

Astérisque

WENDELIN WERNER

**Analyticité discrète du modèle d'Ising [d'après
Stanislav Smirnov]**

Astérisque, tome 348 (2012), Séminaire Bourbaki, exp. n° 1030, p. 99-117

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2012__348__99_0>

© Société mathématique de France, 2012, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ANALYTICITÉ DISCRÈTE DU MODÈLE D'ISING
[d'après Stanislav Smirnov]

par **Wendelin WERNER**

1. INTRODUCTION

La notion de fonction harmonique sur un graphe a un sens simple et naturel (la valeur de la fonction en un point est égale à la moyenne de la fonction aux sites voisins), et pour des graphes plans simples comme les portions du graphe \mathbb{Z}^2 , il est en fait facile de définir sa fonction harmonique conjuguée, et de définir des fonctions « holomorphes discrètes ». Ce sont en quelque sorte les fonctions qui vérifient, en tous points, des versions discrétisées des équations de Cauchy-Riemann. Par exemple, lorsque la fonction complexe F est définie sur une portion du graphe carré \mathbb{Z}^2 que l'on plonge dans \mathbb{C} , la relation discrète sera du type

$$F(z+i) - F(z+1) = i(F(z+i+1) - F(z)).$$

Rappelons qu'une interprétation des équations de Cauchy-Riemann ordinaires consiste à dire qu'une fonction est analytique en z si son gradient dans la direction $i-1$ est égal à i fois son gradient dans la direction $i+1$. On utilisera dans ce texte le terme « analyticité discrète » pour décrire de telles fonctions, ce qui est un tout petit peu impropre car, dans le continu, l'analyticité fait plus référence au fait que la fonction est localement une série entière (et cette approche ne se généralise pas aisément au cas discret).

Une question qui a toujours occupé les mathématiciens purs ou appliqués est de chercher à comprendre comment les structures continues peuvent être approchées par des structures discrètes. Les propriétés des fonctions analytiques (dans le continu, ainsi que sur des graphes) concernant par exemple les intégrales de contour permettent relativement simplement de voir les fonctions analytiques comme limites de fonctions analytiques discrètes sur des réseaux de plus en plus fins, et inversement de vérifier que certaines suites de fonctions analytiques discrètes convergent nécessairement (en

un sens ad hoc) vers une fonction analytique continue. Cette thématique remonte au moins jusqu'aux travaux de Jacqueline Ferrand dans les années 1940, voir [8].

Les travaux récents de Stanislav Smirnov (dont plusieurs sont en collaboration avec Dmitry Chelkak) ont montré que les problèmes issus de la physique statistique sur réseau constituent un champ d'application privilégié et spectaculaire de ce type d'idées classiques. En fait, il s'avère que l'étude de ces modèles donne précisément de « bonnes » voies pour définir ces approximations discrètes de manière élégante (il est par exemple possible de montrer simplement le théorème de Riemann à partir de considérations élémentaires sur les pavages de domaines plans par des dominos).

Nous allons dans le présent texte principalement détailler une partie de la preuve de « l'invariance conforme du modèle d'Ising » en suivant les arguments de l'article [24] de Stanislav Smirnov. On peut décomposer cette preuve en plusieurs étapes :

- La première consiste à reformuler la question initiale concernant le modèle d'Ising via certains modèles de familles de boucles aléatoires.
- La seconde étape, qui sera celle sur laquelle nous insisterons le plus, est de montrer que certaines fonctions définies comme des espérances de certaines quantités (pour ces modèles de boucles) sont en fait exactement analytiques discrètes.
- Ensuite, il faut exploiter cette analyticité discrète et montrer que, lorsque la maille du réseau tend vers 0, ces fonctions analytiques discrètes convergent vers une certaine fonction analytique continue.
- Finalement, il faut utiliser ce résultat, un peu comme un ouvre-boîte, pour décrire le comportement complet du système (et pas uniquement ces fonctions particulières) lorsque la maille du réseau tend vers 0.

Chacune des trois dernières étapes s'avère non-triviale. La dernière requiert en fait des techniques différentes, ainsi que l'introduction des processus de Loewner-Schramm (SLE) dont nous ne parlerons pas du tout ici. Afin d'éviter que le lecteur non-initi e ne se perde dans les définitions de nombreux modèles probabilistes discrets, nous avons choisi de ne pas commencer par présenter la première étape, mais de définir directement le modèle de boucles aléatoires et les fonctionnelles particulières qu'il est possible de définir dans ce cas, et nous reviendrons très brièvement à la fin de ce texte sur la définition du modèle d'Ising et le lien entre celui-ci et ces modèles de boucles.

2. LE MODÈLE DE BOUCLES

On se donne une portion simplement connexe d'un réseau carr e de type $\delta\mathbb{Z}^2$. Chaque petite face carrée est alors remplie avec l'un des deux dessins suivants :



Ainsi, le remplissage d'un domaine donne une configuration avec des chemins ouverts et des boucles comme dans la figure 1. On cherche alors à décrire la géométrie

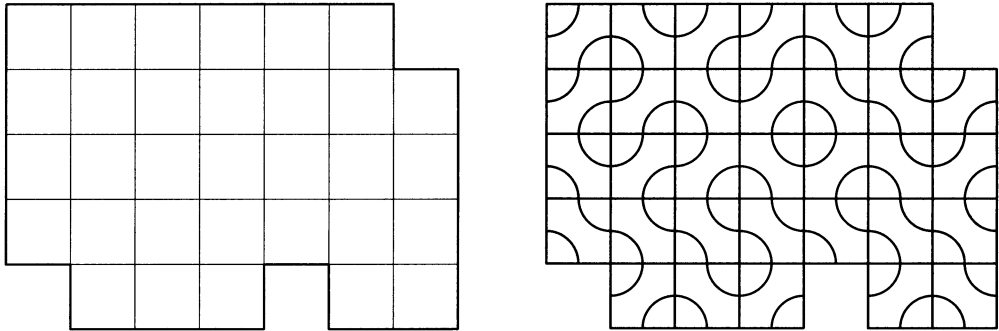


FIGURE 1. Un domaine et une configuration.

des courbes obtenues et à obtenir des informations qui permettront de contrôler le passage à la limite lorsque le domaine devient très grand (et la maille du réseau est fixée) ou lorsque la maille du réseau tend vers 0 (et le domaine est fixé). On peut fixer des conditions au bord *a priori*, les deux plus simples étant celles de la figure 2.

