \text{Lie}_1\Pi_1$ . Soit  $V_{dR}$  le schéma en groupe des automorphismes de cette structure.

L'action de  $U_{dR}$  sur le groupoïde des  ${}_b\Pi_a$  se factorise par un morphisme

$$(7.1.1) \quad I: U_{dR} \rightarrow V_{dR}.$$

On note  $IU_{dR}$  l'image de  $U_{dR}$  dans  $V_{dR}$ .

Le groupe des automorphismes qui ne respectent  $e_0 \in \text{Lie}_0\Pi_0$  et  $e_1 \in \text{Lie}_1\Pi_1$  qu'à un facteur près, le même pour  $e_0$  et  $e_1$ , est un produit semi-direct  $\mathbb{G}_m \times V_{dR}$ . On note  $\circ$  sa loi de groupe, et  $\tau$  l'inclusion de  $\mathbb{G}_m$ . L'action de  $\mathbb{G}_m$  sur les  ${}_b\Pi_a$ , est celle du sous-groupe  $\mathbb{G}_m$  de  $G_{dR}$ . Elle correspond aux graduations.

D'après [2] 5.9,

$$(7.1.2) \quad v \mapsto v({}_11_0): V_{dR} \rightarrow {}_1\Pi_0$$

est un isomorphisme de schémas. Cet isomorphisme identifie  $V_{dR}$  à  $\Pi$ , muni d'une nouvelle loi de groupe, notée  $\circ$ . L'action  $\tau$  de  $\mathbb{G}_m$  qui définit la graduation de  $\mathcal{O}({}_1\Pi_0)$  fixe  ${}_11_0$ . Il en résulte que (7.1.2) est compatible aux graduations. Puisqu'il envoie élément neutre sur élément neutre, il définit un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués

$$(7.1.3) \quad \text{Lie}^{\text{gr}}V_{dR} \xrightarrow{\sim} \text{Lie}^{\text{gr}}\Pi.$$

L'algèbre de Lie graduée  $\text{Lie}^{\text{gr}}V_{dR}$  est ainsi identifiée à  $\text{Lie}^{\text{gr}}\Pi$ , muni d'un nouveau crochet, le *crochet de Ihara*  $\{, \}$ .

**7.2.** Notons  $x \mapsto \gamma_{b,a}\langle x \rangle$  l'action sur  ${}_b\Pi_a$  de  $\gamma$  dans  $(\Pi, \circ)$ . Elle se calcule comme suit. L'action sur  ${}_a\Pi_a$  respecte la structure de groupe. Pour  $a = 0$ , elle est induite par l'automorphisme

$$(7.2.1) \quad \gamma_{00}: e_0 \mapsto e_0, \quad e_1 \mapsto \gamma^{-1}e_1\gamma$$

de l'algèbre enveloppante complétée  $\mathbb{Q} \ll e_0, e_1 \gg$  de  $\text{Lie}\Pi$ . Pour le vérifier, noter que  $e_0 \in \text{Lie}_0\Pi_0$  et  $e_1 \in \text{Lie}_1\Pi_1$  sont fixes par définition de  $V_{dR}$ . Écrivant  ${}_0(e_1)_0 = ({}_11_0)^{-1}{}_1(e_1)_1({}_11_0)$ , on obtient comme promis

$${}_0(e_1)_0 \mapsto \gamma^{-1}{}_1(e_1)_1\gamma.$$

L'automorphisme  $\gamma_{10}$  de  ${}_1\Pi_0$  est induit par l'automorphisme  $\gamma_{00}$ -semi-linéaire

$$(7.2.2) \quad \gamma_{10}: x \mapsto \gamma\gamma_{00}\langle x \rangle$$

du  $\mathbb{Q} \ll e_0, e_1 \gg$ -module à droite  $\mathbb{Q} \ll e_0, e_1 \gg$ . Le vérifier comme ci-dessus, partant de  ${}_1x_0 = {}_11_0 {}_0x_0$ . Puisque  $\gamma \circ x$  envoie  ${}_11_0$  sur  $\gamma_{10}\langle {}_1x_0 \rangle$ , c'est aussi

