Astérisque

FABRICE PLANCHON

Existence globale et scattering pour les solutions de masse finie de l'équation de Schrödinger cubique en dimension deux [d'après Benjamin Dodson, Rowan Killip, Terence Tao, Monica Vişan et Xiaoyi Zhang]

Astérisque, tome 348 (2012), Séminaire Bourbaki, exp. n° 1042, p. 425-447

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2012__348__425_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 2011
63e année, 2010-2011, n° 1042, p. 425 à 447

EXISTENCE GLOBALE ET SCATTERING POUR LES SOLUTIONS DE MASSE FINIE DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER CUBIQUE EN DIMENSION DEUX
[d'après Benjamin Dodson, Rowan Killip, Terence Tao, Monica Vişan et Xiaoyi Zhang]

par **Fabrice PLANCHON**

INTRODUCTION

Nous considérons l'équation de Schrödinger nonlinéaire

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u &= \pm |u|^2 u, \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

posée dans l'espace entier $\mathbb{R}^2$. Dans le cas où la nonlinéarité est précédée d'un signe $+$ (resp. $-$), l'équation est dite défocalisante (resp. focalisante). Cette équation apparaît de manière naturelle dans de nombreux modèles physiques, par exemple comme approximation paraxiale d'une équation des ondes en lien avec la focalisation d'un faisceau laser (voir par exemple [**43**]). On retiendra que, dans ce cadre, la variable « temporelle » est en fait une variable spatiale dans la direction de propagation de l'onde, et que les variables du laplacien sont les variables (spatiales) transverses. L'équation (1) n'a qu'un lointain rapport avec la réalité physique du modèle (en particulier, le milieu de propagation n'a pas de raison d'être homogène et spatialement infini), mais la description des propriétés qualitatives de ses éventuelles solutions aura été une préoccupation constante depuis les années 1970.

Plus généralement, nous pouvons considérer le même type d'équation où la nonlinéarité devient $\pm|u|^{p-1}u$ et où la dimension d'espace est quelconque, $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Deux exposants occupent une place particulière, reliée aux lois de conservation que nous détaillerons ultérieurement : $p = 1 + 4/n$, qui est une généralisation en dimension quelconque du cas cubique (on parlera de l'équation de masse critique) ; et $p = 1 + 4/(n-2)$, qui correspond à l'équation d'énergie critique ($p = 5$ pour $n = 3$). Il est virtuellement impossible d'être exhaustif sur les résultats connus, tant ils sont nombreux et variés, aussi nous citons ceux qui nous sont apparus les plus directement reliés avec l'objet de ce séminaire, dans un ordre qui n'est pas chronologique :

– le problème de Cauchy pour l'équation (1) est bien posé, localement en temps, pour des données initiales $u_0(x)$ de masse finie :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_0(x)|^2\, dx = \|u_0\|_2^2 < +\infty. \tag{2}$$

Le temps d'existence dépend du profil de la donnée et non simplement de sa norme, et la solution est globale pour une masse petite ([**7**]). Ce type de résultat (perturbation de la solution nulle) repose sur les propriétés dispersives du flot linéaire, et en particulier l'estimation de Strichartz ([**42**]),

$$\|\exp(it\Delta)u_0\|^4_{L^4_{t,x}} = \int_{\mathbb{R}^3} |\exp(it\Delta)u_0|^4\, dxdt \lesssim \|u_0\|_2^4. \tag{3}$$

– Dans le cas défocalisant, lorsque la donnée initiale u_0 est non seulement de masse finie mais possède également un gradient et un moment dans L^2_x,

$$\|u_0\|^2_\Sigma = \int_{\mathbb{R}^2} |u_0(x)|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla_x u_0(x)|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 |u_0(x)|^2\, dx < +\infty, \tag{4}$$

la solution est globale dans Σ et diffuse à l'infini (phénomène de scattering) : il existe deux états $u^\pm \in \Sigma$ tels que

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|u(x,t) - \exp(it\Delta)u^\pm\|_\Sigma = 0. \tag{5}$$

Remarquons que dans Σ comme plus tard dans L^2_x, on a l'asymptotique suivante de la solution linéaire, qui résulte de la factorisation du propagateur de Schrödinger :

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|\exp(it\Delta)f - (4\pi i t)^{-1} e^{i|x|^2/(4t)} \hat{f}(x/(2t))\| = 0\,, \tag{6}$$

où $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f.