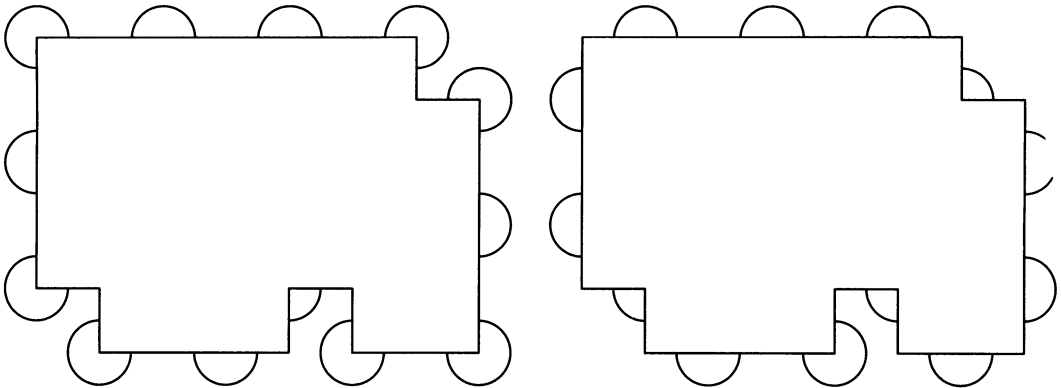


FIGURE 2. Les conditions au bord.

Pour chacune de ces conditions au bord, la configuration précédente devient alors une configuration formée de boucles fermées (voir la figure 3).

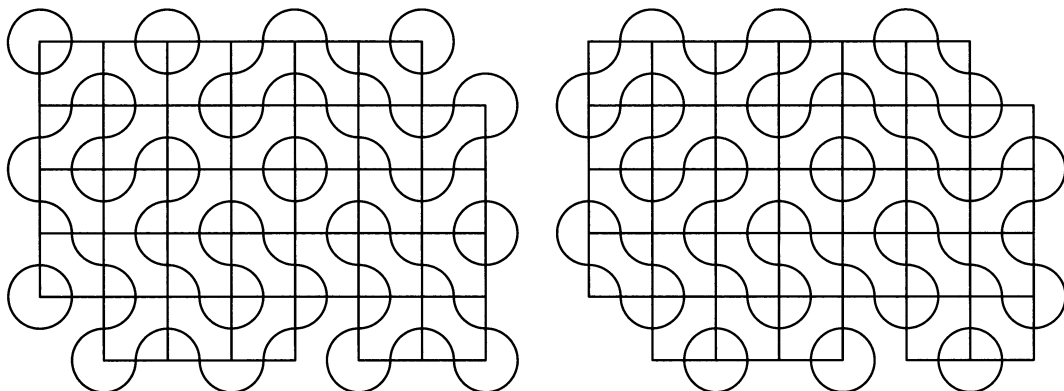


FIGURE 3. Les configurations associées.

Il s'avérera en fait judicieux de choisir la condition au bord de façon à faire apparaître un chemin particulier comme dans la figure 4, en effectuant un décalage dans les conditions au bord. On voit maintenant une famille de boucles fermées et un chemin γ ,

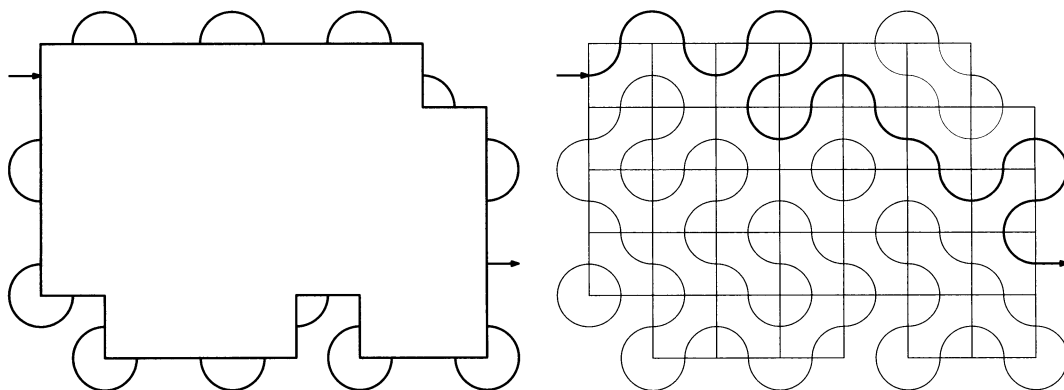


FIGURE 4. La condition au bord avec décalage et la configuration associée.

qui relie le point d'entrée au point de sortie que l'on s'est ainsi choisi. On peut alors étudier la géométrie de ce chemin particulier et c'est ce que nous nous attacherons dorénavant à faire.

Il nous reste cependant à préciser comment choisir au hasard notre remplissage. Si l'on tirait à pile ou face indépendamment pour chaque face, on aurait le modèle de la percolation, dont l'invariance conforme asymptotique est (pour ce réseau) encore une question ouverte (la question a cependant été résolue pour un autre réseau par Smirnov [22]). Il est en fait naturel de se donner un paramètre $n \geq 0$, de fixer les

conditions aux bord du domaine, et de choisir la configuration au hasard en pondérant sa probabilité en utilisant le nombre total $k(\omega)$ de boucles fermées qui apparaissent. Plus précisément, la probabilité d'une configuration ω sera proportionnelle à $n^{k(\omega)}$:

$$P_n(\omega) = Z_n^{-1} n^{k(\omega)}$$

où Z_n est la constante de normalisation choisie pour que ceci soit bien une loi de probabilité. Ainsi, une configuration particulière avec 5 boucles sera n fois plus probable qu'une configuration avec 4 boucles, etc.

Notons que (lorsque $n \neq 1$) les conditions choisies au bord du domaine influencent la loi du remplissage puisqu'elles influencent le nombre de boucles obtenues (comme dans les exemples ci-dessus). Le modèle qui attirera particulièrement notre attention sera celui où $n = \sqrt{2}$ (c'est celui dont nous verrons plus loin qu'il est étroitement relié au modèle d'Ising).