$$(7.2.3) \quad \gamma_{10}: x \mapsto \gamma \circ x, \quad \text{et donc}$$

$$(7.2.4) \quad x \circ y = x {}_0x_0 \langle y \rangle.$$

**7.3.** Regardons, par  $\text{comp}_{dR,B}$ ,  $\pi_1(X; b, a)_B$  comme une  $\mathbb{Q}$ -structure sur le complexifié de  $\pi_1(X; b, a)_{dR} = {}_b\Pi_a$ , la  $\mathbb{Q}$ -structure de Betti, notée  $({}_b\Pi_a)_B$ . Pour cette nouvelle

$\mathbb{Q}$ -structure,  $2\pi ie_0$  dans  $\text{Lie}_0\Pi_{0\mathbb{C}}$  et  $2\pi ie_1$  dans  $\text{Lie}_1\Pi_{1\mathbb{C}}$  sont rationnels : leurs exponentielles sont les  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  de 6.3. On en déduit le

LEMME 7.4. — *Soit  $ch$  un point rationnel de  $({}_1\Pi_0)_B$ . Regardons son image par  $\text{comp}_{dR,B}$ , encore notée  $ch$ , comme un point complexe de  $(\Pi, \circ)$ . Alors, le point complexe  $ch \circ \tau(2\pi i)$  de  $\mathbb{G}_m \times V_{dR} = \mathbb{G}_m \times (\Pi, \circ)$  transforme la  $\mathbb{Q}$ -structure de  ${}_b\Pi_a$  en sa  $\mathbb{Q}$ -structure de Betti.*

7.5. Soit  $a = u \tau(2\pi i) \in U_{dR}(\mathbb{R})\tau(2\pi i) \subset G_{dR}(\mathbb{C})$  comme en (5.8.3). Si  $ch$  est comme en 7.4, tant  $ch \tau(2\pi i)$  que  $I(u)\tau(2\pi i)$  transforment la  $\mathbb{Q}$ -structure des  ${}_b\Pi_a$  en leur  $\mathbb{Q}$ -structure de Betti. Si  $\gamma \in V_{dR}(\mathbb{C}) = \Pi(\mathbb{C})$  est défini par

$$(7.5.1) \quad ch \circ \tau(2\pi i) = I(u) \circ \tau(2\pi i) \circ \gamma,$$

$\gamma$  respecte la  $\mathbb{Q}$ -structure, donc est dans  $V_{dR}(\mathbb{Q}) = \Pi(\mathbb{Q})$ . Notant encore  $\tau$  l'action de  $\mathbb{G}_m$  sur  $\Pi$ , on peut récrire (7.5.1) sous la forme

$$ch = I(u) \circ \tau(2\pi i)(\gamma).$$

Appliquons ceci au droit chemin  $dch$  :

LEMME 7.6. — *Pour  $u$  comme ci-dessus, il existe  $\gamma$  dans  $\Pi(\mathbb{Q})$  tel que*

$$(7.6.1) \quad dch = I(u) \circ \tau(2\pi i)(\gamma).$$

Tout tel  $\gamma$  vérifie

$$(7.6.2) \quad \tau(-1)(\gamma) = \gamma.$$

PREUVE — (7.6.2) résulte de ce que  $u$  et  $dch$ , et donc aussi  $\tau(2\pi i)(\gamma)$ , sont réels.