– Dans le cas focalisant, l'existence de solutions particulières, les solitons, de type $u(x,t) = e^{it}Q(x)$ où Q est la solution de masse minimale de l'équation stationnaire (où 3 serait remplacé par $1 + 4/n$ en dimension quelconque)

$$-Q + \Delta Q + Q^3 = 0 \tag{7}$$

montre qu'il ne peut y avoir diffusion en toute généralité. En fait, un argument élémentaire de viriel ([**25**]) montre qu'il y a explosion en temps fini pour une large classe de données dans Σ (en outre, une transformation explicite du soliton, la transformation pseudo-conforme, [**21**], produit une solution explosive en $t = 0$ avec vitesse $1/t$). Néanmoins, si la masse initiale est strictement inférieure à celle de Q, il y a existence globale ([**47**]). Enfin, il existe un ensemble de données de masse légèrement supérieure à celle de Q qui explose suivant la loi dite du log-log ([**37**] et références incluses, ou [**6**] pour une présentation synthétique), un résultat majeur reposant sur une quantification dynamique du phénomène d'explosion.

À ce bref historique, il convient de rajouter que, dans le cadre perturbatif des données de petite masse, un corollaire direct de la théorie de Cauchy est la diffusion dans L_x^2, avec

$$u^{\pm} = u_0 \pm \int_0^{\pm\infty} \exp(-is\Delta)(|u|^2 u)(s)\, ds, \tag{8}$$

où l'intégrale est bien définie dans L_x^2 comme conséquence directe d'une propriété d'intégrabilité en espace-temps de la solution,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^4(x,t)\, dxdt < +\infty. \tag{9}$$

Dès lors, il est naturel de conjecturer

– dans le cas défocalisant, l'équation (1) est globalement bien posée pour des données de masse finie quelconque et il y a diffusion dans L_x^2 ;
– dans le cas focalisant, le même résultat est vrai si la masse est strictement inférieure à la masse de l'état fondamental Q.

Remarque 0.1. — Le problème de Cauchy à basse régularité n'est pas ici une fin en soi ; l'étude des propriétés de l'opérateur de scattering, celui qui à u^- associe u^+, présente un intérêt bien supérieur. Cependant, une théorie de Cauchy robuste, dans un cadre fonctionnel bien adapté aux invariances naturelles de l'équation, est un préalable inévitable.

Plus généralement, la conjecture s'étendait à toutes les nonlinéarités de masse critique en dimension quelconque ; les premiers résultats ont été obtenus dans le cadre défocalisant, pour des données radiales et $n \geq 3$, **[44]**. Ensuite est venu le cas radial en dimension deux, **[31]** traitant indifféremment les cas focalisant et défocalisant ; enfin, toujours sous l'hypothèse radiale, **[33]** traite le cas focalisant en dimension $n \geq 3$.

Ces derniers travaux trouvent une grande partie de leur inspiration dans la conjecture similaire formulée pour l'équation dite d'énergie critique. Dans ce cadre (par exemple l'équation à nonlinéarité quintique en dimension trois d'espace), **[5]** montre l'existence globale et la diffusion pour des données radiales dans le cas défocalisant, en introduisant une méthode d'induction sur l'énergie ; **[12]** obtient le cas général (non radial) en remplaçant l'utilisation d'estimations espace-temps à poids de **[35]** par des estimations espace-temps d'auto-corrélation de la densité de masse (**[11]**). L'utilisation d'estimations espace-temps de type Morawetz restreint l'étude au cas défocalisant. Le cas focalisant est abordé pour la première fois, dans le cadre radial, dans **[27]**, qui bouleverse la méthodologie existante en introduisant une méthode de concentration-compacité :