3. UNE OBSERVATION COMBINATOIRE

Dans ce paragraphe, on va fixer un graphe et des conditions au bord avec décalage comme précédemment. On notera avec des lettres minuscules les centres des faces carrées. On notera ainsi a et b les points de départ et d'arrivée de γ . Les lettres majuscules désigneront des milieux entre deux faces adjacentes (partageant un côté entier). On peut ainsi voir ces points comme des arêtes reliant deux centres de faces. Vu comme ceci, il y a ainsi des arêtes verticales (qui relient deux faces adjacentes l'une au-dessus de l'autre) et des arêtes horizontales. Lorsque l'on choisit une configuration, chaque arête A est sur une boucle fermée ou sur le chemin ouvert γ . Si A est sur γ , alors γ passe par A avec la direction donnée par A (horizontale si A est horizontal, etc.).

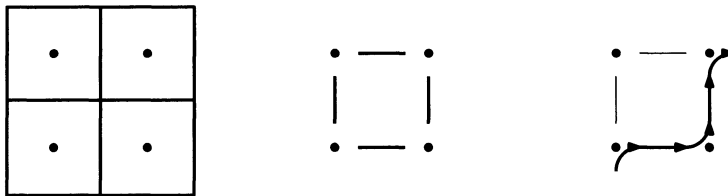


FIGURE 5. Quatre faces, les sites et arêtes correspondants, un exemple de parcours de γ .

Observons que pour des raisons de parité (car le chemin γ tourne à chaque pas), pour une arête donnée A , le sens dans lequel γ peut parcourir cette arête est prescrit

une fois donnés le graphe et les conditions au bord. Par exemple, si pour une configuration donnée, γ passe par A en allant de la gauche vers la droite (si on oriente γ de a vers b) alors il en sera de même pour toutes les configurations pour lesquelles γ passe par A (une manière simple de s'en convaincre est de colorier les points de $\delta\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire les coins des faces initiales, en deux couleurs comme un damier et de noter que γ laisse toujours une même couleur « à sa droite »).

Dans l'exemple du domaine avec conditions au bord des figures ci-dessus, il est clair que γ doit tourner autant de fois vers la droite que vers la gauche lors de son parcours de a vers b (ceci est dû à l'orientation des arêtes issues de a et arrivant vers b , et au fait que le bord du domaine ne « tourne pas » autour de b lorsqu'on le parcourt de a vers b). Si Z est une arête du graphe par laquelle γ passe, nous venons de voir que l'orientation de γ lorsqu'elle passe en Z est toujours la même. On note $W(Z \rightarrow b, \gamma)$ l'angle dont tourne γ entre Z et b . On compte ainsi $\pi/2$ fois la différence entre le nombre de virages vers la gauche et le nombre de virages vers la droite.

Ainsi pour une arête Z donnée qui doit être parcourue dans le même sens que celui par lequel on arrive en b (vers l'est dans notre dessin), $W(Z \rightarrow b, \gamma)$ est un multiple entier de 2π dès que γ passe par Z . Plus généralement, pour toute arête Z , il existe $j = j(Z)$ dans $\{0, 1, 2, 3\}$ (dépendant de l'orientation de Z et de sa « parité » par rapport à l'orientation par laquelle la courbe doit sortir en b) tel que

$$W(Z \rightarrow b, \gamma) \in \frac{j\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$$

pour toute configuration où γ passe par Z .

Dans la suite, on va supposer que $n \in [0, 2]$ et on choisit alors $\sigma \in [0, 1]$ de sorte que

$$2 \cos(\sigma\pi/2) = n.$$

On définit alors la fonction

$$F(Z) = E \left(1_{\{Z \in \gamma\}} \exp(i\sigma W(Z \rightarrow b, \gamma)) \right).$$

En d'autres termes, on pondère la probabilité pour que γ passe par Z par un nombre complexe qui dépend du nombre de tours $W(Z \rightarrow b, \gamma)$.

PROPOSITION 3.1. — *On se donne un site z du réseau et on note N, E, S, O les quatre arêtes adjacentes à z ordonnées dans le sens des aiguilles d'une montre en partant de celle du haut. Alors on a $F(N) + F(S) = F(O) + F(E)$.*

Démonstration. — Fixons un site z et un chemin γ possible qui passe par l'une au moins des arêtes adjacentes à z . Quitte à changer le graphe par une rotation et/ou une symétrie (ou à changer les notations), on peut supposer que ce chemin γ visite O d'abord. Ainsi, γ arrive par O en se dirigeant vers z . Deux cas peuvent se produire. Soit γ ne passe que par deux des arêtes adjacentes à z , soit il les visite toutes les

quatre. Supposons par exemple que γ reparte finalement de z vers b via l'arête S . Les deux possibilités sont alors :

- La courbe γ arrive via O , tourne à droite sur S et part vers b sans repasser par E ou N .
- La courbe γ arrive via O , tourne à gauche sur N , revient un peu plus tard via E , tourne à gauche sur S et part vers b .

Supposons que la configuration ω soit telle que le premier cas est vérifié. Alors, en ne changeant que l'état de l'arête qui passe par z , on définit une configuration ω' telle que le second cas est vérifié. La seule différence entre le système de boucles de ω' par rapport à celui de ω est que le branchement sur z est $E \rightarrow N$ et $O \rightarrow S$ au lieu de $E \rightarrow S$ et $O \rightarrow N$. Ainsi, on ouvre la boucle de ω qui passe par N , et on la rattache à γ : clairement, pour chaque z , changer ω juste au voisinage de z définit une bijection

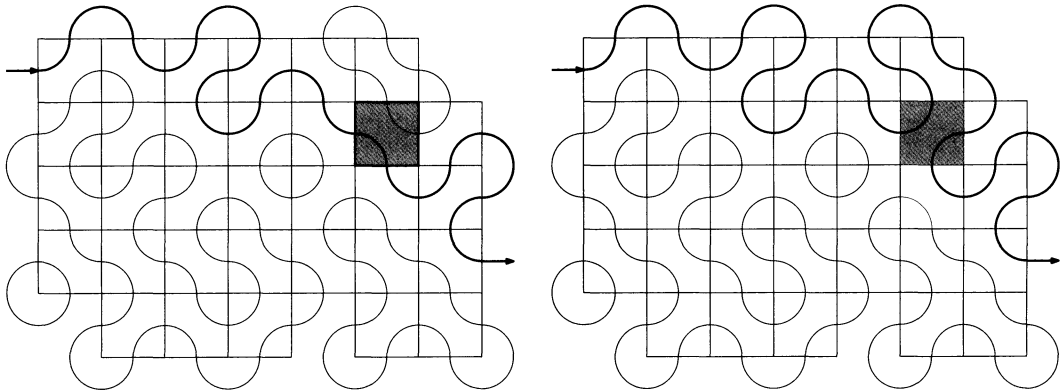


FIGURE 6. Deux configurations ω et ω' associées.