7.7. Appliquons (7.2.3) à (7.6.1). On obtient que l'orbite de  $dch$  sous  $U_{dR}(\mathbb{C})$  est

$$IU_{dR}(\mathbb{C}) \circ \tau(2\pi i)(\gamma) \subset \Pi_{dR}(\mathbb{C}).$$

Pour obtenir l'orbite sous  $G_{dR} = \mathbb{G}_m \times U_{dR}$ , il suffit de remplacer  $\tau(2\pi i)(\gamma)$  par son orbite  $\tau(\mathbb{C}^*)(\gamma)$  sous  $\mathbb{G}_m$  :

$$(7.7.1) \quad G_{dR}(\mathbb{C})(dch) = IU_{dR}(\mathbb{C}) \circ \tau(\mathbb{C}^*)(\gamma).$$

En effet,  $IU_{dR}$  est déjà stable sous  $\mathbb{G}_m$ . Ainsi qu'on le savait déjà, l'orbite (7.7.1) est, au sens  $dR$ , définie sur  $\mathbb{Q}$ . C'est l'ensemble des points complexes de

$$(7.7.2) \quad IU_{dR} \circ \tau(\mathbb{G}_m)(\gamma) \subset \Pi.$$

Dans (7.7.2), le produit est celui de  $(\Pi, \circ) = V_{dR}$ , et le résultat est regardé comme un sous-schéma de  ${}_1\Pi_0$ .

Dans  $\mathbb{Q}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ , on a  $\gamma = \sum c_w w$ . D'après (7.6.2), la somme ne porte que sur des monômes  $w$  de degré pair. Si  $\rho(\lambda) := \sum \lambda^{\deg(w)/2} c_w w$ ,  $\rho(\lambda)$  est défini pour  $\lambda \in \mathbb{G}_a$  et vérifie

$$(7.7.3) \quad \rho(\lambda^2) = \tau(\lambda)(\gamma).$$

PROPOSITION 7.8. — *Le morphisme de schémas*

$$(7.8.1) \quad IU_{dR} \times \mathbb{G}_a \rightarrow \Pi: (u, \lambda) \mapsto u \circ \rho(\lambda)$$

*induit un isomorphisme de  $IU_{dR} \times \mathbb{G}_a$  avec  $\mathbf{M}_{dR} \subset {}_1\Pi_0$  défini en 4.2.*

PREUVE — Si  $u$  est dans  $IU_{dR} \subset V_{dR} = \Pi \subset \mathbb{Q}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle^*$ , on peut l'écrire  $u = 1 + \sum a_w w$ , où la somme ne porte que sur les monômes de degré  $\geq 3$ . C'est une conséquence de ce que  $\text{Lie}^{\text{gr}} U_{dR}$  est nul en degré  $< 3$ . Le coefficient de  $e_0 e_1$  dans  $u \circ \rho(\lambda)$  coïncide donc avec celui de  $\rho(\lambda)$ . Le coefficient de  $e_0 e_1$  dans dch est  $-\frac{\pi^2}{6} = \frac{(2\pi i)^2}{24}$ . D'après (7.7.3), celui de  $\gamma$  est donc  $1/24$ , et celui de  $\rho(\lambda)$  est  $\lambda/24$ . Partant de  $x = u \circ \rho(\lambda)$ , on retrouve  $\lambda$  comme étant  $24c(01)(x)$ , que  $x$  soit de la forme  $u \circ \rho(\lambda)$  équivaut à ce que  $u$  défini par  $x = u \circ \rho(24c(01)(x))$  soit dans  $IU_{dR}$ . C'est une condition fermée, et (7.8.1) est un isomorphisme avec un sous-schéma fermé de  $\Pi$ , dans lequel l'orbite de dch est dense. Ceci prouve 7.8.

7.9. Nous noterons  $D$  l'image de  $\mathbb{G}_a$  par  $\rho$ . On a donc  $\rho: \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} D$ , et 7.8 dit que la loi de groupe  $\circ$  induit un isomorphisme

$$(7.9.1) \quad \circ: IU_{dR} \times D \xrightarrow{\sim} \mathbf{M}_{dR}.$$

Cet isomorphisme est compatible aux graduations des algèbres affines, si  $\mathcal{O}(D) = \mathbb{Q}[\lambda]$  est gradué en donnant à  $\lambda$  le degré  $-2$  (codegré 2).