- en tirant parti d'une robuste théorie de Cauchy (autorisant des perturbations autour de « grandes » solutions sous contrôle) et des décompositions en profils liées au défaut de compacité de l'injection de Sobolev critique (dans **[29]** pour l'énergie critique, voir également **[38]** puis **[30]** et **[3]** pour l'équation de Schrödinger de masse critique), on construit une solution minimale qui ne diffuse pas ;
- on montre (dans un esprit proche de **[38]**) qu'une telle solution minimale est compacte modulo le groupe de symétrie naturel associé à l'équation (ce qui permet, entre autre, de ré-extraire une solution minimale « normalisée » dans les paramètres de défaut de compacité).
- On montre qu'une telle solution minimale ne peut être que la solution nulle (un théorème de rigidité de type Liouville) ; c'est généralement dans cette étape (cruciale !) que les restrictions éventuelles (caractère radial) apparaissent, en lien avec les outils ad hoc utilisés pour obtenir une contradiction.

Remarque 0.2. — Il convient de remarquer que c'est d'abord pour l'équation d'énergie critique pour les ondes défocalisantes que les décompositions en profils ont montré leur utilité dans l'étude de l'asymptotique à grand temps (**[1]**,**[2]**). Dans le cadre des ondes défocalisantes, l'existence globale et la diffusion avaient été préalablement établies par des arguments directs reposant sur la vitesse finie de propagation et sur une formule de monotonie à la Morawetz (qui, contrairement au cas de Schrödinger, est valide pour des données d'énergie finie). A contrario, la résolution de la conjecture ad hoc dans le cas focalisant dans **[28]** donne une autre illustration de l'efficacité de la méthode concentration/compacité/rigidité.

Cette révolution dans la façon d'aborder ces questions est en grande partie responsable de la résolution à un rythme accéléré de la conjecture précitée. Dans **[45]** (voir également **[30]** pour un résultat antérieur, en dimensions $n = 1, 2$, contenant déjà l'important concept de solution minimale et de sa compacité), l'existence et la compacité des solutions minimales pour l'équation de Schrödinger de masse critique est établie en toute dimension, et les auteurs effectuent de plus une normalisation des solutions minimales qui ne laisse plus que le théorème de rigidité à démontrer pour mettre un point final à l'histoire. Cependant, un ingrédient manquait encore en basse dimension ($n = 1, 2$), où les estimations de type Morawetz précédemment citées n'existaient pas (et l'utilisation du viriel peu exploré). Un analogue de **[11]** est alors démontré simultanément et indépendamment dans **[40]** et **[8]** (voir aussi **[9]** pour une estimation moins précise, pour $n = 1$, mais finalement suffisante) ; l'identité de **[40]** est d'ailleurs remarquée comme étant invariante de Galilée, ce qui va s'avérer essentiel dans le cadre du problème de masse critique.

Remarque 0.3. — Soulignons que l'approche entièrement quantitative de **[12]**, qui avait introduit le concept de solutions presque minimales, peut également être implémentée dans le cas présent (une esquisse de preuve est présentée dans **[45]**), et fournirait ainsi des bornes explicites sur la norme globale d'espace-temps comme fonction de la masse, au prix d'une complexité d'implémentation d'un ordre de magnitude supérieur. La question des bornes optimales en terme de la masse (ou de l'énergie dans le cas d'énergie critique) reste ouverte et appelle le développement d'autres outils quantitatifs.

THÉORÈME 0.4 (**[17, 16, 15, 18]**). — *Pour tout $n \geq 1$, l'équation*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} i\partial_t u + \Delta u & = & \pm |u|^{1+4/n} u, \\ u(x,0) & = & u_0(x) \end{array} \right. \tag{10}$$

est globalement bien posée pour des données $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dans le cas défocalisant, et sous l'hypothèse d'une masse strictement inférieure à celle de l'état fondamental Q dans le cas focalisant. De plus, la norme $L^{2+4/n}_{t,x}$ de la solution est finie et il y a alors diffusion dans L^2_x.