$\omega \mapsto \omega'$ entre les configurations ω pour lesquelles γ ne passe qu'une fois au voisinage de z et celles où γ passe deux fois au voisinage de z .

Notons, pour toute arête Z ,

$$f(Z, \omega) = 1_{Z \in \gamma} e^{i\sigma W(Z \rightarrow b, \gamma)}.$$

Pour chaque couple (ω, ω') en correspondance, on va montrer que

$$\begin{aligned} P(\omega)(f(N, \omega) + f(S, \omega) - f(E, \omega) - f(O, \omega)) \\ + P(\omega')(f(N, \omega') + f(S, \omega') - f(E, \omega') - f(O, \omega')) = 0, \end{aligned}$$

ce qui implique immédiatement la proposition (en sommant ensuite cette identité sur tous les couples (ω, ω') pour z donné).

Notons tout d'abord que $P(\omega)/P(\omega') = n$ (car ω' a exactement une boucle de moins que ω). On note $f(S, \omega) = Y$ et on suppose que pour ω , γ arrive par O et

repart par S (et ne passe pas par N et E), les autres cas étant traités de manière identique. La quantité Y dépend alors du nombre algébrique de virages effectués par γ entre S et b . Notons tout de suite que $f(O, \omega)$ vaut alors λY où

$$\lambda = \exp(-i\sigma\pi/2)$$

puisque γ fait un quart de tour vers la droite en plus pour tourner de O en S . De plus $f(N, \omega) = f(E, \omega) = 0$ car γ ne passe ni par N ni par E pour ω .

On va maintenant évaluer f sur ces quatre mêmes arêtes mais pour la configuration ω' obtenue en changeant le virage effectué au voisinage de z . Ainsi, pour ω' , la nouvelle courbe γ' arrive via O , tourne à gauche et part par N , revient via E et repart ensuite vers b via S exactement comme γ . Ainsi, $f(S, \omega) = f(S, \omega') = Y$. De plus, $f(E, \omega')$ vaut Y/λ car la courbe doit tourner une fois à gauche pour passer de E à S . De même, $f(N, \omega') = \lambda^2 Y$ et $f(O, \omega') = \lambda Y$. En conclusion, on a donc (en utilisant la définition de σ)

$$\begin{aligned} & n \times (f(N, \omega) + f(S, \omega) - f(E, \omega) - f(O, \omega)) \\ & + (f(N, \omega') + f(S, \omega') - f(E, \omega') - f(O, \omega')) \\ & = n(Y - \lambda Y) + (\lambda^2 Y + Y - Y/\lambda - \lambda Y) \\ & = n(Y - \lambda Y) + (Y\lambda(\lambda + 1/\lambda) - Y(\lambda + 1/\lambda)) \\ & = n(Y - \lambda Y) + 2\cos(\sigma\pi/2)(\lambda Y - Y) \\ & = 0. \end{aligned}$$

□

4. DE L'OBSERVATION COMBINATOIRE À L'ANALYTICITÉ DISCRÈTE

Dans le cas où $n = \sqrt{2}$ et $\sigma = 1/2$ sur lequel nous allons maintenant nous arrêter, la proposition précédente va pouvoir facilement s'interpréter comme une relation de Cauchy-Riemann discrète. Les arguments développés dans cette partie utilisent de manière importante le fait que l'on choisit cette valeur particulière de n . Notons que, pour une arête donnée Z , on a alors toujours

$$\sigma W(Z \rightarrow b, \gamma) \in j(Z)\pi/4 + \pi\mathbb{Z}$$

de sorte que

$$\exp(i\sigma W(Z \rightarrow b, \gamma)) \in \{e^{ij(Z)\pi/4}, -e^{ij(Z)\pi/4}\}.$$

Ainsi, $F(Z)$ est forcément colinéaire avec $e^{ij(Z)/4}$ et on peut interpréter $|F(Z)|$ comme la différence de deux probabilités

$$|F(Z)| = \left| P(Z \in \gamma \text{ et } \lfloor \frac{W(Z \rightarrow b, \gamma)}{2\pi} \rfloor \in 2\mathbb{Z}) - P(Z \in \gamma \text{ et } \lfloor \frac{W(Z \rightarrow b, \gamma)}{2\pi} \rfloor \in 2\mathbb{Z} + 1) \right|.$$

Pour des raisons de parité, pour un site z donné, avec arêtes adjacentes notées N , E , S et O comme précédemment, les vecteurs $e^{ij(N)\pi/4}$ et $e^{ij(S)\pi/4}$ sont orthogonaux. Ainsi, si l'on pose

$$F(z) = F(N) + F(S)$$

alors $F(N)$ est la projection de $F(z)$ sur $e^{ij(N)\pi/4}$, et $F(S)$ celle sur $e^{ij(S)\pi/4}$. Mais comme $F(N) + F(S) = F(O) + F(E)$ et que, de même, $e^{ij(E)\pi/4}$ et $e^{ij(O)\pi/4}$ sont orthogonaux, $F(E)$ et $F(O)$ sont les projections de $F(z)$ sur ces deux vecteurs. Ceci implique en particulier la relation

$$|F(z)|^2 = |F(S)|^2 + |F(N)|^2 = |F(O)|^2 + |F(E)|^2$$

qui nous sera utile plus tard.

PROPOSITION 4.1. — *Si z_1, z_2, z_3 et z_4 désignent quatre sites (de $\delta(Z^2 + (1/2, 1/2))$) autour d'une petite face carrée C , ordonnés dans le sens des aiguilles d'une montre, alors $F(z_3) - F(z_1) = i(F(z_4) - F(z_2))$.*

Rappelons que cette relation est bien une relation de Cauchy-Riemann discrète pour la fonction F . Le gradient dans la direction $z_3 - z_1 = i(z_4 - z_2)$ est égal à i fois celui dans la direction $z_4 - z_2$.