7.10. D'après 6.6 appliqué à  $N_0$ , les  $(-1)^n c((01)^n)$ , et donc leurs restrictions  $\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{n\}})$  à  $\mathbf{M}_{dR}$ , sont  $U_{dR}$ -invariantes. Transportée de  $\mathbf{M}_{dR}$  à  $IU_{dR} \times D$  par (7.9.1), l'action de  $u \in U_{dR}$  est  $(a, \lambda) \mapsto (I(u)a, \lambda)$ . Vues comme fonctions sur  $IU_{dR} \times D$ , les  $\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{n\}})$  sont donc les images inverses de fonctions sur  $D$ . À un facteur près, il n'y a qu'une telle fonction en chaque degré pair. Pour déterminer laquelle est  $\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{n\}})$ , il suffit de tester sur dch. Posons  $\pi_{\mathbf{m}}^2 := 6\zeta^{\mathbf{m}}(2)$ , une définition suggérée par l'identité  $\zeta(2) = \pi^2/6$ , et  $\pi_{\mathbf{m}}^{2n} := (\pi_{\mathbf{m}}^2)^n$ . D'après 6.12, on a :

LEMME 7.11. — (i) *Pour chaque entier  $n \geq 0$ , on a*

$$\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{n\}}) = \pi_{\mathbf{m}}^{2n} / (2n + 1)!$$

(ii)  *$IU_{dR}$  est le sous-schéma de  $\mathbf{M}_{dR}$  défini par  $\pi_{\mathbf{m}}^2 = 0$ .*

PROPOSITION 7.12. — *Pour chaque entier  $n \geq 1$ ,*

(i)  $\zeta^{\mathbf{m}}(2n)$  est un multiple rationnel de  $\pi_{\mathbf{m}}^{2n}$  (quel multiple, on le voit en évaluant sur  $dch$ );

(ii) en tant que fonction sur  $IU_{dR} \times D$ ,  $\zeta^{\mathbf{m}}(2n+1)$  est l'image inverse d'une fonction sur  $IU_{dR}$ , et celle-ci est un homomorphisme non nul de  $IU_{dR}$  dans  $\mathbb{G}_a$ ;

(iii) sur les groupes rendus abéliens, les  $\zeta^{\mathbf{m}}(2n+1)$  pour  $n \geq 1$  induisent un isomorphisme

$$U_{dR}^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} IU_{dR}^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} (\text{produit de } \mathbb{G}_a).$$

PREUVE (esquisse) — La *filtration de profondeur* de  $\text{Lie } \Pi$  est la filtration par les sous-algèbres « degré en  $e_1 \geq i$  ». On note  $D^i \Pi$  les sous-groupes correspondants. Si un sous-groupe  $Q$  de  $\Pi$ , vu comme sous-groupe de  ${}_0\Pi_0$ , est stable sous  $V_{dR}$ , il résulte de (7.2.4) que c'est aussi un sous-groupe de  $(\Pi, \circ)$ . Ceci s'applique aux  $D^i \Pi$ .

Le sous-groupe  $D^1 \Pi$  est défini par l'équation  $c(0) = 0$ . Il contient le groupe dérivé  $\Pi'$ , qui est défini par  $c(0) = c(1) = 0$ , donc contient tant  $IU_{dR}$  que  $dch$ . Le quotient  $D^1 \Pi / D^2 \Pi$  est aussi le quotient  $D^1 \Pi / D^2 \Pi$  pour la loi de groupe  $\circ$ . Il est abélien, et les  $c(0^{\{n-1\}}1)$  définissent un isomorphisme de  $D^1 \Pi / D^2 \Pi$  avec un produit de copies de  $\mathbb{G}_a$ .