Comme indiqué précédemment, il s'agit principalement de démontrer le théorème de rigidité montrant que la solution minimale n'existe pas. Pour cela, on procède en plusieurs étapes, de difficultés inégales :

- on requalifie les scénarios possibles pour la solution minimale, en cherchant à travailler avec une quantité adaptée aux inégalités de Morawetz bilinéaires. Il se trouve que cette même quantité donne un bon contrôle du moment cinétique (le paramètre associé au défaut de compacité lié à la transformation de Galilée), crucial pour les troncatures en fréquence ; ces troncatures sont rendues nécessaires par l'absence de formule de monotonie compatible avec l'échelle de la masse critique (le viriel qui nous sera utile fait intervenir le moment cinétique et a donc une échelle située à mi-chemin entre masse et énergie) ;
- on établit un bon contrôle sur les projections haute fréquence de la solution minimale. En dimension $n \geq 3$, les normes de Strichartz y suffisent, mais en dimension $n = 1, 2$, l'absence de normes L^2_t conduit à y substituer des espaces atomiques (généralisations des espaces conormaux) dont les atomes sont des solutions linéaires sur des intervalles de temps disjoints arbitraires, développés par exemple dans **[34]**. Cette étape utilise bien sûr de façon cruciale la compacité de la solution minimale, qui la rend petite à l'infini (en espace et en fréquence) indépendamment du temps. Par ailleurs, les deux premières étapes sont insensibles au caractère focalisant ou défocalisant, la seconde utilisant autant que possible la théorie de Cauchy perturbative, par des découpages temporels appropriés ;

– on exclut le premier scénario possible (celui d'une solution minimale de type soliton) à l'aide d'une version tronquée aux basses fréquences de l'inégalité de Morawetz bilinéaire. Le contrôle des termes de commutation est rendu possible par l'étape précédente ;
– on exclut le second scénario possible (solution minimale dont le paramètre d'échelle tend vers l'infini) en montrant que la solution minimale est en fait d'énergie finie, puis que cette énergie tend vers zéro.
– Le cas focalisant est essentiellement traité pareillement, à l'exception des inégalités de Morawetz bilinéaires, qui nécessitent l'introduction d'un nouveau poids, dépendant du temps, pour pallier l'absence de coercivité.

1. SOLUTIONS MINIMALES

L'objet de cette section préliminaire est la mise en place du schéma général de preuve. Historiquement, les solutions minimales en dimension deux ont été construites dans **[30]**, qui contient également une description des propriétés de compacité (on trouvera dans **[24]** un exemple antérieur où la minimalité d'une propriété dynamique du flot, l'explosion, engendre une forme de compacité sur l'équation critique). Ici, nous suivons essentiellement **[45]**, écrit spécifiquement avec la résolution de la conjecture en point de mire. Cependant, le lecteur peu familier de ces réductions pourra consulter avec profit **[32]** pour une excellente introduction au sujet, rassemblant de façon cohérente et très pédagogique des éléments dispersés au fil de références variées.

1.1. Digression : invariances et quantités conservées

Avant d'aborder la construction de solutions minimales, il est utile de définir la notion de criticalité, en lien avec l'invariance d'échelle naturelle : si u est une solution de (1), alors $\|u\|_{L^2} = \|u_\lambda\|_{L^2}$, où

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0(x) & \longrightarrow & u_{0,\lambda}(x) = \lambda u_0(\lambda x) \\ u(x,t) & \longrightarrow & u_\lambda(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t). \end{array}\right. \tag{11}$$

C'est cette invariance d'échelle qui explique que le temps d'existence fourni par la construction d'une solution locale ne peut dépendre de la seule masse, ainsi que la terminologie « équation de masse critique ».

Remarque 1.1. — De la même façon, en dimension $n \geq 3$, l'exposant $p = 1+4/(n-2)$ correspond à un changement d'échelle laissant la norme L^2_x du gradient spatial de la solution invariante : l'équation est dite « d'énergie critique ».