Preuve de la proposition. — On cherche à évaluer la somme $\Sigma = F(z_1) - iF(z_2) - F(z_3) + iF(z_4)$. Pour cela, on exprime chaque $F(z_j)$ comme combinaison linéaire des valeurs de F sur les deux arêtes du bord de C qui sont adjacentes à z_j (notons que si l'on connaît la projection orthogonale d'un nombre complexe dans deux directions distinctes, on connaît ce nombre complexe ; ainsi, la donnée de F sur deux des quatre arêtes adjacentes à z_j caractérise $F(z_j)$ de manière unique et simple). Dans la somme Σ , le terme $F(Z)$ apparaît donc deux fois pour chaque arête Z (une fois pour chaque extrémité de Z). Il est élémentaire de vérifier que, pour chaque Z , ces deux contributions de $F(Z)$ se compensent exactement, ce qui montre que $\Sigma = 0$ et prouve la proposition. \square

5. PASSAGE À LA LIMITE

Il faut ensuite exploiter cette analyticité discrete afin d'en déduire la convergence d'une fonction discrete définie à partir du modèle de boucles sur un réseau de maille δ , vers une fonction continue (analytique ou harmonique) lorsque $\delta \rightarrow 0$ et que les domaines discrets (simplement connexes) approximent un domaine continu simplement connexe donné. Voici un rapide aperçu des différentes étapes de la preuve de Smirnov [24].

5.1. Des intégrales discrètes

Comme souvent, il s'avère techniquement plus pratique de ne pas passer à la limite directement à partir des relations de Cauchy-Riemann discrètes elles-mêmes, mais d'utiliser une version "int gr e" de celles-ci (comme des intégrales de contour par exemple). Nous allons voir dans ce paragraphe que l'analyticité discrete que nous avons établie permet de définir de manière naturelle une fonction H qui est en fait un analogue discret de la partie imaginaire de la primitive de F^2 dont nous allons étudier le comportement asymptotique lorsque la maille du réseau tend vers 0.

Cependant, le carré d'une fonction qui vérifie les relations de Cauchy-Riemann discrètes ne vérifie (en général) pas les relations de Cauchy-Riemann discrètes (contrairement au cas continu où le carré d'une fonction holomorphe est holomorphe). Notre fonction H ne sera pas harmonique discrete, mais nous verrons qu'il est malgré tout possible de contrôler son comportement asymptotique.

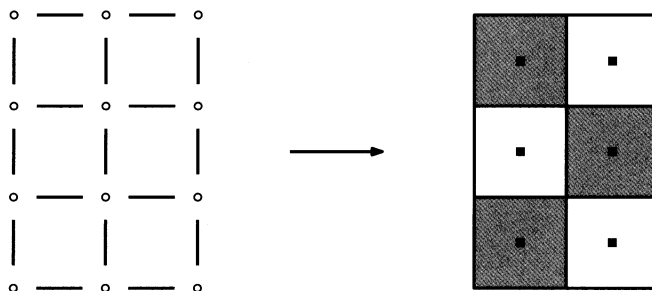


FIGURE 7. Des sites aux faces.

Il est possible de colorier les faces du graphe carré défini en utilisant les sites z et les arêtes sur lesquelles on a défini F comme un damier. Il y a alors deux sortes de faces : les noires et les blanches. On veut définir une fonction H discrete sur l'ensemble des faces de sorte que, pour toute paire de faces \mathcal{N} (noire) et \mathcal{B} (blanche), adjacentes et s par es par une arête Z ,

$$H(\mathcal{N}) - H(\mathcal{B}) = |F(Z)|^2.$$

Pour qu'il soit possible de définir une fonction qui vérifie cette propriété pour toute paire de carrés adjacents, il faut et il suffit que la somme des incréments le long d'un chemin ne dépende que des faces de départ et d'arrivée. En fait, comme le domaine

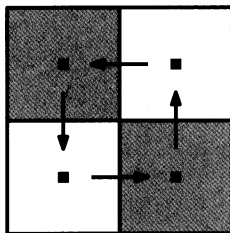


FIGURE 8. Faire le tour de 4 carrés adjacents.

choisi est simplement connexe, il suffit de vérifier que, pour toute famille de quatre faces adjacentes comme sur la figure 8, la somme des quatre incréments en faisant le « tour » est nulle, c'est-à-dire que (avec des notations évidentes, où z est le site situé au centre de la figure)

$$|F(N)|^2 - |F(E)|^2 + |F(S)|^2 - |F(O)|^2 = 0.$$

Mais nous avons justement noté que $|F(E)|^2 + |F(O)|^2 = |F(z)|^2 = |F(N)|^2 + |F(S)|^2$ ce qui montre donc précisément que l'on peut bien définir cette fonction H de manière univoque à partir de la donnée de H en une face.

Notre premier but est de voir que H est (presque) harmonique dans le domaine considéré, en utilisant le fait que F est analytique. En fait, la fonction H ne peut pas être exactement harmonique puisque, par définition, la valeur de H sur une face noire est plus grande que sur les faces blanches adjacentes. Cependant, on va montrer grâce à l'analyticité discrète de F le résultat suivant :

LEMME 5.1. — — Si f est une face noire intérieure à D , alors la moyenne de H sur les quatre faces noires ayant un coin en commun avec f est supérieure à $H(f)$.

— Si f est une face blanche intérieure à D , alors la moyenne de H sur les quatre faces blanches ayant un coin en commun avec f est inférieure à $H(f)$.

Notons que, par symétrie, le résultat concernant H sur les faces blanches implique celui sur les faces noires.

Preuve du lemme. — On se donne donc une face blanche f intérieure à D , et on veut montrer que la moyenne des valeurs de H sur les quatre voisins blancs (i.e. les quatre faces blanches qui ont un coin en commun avec f) est inférieure à $H(f)$ (on note Δ cette différence dont nous cherchons donc à montrer qu'elle est négative). Il nous faut donc montrer que la somme des incréments de H le long des flèches

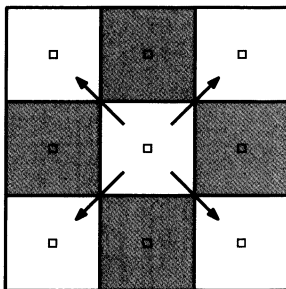


FIGURE 9. Le laplacien discret sur les faces blanches.

orientées indiquées dans la figure 9 est négative. On note $x_1, x_2e^{i\pi/4}, ix_3$ et $e^{3i\pi/4}x_4$ les valeurs de F sur les quatre arêtes du bord de f . En utilisant la proposition 3.1 en chacun des quatre coins de f , on peut en déduire, en fonction de x_1, x_2, x_3 et x_4 , la valeur de F en chacune des huit arêtes dont une extrémité (et une seule) est sur le carré. Ainsi, on obtient par un calcul élémentaire que la différence Δ recherchée vaut $-4\|x_1 - e^{i\pi/4}x_2 + ix_3 - e^{3i\pi/4}x_4\|^2$, ce qui conclut la preuve du lemme. \square

Ainsi, lorsque l'on restreint H à l'ensemble des faces blanches ou à l'ensemble des faces noires, on obtient des fonctions de laplacien négatif ou positif. En fait, les valeurs de H en deux faces adjacentes (une blanche et une noire) deviennent très proches lorsque la maille du réseau tend vers 0, ce qui expliquera pourquoi la limite de H sera en fait harmonique.