Parce que  $IU_{dR} \subset (\Pi, \circ)$  a une algèbre de Lie engendrée en degré impair, si  $n$  est pair,  $c(0^{\{n-1\}}1)$  est nul sur  $IU_{dR}$ ,  $\zeta^{\mathbf{m}}(n)$ , transporté par (7.9.1) en une fonction sur  $IU_{dR} \times D$ , est l'image inverse d'une fonction sur  $D$ , et (i) se prouve par les arguments de 7.10.

Par (7.6.2), les  $c(0^{\{n-1\}}1)$  sont nuls sur  $D$  pour  $n$  impair. Que  $\zeta(n) \neq 0$  assure que, pour  $n$  impair  $\geq 3$ , ils ne sont pas nuls sur  $IU_{dR}$ . Ceci prouve (ii).

L'assertion (iii) résulte de (ii) et de ce que l'algèbre de Lie graduée de  $U_{dR}$  a un générateur en chaque degré impair  $\geq 3$ .

COROLLAIRE 7.13. — *Quels que soient les entiers  $a, b \geq 0$ , il existe des nombres rationnels  $\alpha_{a,b,r}$  ( $1 \leq r \leq a+b+1$ ), uniques, tels que*

$$(7.13.1) \quad \zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{b\}}32^{\{a\}}) = \sum_{r=1}^{a+b+1} \alpha_{a,b,r} \zeta^{\mathbf{m}}(2r+1) \zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{a+b+1-r\}}).$$

PREUVE — Regardons, par (7.9.1),  $\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{b\}}32^{\{a\}})$  comme une fonction sur  $IU_{dR} \times D$ . Développons-la selon les puissances d'une coordonnée sur  $D$  :  $\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{b\}}32^{\{a\}}) = \sum u_{2r+1} \pi_{\mathbf{m}}^{2(a+b+1-r)}$ , avec  $u_{2r+1}$  de codegré  $2r+1$  sur  $IU_{dR}$ . D'après 6.6 et 7.9, un translaté à gauche de  $u_{2r+1}$  ne diffère de  $u_{2r+1}$  que par l'addition d'une constante. C'est donc un homomorphisme de  $IU_{dR}$  dans le groupe additif. Étant de poids  $2r+1$ , c'est d'après 7.12 un multiple rationnel de  $\zeta^{\mathbf{m}}(2r+1)$  et 7.13 résulte de 7.11.

DEUS EX MACHINA 7.14 (D. Zagier [6]). — Posons  $A_{a,b}^r = \binom{2r}{2a+2}$  et  $B_{a,b}^r = (1 - 2^{-2r}) \binom{2r}{2b+1}$ . Alors

$$(7.14.1) \quad \zeta(2^{\{b\}}) \zeta(2^{\{a\}}) = 2 \sum (-1)^r (A_{ab}^r - B_{ab}^r) \zeta(2r+1) \zeta(2^{\{a+b+1-r\}}).$$

Ce théorème suggère que les  $\alpha_{a,b,r}$  de (7.13.1) sont les  $2(-1)^r (A_{a,b}^r - B_{a,b}^r)$ . Comment le prouver en partant de 7.14 sera expliqué au §8.

**7.15.** L'algèbre affine  $\mathcal{O}(U_{dR})$  de  $U_{dR}$  est en dualité, au sens gradué, avec l'algèbre enveloppante de  $\text{Lie}^{\text{gr}}(U_{dR})$ . Cette algèbre enveloppante est une algèbre associative libre en des générateurs de degrés les entiers impairs  $\geq 3$ . La série de Poincaré de  $\mathcal{O}(U_{dR})$ , gradué par le codegré, est donc

$$P(\mathcal{O}(U_{dR}), t) = \sum_{a \geq 0} \left( \sum_{n \geq 1} t^{2n+1} \right)^a = \left( 1 - \sum_{n \geq 1} t^{2n+1} \right)^{-1} \\ = (1 - (t^3/(1-t^2)))^{-1} = (1-t^2)/(1-t^2-t^3).$$