Une fonction harmonique est déterminée par ses valeurs au bord de son domaine de définition (s'il est borné), et on s'intéresse par conséquent au comportement de H au bord de son domaine de définition. Rappelons qu'à ce stade la fonction H n'a en fait été définie qu'à une constante additive près. Notons d_1 l'ensemble des faces blanches du bord du domaine de définition de H situées sur la partie du bord entre a et b qui va dans le sens trigonométrique direct de a vers b , et d_2 l'ensemble des faces noires de l'autre partie du bord. Nous allons définir H de sorte que $H = 0$ sur l'une des faces blanches notée \mathcal{B}_0 de d_1 . Il est facile de voir qu'alors H est nulle sur toutes les autres faces blanches de ce bord « gauche ». En effet, lorsque l'interface passe le long de l'une des arêtes qui sépare une face blanche du bord d'une face noire adjacente et dans D , alors elle passe forcément aussi le long des autres arêtes séparant cette face noire du bord blanc.

Par ailleurs, γ passe forcément par a et b . Si Z désigne l'arête par laquelle γ doit arriver en b , de sorte que $|F(Z)| = 1$, on en déduit que H vaut 1 sur les faces noires de l'autre partie du bord (elle est constante sur les faces noires de l'autre partie du bord pour les mêmes raisons que précédemment).

5.2. Un premier théorème limite

Nous allons maintenant étudier le comportement asymptotique de ces fonctions H lorsque la maille du réseau tend vers 0. Plus précisément, supposons que D soit un domaine simplement connexe borné dans \mathbb{C} , dont le bord est constitué d'un lacet continu (ceci n'est en fait pas nécessaire mais simplifiera nos notations), et que l'on choisisse deux points distincts a et b de ∂D .

Pour chaque valeur de δ , on définit une approximation D_δ simplement connexe de D dans le réseau $\delta\mathbb{Z}^2$ de maille δ . En outre, on choisit deux faces sur le bord de D_δ , que l'on appelle a_δ et b_δ de sorte que a_δ et b_δ soient proches de a et b lorsque δ est très petit.

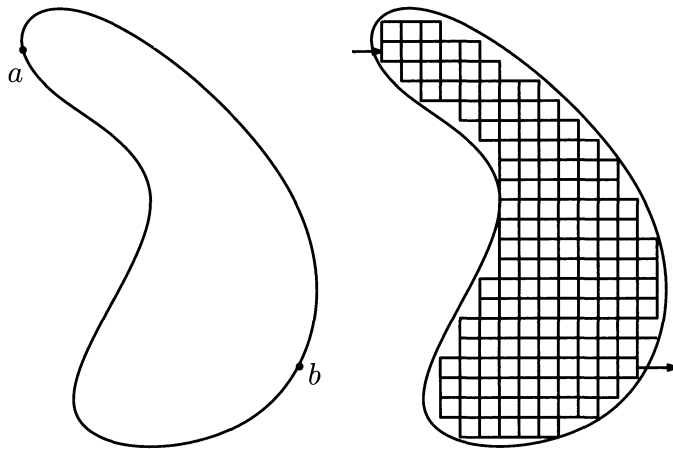


FIGURE 10. L'approximation D_δ du domaine D .

Ainsi, pour chaque valeur de δ , on définit, comme dans les parties précédentes, des fonctions F_δ et H_δ . La question est de comprendre le comportement asymptotique de ces fonctions lorsque δ tend vers 0. Le résultat de Smirnov [24] est le suivant :

THÉORÈME 5.2. — *Lorsque $\delta \rightarrow 0$, alors $H = H_\delta$ converge, uniformément sur tout compact strictement inclus dans D , vers la solution h de l'équation $\Delta h = 0$ qui prend les valeurs 0 et 1 sur les deux parties du bord de D délimitées par a et b .*

Ceci n'est pas surprenant compte tenu de ce que nous avons déjà noté sur les fonctions H_δ :

- Le laplacien de la restriction de H_δ aux faces noires est positif.
- Le laplacien de la restriction de H_δ aux faces blanches est négatif.
- La fonction H_δ vaut 0 sur les faces blanches de $d_1(\delta)$.
- La fonction H_δ vaut 1 sur les faces noires de $d_2(\delta)$.

Pour conclure, il suffit essentiellement de voir que les valeurs de H_δ en deux faces adjacentes (à distance macroscopique de a et de b) sont très proches lorsque δ est très petit. En effet, modulo quelques simples considérations techniques, cela permet de montrer que toute limite extraite de fonctions H_δ sera à la fois sur-harmonique et sous-harmonique dans D et avec conditions au bord 0 sur d_1 et 1 sur d_2 , ce qui permet de conclure.

Considérons donc deux faces adjacentes de D_δ qui ne sont pas proches de a ou de b , et qui sont séparées par une arête Z . Clairement, la différence entre les valeurs de H_δ en ces deux faces est majorée par $P(Z \in \gamma_\delta)^2$. Il faut donc juste montrer que la probabilité pour que γ passe par une arête donnée tend vers 0 lorsque $\delta \rightarrow 0$. Pour cela, on peut invoquer des résultats assez classiques concernant le modèle d'Ising (certains remontent à Lars Onsager) ou alors travailler directement à partir des propriétés des fonctions F_δ .

6. AUTRES CONSÉQUENCES

Énonçons maintenant sans preuve quelques-uns des résultats que l'on peut obtenir en exploitant les énoncés précédents :

- Il est possible de montrer la convergence de la fonction F_δ elle-même (renormalisée de manière appropriée). Supposons que Φ désigne une application conforme de D dans $\mathbb{R} \times (0, 2)$ qui envoie a et b sur $-\infty$ et $+\infty$ respectivement. Alors :

THÉORÈME 6.1. — *Pour tout point $z \in D$, $F_\delta(z)/\sqrt{\delta}$ converge lorsque $\delta \rightarrow 0$ vers une détermination continue de la racine carrée de $\Phi'(z)$.*

Donnons brièvement quelques éléments pour expliquer ce résultat : une fonction analytique dans un domaine D est déterminée par sa valeur au bord du domaine (les parties réelles et imaginaires étant harmoniques). Il nous faut donc étudier des « conditions au bord » vérifiées par F dans le cas discret. Une étude attentive du cas discret montre que, si l'on suppose que l'arête « finale » de γ est orientée vers la droite et que z est adjacent au bord du domaine, alors $F(z)$ est parallèle à $T(z)^{-1/2}$, où $T(z)$ désigne le vecteur « tangent » au domaine près de z . C'est cette relation qui sera préservée à la limite, et qui donne comme condition asymptotique pour la limite convenablement renormalisée f de F qu'elle est, d'une part, analytique et que, d'autre part, $f^2(z)t(z)$ est réelle sur ∂D où $t(z)$ désigne le vecteur tangent à ∂D en z . Ceci permet alors d'identifier la limite.