Si l'algèbre affine du groupe additif  $\mathbb{G}_a$ , de coordonnée  $\lambda$ , est graduée en donnant à  $\lambda$  le codegré 2, on a  $P(\mathcal{O}(\mathbb{G}_a), t) = (1-t^2)^{-1}$  et

$$P(\mathcal{O}(U_{dR} \times \mathbb{G}_a), t) = (1-t^2-t^3)^{-1}.$$

L'algèbre affine  $\mathcal{O}(IU_{dR})$  est une sous-algèbre graduée de  $\mathcal{O}(U_{dR})$ . Par 7.9, on a donc

PROPOSITION 7.16. — La série de Poincaré de  $\mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR})$ , gradué par le codegré, vérifie

$$(7.16.1) \quad P(\mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR}), t) \leq (1-t^2-t^3)^{-1} \quad (\text{inégalité terme à terme}),$$

avec égalité si et seulement si le morphisme  $I: U_{dR} \rightarrow IU_{dR}$  est un isomorphisme, i.e. si  $U_{dR}$  agit fidèlement sur  $\pi_1(X; 1, 0)_{dR}$ .

Comparant avec 6.10, on obtient le

THÉORÈME 7.17. — (i)  $U_{dR}$  agit fidèlement sur  ${}_1\Pi_0$ .

(ii) Le morphisme de  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels  $\widetilde{\mathcal{H}}(2, 3) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR})$  est un isomorphisme.

L'algèbre affine de  $\pi_1(X; 1, 0)_{\text{mot}}$  contient en sous-quotient un  $\mathbb{Q}(-1)$ . Il résulte donc de (i) que l'action de  $G_{dR}$  sur l'algèbre affine de  $\pi_1(X; 1, 0)_{dR}$  est fidèle. La théorie des catégories tannakiennes donne qu'en conséquence de (i), on a le

COROLLAIRE 7.18. — L'algèbre affine  $\mathcal{O}(\pi_1(X; 1, 0)_{\text{mot}})$ , qui est un Ind-objet de  $MT(\mathbb{Z})$ , engendre la catégorie tannakienne  $MT(\mathbb{Z})$ .

Plus précisément, tout motif de Tate mixte à bonne réduction sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  se déduit de sous-objets dans  $MT(\mathbb{Z})$  de  $\mathcal{O}(\pi_1(X; 1, 0)_{\text{mot}})$  par les opérations de produits tensoriels, sommes directes, duaux et sous-quotients.

L'assertion (ii) de 7.17 équivaut à dire que les  $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$  avec  $s_i \in \{2, 3\}$  forment une base de  $\mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR})$ .

## 8. ESQUISSES DE PREUVES

**8.1.** Le schéma en groupe  $V_{dR} = (\Pi, \circ)$  agit sur  ${}_1\Pi_0$  (7.1), et donc sur son algèbre affine  $\mathcal{O}({}_1\Pi_0)$ . Cette action est l'action de  $(\Pi, \circ)$  sur  $\mathcal{O}(\Pi)$  par translations à gauche (7.2.3) :  $x$  transforme  $f$  en  $y \mapsto f(x^{-1} \circ y)$ . Ces actions sont données par (7.2.1) (7.2.2). Dérivant ces formules, on obtient l'action de  $\text{Lie}(V_{dR}) = (\text{Lie } \Pi, \{ , \})$  sur  $\mathcal{O}({}_1\Pi_0)$ , et dualement la coaction de la coalgèbre de Lie. Celle-ci est  $m/m^2$ , pour  $m$  l'idéal des fonctions nulles à l'élément neutre 1, et la coaction est la projection sur  $m/m^2 \otimes \mathcal{O}(\Pi)$  de  $f \mapsto f(x^{-1} \circ y) - f(y)$  dans  $m \otimes \mathcal{O}(\Pi) \subset \mathcal{O}(\Pi \times \Pi)$ .

Goncharov a donné une formule commode pour cette coaction (voir [5] théorème 1.2). Pour  $w$  un mot de l'alphabet  $\{0, 1\}$ , considérons les sous-mots  $cId$  de  $1w0$ , avec  $I$  non vide : on considère toutes les décompositions  $w = w'Iw''$  de  $w$ , avec  $I$  non vide, et  $c, d$  sont les lettres mitoyennes à  $I$  dans  $1w0$ . Pour chaque décomposition, posons  $w \setminus I := w'Iw''$ . Formule pour la coaction :

$$(8.1.1) \quad c(w) \mapsto - \sum p_{cd}(I) \otimes c(w \setminus I),$$

où  $p_{cd}(I)$  est la projection dans  $m/m^2$  de l'élément suivant de  $m \subset \mathcal{O}(\Pi)$  :

$$(8.1.2) \quad p_{cd}(I) = \text{projection de } \begin{cases} 0 & \text{si } c = d \\ c(I) & \text{si } c = 1, d = 0 \\ \text{l'antipode } c(I)^* & \text{de } c(I) \text{ si } c = 0, d = 1, \end{cases}$$

où si  $I = a_1 \cdots a_k$ , l'antipode est  $(-1)^k c(a_k \cdots a_1)$ .

**8.2.** L'action de  $U_{dR}$  sur  $\mathcal{O}({}_1\Pi_0)$  se factorise par celle de  $IU_{dR} \subset (\Pi, \circ)$ , et pour obtenir la coaction de la coalgèbre de Lie, il reste à composer (8.1.1) avec

$$\text{coLie}(\Pi, \circ) \rightarrow \text{coLie}(IU_{dR}) \rightarrow \text{coLie}(U_{dR}).$$

Les  $c(I)$  et  $c(I)^*$  de (8.1.2) n'importent plus que par leur restriction à  $\mathbf{M}_{dR}$ , prise mod  $\pi_{\mathbf{m}}^2$  et le carré de l'idéal maximal en 1.

Nous choisirons les générateurs  $\nu_{2r+1}$  de l'algèbre de Lie  $\text{Lie}^{\text{gr}}(U_{dR})$  de sorte que, notant encore  $\nu_{2r+1}$  l'image de  $\nu_{2r+1}$  dans l'espace tangent de  $IU_{dR} \subset \Pi$  en 1, on ait

$$\langle \nu_{2r+1}, d\zeta^{\mathbf{m}}(2r+1) \rangle = 1$$

(possible par 7.12(ii)). Ceci détermine l'image de  $\nu_{2r+1}$  dans  $\text{Lie}^{\text{gr}}(U_{dR}^{ab})$ . Si  $r = a+b+1$  et que  $\alpha_{a,b}$  est le coefficient de  $\zeta^{\mathbf{m}}(2r+1)$  dans (7.13.1), on a alors

$$\langle \nu_{2r+1}, d\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{b\}}32^{\{a\}}) \rangle = \alpha_{a,b}.$$

PROPOSITION 8.3. — *La formule (7.14.1) reste vraie avec  $\zeta$  remplacé par  $\zeta^{\mathbf{m}}$ .*

PREUVE — On procède par récurrence sur  $a+b$ . Si  $a+b=0$ , l'identité (7.14.1)<sup>m</sup> à prouver se réduit à  $\zeta^{\mathbf{m}}(3) = \zeta^{\mathbf{m}}(3)$ . Supposons (7.14.1)<sup>m</sup> vraie pour  $a+b < N$ . Ceci assure que, pour  $a+b < N$  et  $r = a+b+1$ , on a, avec les notations de 7.14,

$$(8.3.1) \quad \zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{b\}}32^{\{a\}}) = 2(-1)^r (A_{ab}^r - B_{ab}^r) \zeta^{\mathbf{m}}(2r+1) \text{ sur } IU_{dR}.$$