Lorsque Φ est définie comme précédemment, alors Φ est clairement analytique. Par définition, $t(z)\Phi'(z)$ est réel sur $\partial D \setminus \{a, b\}$. Une détermination continue de la racine de $\Phi'(z)$ est bien une fonction analytique dans D qui vérifie la

condition au bord voulue. Notons que Φ est déterminée à une translation réelle près, mais que cette constante n'affecte pas la valeur de Φ' .

- En exploitant le fait que les limites précédentes sont « invariantes conformes », il est en fait possible (voir [11]) de contrôler le comportement limite de la loi de toute la courbe aléatoire γ_δ lorsque $\delta \rightarrow 0$.

THÉORÈME 6.2. — *Lorsque $\delta \rightarrow 0$, la loi de γ_δ converge vers celle d'un processus SLE (processus de Loewner-Schramm) de paramètre $16/3$ de a vers b dans D , c'est-à-dire une certaine courbe aléatoire de dimension fractale $5/3$.*

Ceci permet en fait en principe de décrire la loi limite de l'ensemble des boucles de notre modèle de départ.

7. AUTRES RÉSULTATS, ET REMARQUES BIBLIOGRAPHIQUES

7.1. Lien avec le modèle d'Ising

Pour conclure, voici un très bref aperçu du classique lien entre le modèle de boucles précédent et le modèle d'Ising critique dans \mathbb{Z}^2 :

Donnons-nous une portion de \mathbb{Z}^2 comme précédemment. Une configuration (pour le modèle d'Ising) sera une application σ qui associe à chaque site z de ce graphe une valeur $\sigma(z)$ (communément appelée « spin » en z) dans $\{-1, +1\}$. Le modèle d'Ising de paramètre $\beta > 0$ est une loi de probabilité sur cet ensemble de fonctions σ qui favorise les configurations σ ayant le moins de sites voisins de spins opposés. Plus précisément, si on note $E(\sigma)$ le nombre de couples de sites x, y qui sont voisins et tels que $\sigma(x) = -\sigma(y)$, alors

$$P_\beta(\sigma) = c_\beta \times \exp(-\beta E(\sigma)),$$

où c_β est la constante de normalisation choisie de sorte que $\sum_\sigma P_\beta(\sigma) = 1$. Il s'avère que, lorsque le domaine est très grand, le comportement de P_β dépend grandement de la valeur de β . Une valeur critique β_c sépare deux comportements possibles (lorsque $\beta > \beta_c$, le système choisit une opinion clairement majoritaire, alors que cela n'est pas le cas lorsque la pénalisation β est plus faible que β_c). Il est alors intéressant d'étudier le comportement du système critique lorsque β est exactement égal à β_c .

Dans ce cas, il est possible de coupler une réalisation de σ avec une réalisation du système de boucles précédent lorsque $n\sqrt{2}$. En particulier, si l'on choisit les conditions au bord du domaine de manière convenable, on peut identifier la probabilité (pour le modèle d'Ising à β_c) pour que les spins en deux points x et y soient égaux, avec la probabilité (pour le modèle de boucles avec $n = \sqrt{2}$) qu'aucune boucle ne sépare

x de y . Ainsi, les résultats sur l'invariance conforme asymptotique des modèles de boucles peuvent se traduire en termes du modèle d'Ising.

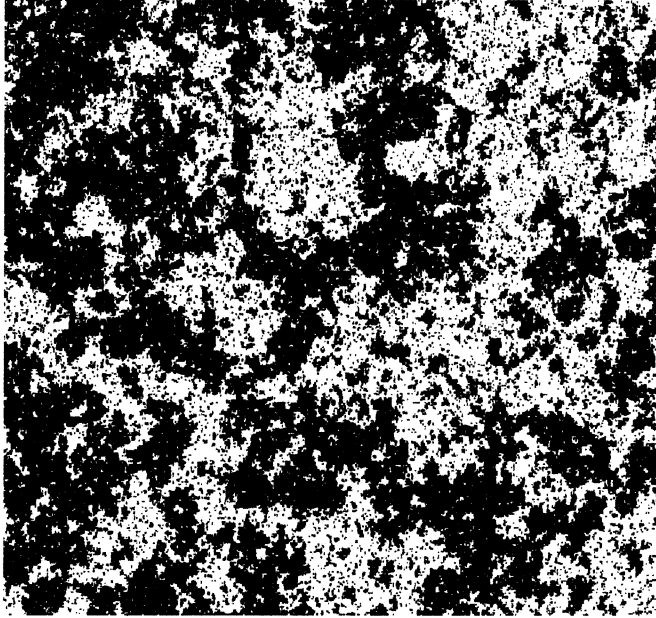


FIGURE 11. Une simulation du modèle d'Ising critique (par Vincent Beffara).

7.2. Très bref survol bibliographique

L'étude des modèles de boucles et du modèle d'Ising a motivé de nombreux travaux importants dans la communauté physique, que nous ne pouvons pas citer tous ici :

- Dans les années 1940, Onsager, Kaufmann, Kramers, Wannier, Yang et d'autres (voir [10, 15, 27]) ont exploité des identités combinatoires pour effectuer certains calculs explicites sur ces modèles (on parle communément de la « résolution » par Onsager du modèle d'Ising dans les livres de physique statistique). Cette approche a ensuite été développée au cours des décennies suivantes (voir par exemple [1, 17]).
- Dans les années 1980 sont apparus d'une part l'étude des modèles $O(n)$ via les méthodes dites de gaz de Coulomb (voir par exemple [19, 20]) et le développement de la théorie conforme des champs, suivant les travaux de Belavin, Polyakov, Zamolodchikov [2], et Cardy (voir [4] pour une vue d'ensemble), où

pour la première fois apparaissent des idées directement liées à l'analyse complexe, mais dans le cadre continu. Le fait que les modèles sur réseaux sont reliés à ces théories continues restait de nature conjecturale.