Pour  $a+b = N$ , si les  $\alpha_{a,b,r}$  sont définis comme en 7.13, on a, pour l'action de  $\nu_{2r+1}$

$$(8.3.2) \quad \nu_{2r+1} \zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{b\}}32^{\{a\}}) = -\alpha_{a,b,r} \zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{a+b+1-r\}}):$$

appliquer 7.12. Pour  $r \leq N$ , calculons le membre de gauche par (8.1.1) (8.1.2). Il faut sommer sur les sous-mots  $I$  de  $w = (01)^b(001)(01)^a$ , de longueur  $2r+1$ , et entourés de 0, 1 ou 1, 0 dans  $1w0$ . Les  $c(w \setminus I)$ , restreints à  $\mathbf{M}_{dR}$ , sont  $\pm \zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{a+b+1-r\}})$ . Les  $c(I)$  ou  $c(I)^*$  qui apparaissent dans (8.1.2), restreints à  $\mathbf{M}_{dR}$ , sont des  $\pm \zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{b'\}}32^{\{a'\}})$  auxquels (8.3.1) s'applique par l'hypothèse de récurrence, ou un  $c((01)^m 0)$  qui, sur  $\Pi'$ , s'exprime par (3.5.2) comme somme de  $\zeta(2^{\{b'\}}32^{\{a'\}})$  auxquels (8.3.1) s'applique. Ceci permet le calcul des  $\alpha_{a,b,r}$  pour  $r \leq N$ , et on trouve qu'ils ont la valeur espérée. Ceci ne laisse inconnu dans (7.13.1) que le coefficient  $\alpha_{a,b,a+b+1}$ . On le détermine en évaluant en dch et en appliquant (7.14.1).

**8.4.** Armé de (8.3.1), on peut maintenant calculer par (8.1.1) (8.1.2) les morphismes (6.7.1). Pour prouver 6.8, l'idée est que, dans la matrice obtenue pour (6.7.2), les termes dominants, au sens 2-adique, proviennent du  $2^{-2r}$  qui figure dans  $B_{ab}^r$  (7.14). Si, au but et à la source de (6.7.2), on range les vecteurs de base dans des ordres convenables qui se correspondent par la bijection définie en 6.7, et qu'au but on multiplie les vecteurs de base par des puissances de 2 convenables, la matrice de (6.7.2) est une matrice carrée à coefficients entiers, dont la réduction modulo 2 est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Ceci assure qu'elle est inversible.

## Remerciements

Je remercie F. Brown, P. Cartier et H. Esnault de remarques et de corrections qui m'ont permis d'améliorer ce texte.

## RÉFÉRENCES

- [1] F. BROWN – Mixed Tate motives over  $\mathbb{Z}$ , *Ann. of Math.* **175** (2012), n° 2, p. 949–976.
- [2] P. DELIGNE & A. B. GONCHAROV – Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **38** (2005), n° 1, p. 1–56.
- [3] L. EULER – De summis serierum reciprocarum, *Comm. Acad. Sci. Petropol.* **7** (1734/5), p. 123–134, *Opera Omnia* Ser. I, vol. 14, p. 73–86 (voir aussi dans le même volume des *Opera Omnia* le mémoire 61, p. 138–155, pour une preuve irréprochable, et le mémoire 130, p. 407–462, pour une approximation de  $\zeta(3)$  (p. 440)).
- [4] ———, Meditationes circa singulare serierum genus, *Novi Comm. Acad. Sci. Petropol.* **20** (1775), p. 140–186, *Opera Omnia* Ser. I, vol. 15, Teubner, Berlin (1927), p. 217–267.
- [5] A. B. GONCHAROV – Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry, *Duke Math. J.* **128** (2005), n° 2, p. 209–284.
- [6] D. ZAGIER – Evaluation of the multiple zeta values  $\zeta(2, \dots, 2, 3, 2, \dots, 2)$ , *Ann. of Math.* **175** (2012), n° 2, p. 977–1000.

Pierre DELIGNE

School of Mathematics

Institute for Advanced Study

Einstein Drive

Princeton, N.J. 08540 - U.S.A.

*E-mail* : deligne@math.ias.edu