Plus récemment, du côté mathématique, Richard Kenyon [13, 12] (voir aussi Mercat [18], ainsi que Boutillier-De Tilière [3]) a montré des résultats du même type que ceux que nous avons présentés ici (relations de Cauchy-Riemann discrètes et contrôle du passage à la limite) dans le cas des arbres couvrants (ou de manière équivalente, pour les pavages par dominos ou les marches aléatoires à boucles effacées).

L'étude des structures continues invariantes conformes a connu un grand essor suite à la définition par Schramm [21] des processus SLE. Le lien avec les modèles discrets qui est le sujet du présent exposé restait cependant ouvert.

Au jour d'aujourd'hui, les principaux modèles discrets dont le comportement asymptotique a pu être établi (toujours en partant d'une relation combinatoire discrète de type analyticité) comporte :

- Le modèle d'Ising et le modèle de boucles relié que nous venons de présenter. Il existe aussi une autre approche (du même type) du modèle d'Ising développée par Smirnov avec Chelkak [5]. Il est à noter que (tout comme les travaux de Kenyon, voir [14]), ces arguments sont valables pour une classe assez large de réseaux plans (les graphes « isoradiaux »), voir [6]. D'autres identités de type analytique peuvent être aussi prouvées concernant des fonctions de corrélation du modèle d'Ising (et être contrôlées de manière analogue, voir [9]).
- La percolation critique sur le réseau triangulaire, qui a été démontrée par Smirnov [22] en 2001.
- Les arbres couvrants et les marches à boucles effacées [13, 12, 16].

Pour de nombreux modèles importants, le problème reste cependant ouvert. On peut mentionner le cas des marches aléatoires auto-évitantes. Cependant, les idées basées sur une identité combinatoire simple du même type que celle que nous avons présentée est à la base de la preuve suivante (par Smirnov et Duminil-Copin, [7]) de la conjecture de Nienhuis sur le nombre asymptotique de chemins auto-évitants sur le réseau hexagonal : si l'on fixe le point de départ, le nombre de chemins auto-évitants de longueur n croît comme $\lambda^{n+o(n)}$, où $\lambda = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Les articles [23, 25] écrits par Stanislav Smirnov pour les congrès mondiaux de 2006 et 2010 constituent une excellente introduction et description des résultats que nous venons de mentionner. Les articles originaux sont également tous très clairs. Comme ouvrage introductif plus détaillé sur ce sujet, le lecteur peut aussi consulter [26].

RÉFÉRENCES

- [1] R. J. BAXTER – *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press Inc., 1982.
- [2] A. A. BELAVIN, A. M. POLYAKOV & A. B. ZAMOŁODCHIKOV – Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, *Nuclear Phys. B* **241** (1984), p. 333–380.
- [3] C. BOUTILLIER & B. DE TILIÈRE – The critical \mathbf{Z} -invariant Ising model via dimers : the periodic case, *Probab. Theory Related Fields* **147** (2010), p. 379–413.
- [4] J. L. CARDY – *Scaling and renormalization in statistical physics*, Cambridge Lecture Notes in Physics, 1996.
- [5] D. CHELKAK & S. SMIRNOV – Conformal invariance of the 2D Ising model at criticality, prépublication, 2010.
- [6] ———, Universality in the 2D Ising model and conformal invariance of Fermionic observables, *Inv. Math.* (2012), doi://10.1007/s00222-011-0371-2.
- [7] H. DUMINIL-COPIN & S. SMIRNOV – The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, prépublication, 2010.
- [8] J. FERRAND – Fonctions préharmoniques et fonctions préholomorphes, *Bull. Sci. Math.* **68** (1944), p. 152–180.
- [9] C. HONGLER & S. SMIRNOV – Energy density in the 2D Ising model, prépublication, 2010.
- [10] B. KAUFMAN & L. ONSAGER – Crystal statistics. III. Short-range order in a binary Ising lattice, *Phys. Rev.* **76** (1949), p. 1244–1252.
- [11] A. KEMPPAINEN & S. SMIRNOV – Random curves, scaling limits and Loewner evolutions, prépublication, 2010.
- [12] R. KENYON – The asymptotic determinant of the discrete Laplacian, *Acta Math.* **185** (2000), p. 239–286.
- [13] ———, Conformal invariance of domino tiling, *Ann. Probab.* **28** (2000), p. 759–795.
- [14] ———, The Laplacian and Dirac operators on critical planar graphs, *Invent. Math.* **150** (2002), p. 409–439.
- [15] H. A. KRAMERS & G. H. WANNIER – Statistics of the two-dimensional ferromagnet. I, *Phys. Rev.* **60** (1941), p. 252–262.
- [16] G. F. LAWLER, O. SCHRAMM & W. WERNER – Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Ann. Probab.* **32** (2004), p. 939–995.

- [17] B. M. MCCOY & T. T. WU – *The two-dimensional Ising model*, Harvard University Press, 1973.
- [18] C. MERCAT – Discrete Riemann surfaces and the Ising model, *Comm. Math. Phys.* **218** (2001), p. 177–216.
- [19] B. NIENHUIS – Exact critical point and critical exponents of $O(n)$ models in two dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982), p. 1062–1065.
- [20] ———, Critical behavior of two-dimensional spin models and charge asymmetry in the Coulomb gas, *J. Statist. Phys.* **34** (1984), p. 731–761.
- [21] O. SCHRAMM – Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* **118** (2000), p. 221–288.
- [22] S. SMIRNOV – Critical percolation in the plane : conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001), p. 239–244.
- [23] ———, Towards conformal invariance of 2D lattice models, in *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, p. 1421–1451.
- [24] ———, Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model, *Ann. of Math.* **172** (2010), p. 1435–1467.
- [25] ———, Discrete complex analysis and probability, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume I*, Hindustan Book Agency, 2010, p. 595–621.
- [26] W. WERNER – Percolation et modèle d'ising, *S.M.F., Cours spécialisés* **16** (2009).
- [27] C. N. YANG – The spontaneous magnetization of a two-dimensional Ising model, *Physical Rev.* **85** (1952), p. 808–816.

Wendelin WERNER

Université Paris-Sud

Laboratoire de Mathématiques

Bât. 425

91405 Orsay cedex, France

E-mail : wendelin.werner@math.u-psud.fr