L'équation (1) possède naturellement une structure hamiltonienne, associée au hamiltonien suivant :

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \pm \frac{1}{4}|u|^4\, dx \tag{12}$$

quantité à laquelle nous référerons désormais comme étant l'énergie. Cette énergie est donc naturellement conservée par le flot (défini sur des données d'énergie finie), et naturellement associée à l'invariance par translation temporelle (de générateur infinitésimal ∂_t, expliquant qu'on retrouve la conservation d'énergie en multipliant l'équation par $\partial_t \bar{u}$ et en intégrant). L'invariance de translation spatiale conduit naturellement à la conservation du moment cinétique,

$$J(u) = i \int_{\mathbb{R}^2} u\nabla\bar{u} - \bar{u}\nabla u\, dx = 2\int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{Im}(\bar{u}\nabla u)\, dx\,, \tag{13}$$

et l'invariance par changement (global) de phase conduit à la conservation de la masse,

$$M(u) = \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2\, dx\,. \tag{14}$$

Le changement d'échelle critique (11) préserve donc une quantité conservée : l'explosion éventuelle dans L^2_x ne peut donc se produire que par un phénomène de concentration (voir **[41]** pour une introduction pédagogique très complète aux phénomènes d'explosion/concentration dans le cas focalisant).

Enfin, l'invariance de Galilée (traduisant l'invariance de l'équation dans deux référentiels en mouvement à vitesse constante l'un par rapport à l'autre) jouera un rôle important par la suite, car elle préserve également la masse : si u est une solution,

$$u_{\xi_0}(t,x) = e^{ix\cdot\xi_0 - it|\xi_0|^2} u(t, x - 2\xi_0 t) \tag{15}$$

est également une solution. Un calcul simple montre que l'on peut ainsi recaler le moment cinétique à zéro, au moins formellement.

Remarque 1.2. — L'invariance d'échelle et l'invariance galiléenne jouent naturellement un rôle important dans le cadre de la masse critique ; mais elles ne préservent pas l'énergie, et l'intervention du temps dans la transformation rend plus difficile l'identification d'un bon substitut aux quantités conservées. On verra ultérieurement que les quantités ad hoc sont du type viriel et le contrôle qu'elles (et leurs pendants convenablement tronqués) fournissent est crucial dans la preuve du théorème de rigidité.

1.2. Mesurer la dispersion : Strichartz et au-delà

La résolution du problème de Cauchy (localement en temps) pour des données de masse finie repose sur le résultat désormais classique suivant (où pour un indice quelconque $\gamma \in [1, +\infty]$, $\gamma' = \gamma/(\gamma - 1)$) :

Proposition 1.3 ([**42**],[**22**]). — *Soient $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $t \in \mathbb{R}$ et $u(x,t)$ solution de l'équation $i\partial_t u + \Delta u = F(x,t)$, de donnée initiale u_0, avec $F \in L_t^{\rho'} L_x^{\gamma'}$. Alors $u \in L_t^p L_x^q$ et*

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim (\|u_0\|_2 + \|F\|_{L_t^{\rho'} L_x^{\gamma'}}), \tag{16}$$

où les couples (p,q) et (ρ,γ) sont des paires admissibles, i.e. $2/p+2/q = 2/\rho+2/\gamma = 1$, $p, \rho > 2$.

Remarque 1.4. — Le résultat est vrai en dimension n quelconque, en changeant la numérologie des paires admissibles : $2/p + n/q = n/2$, avec $p \geq 2$ si $n \geq 3$ et $p \geq 4$ si $n = 1$ (l'important cas $p = 2$ est un résultat ultérieur de [**26**]).

En fait, la paire $(4,4)$ (et sa paire duale) suffit pour résoudre localement en temps l'équation cubique à donnée de masse finie par point fixe. Ces estimations admettent deux généralisations de nature légèrement différente. La première ([**39**]) consiste à remplacer la norme L_x^2 à droite de (16) par une norme plus faible, pour obtenir

$$\|\exp(it\Delta)u_0\|_{L^4_{t,x}} \lesssim \|\hat{u}_0\|_{X_p} = \left(\sum_Q |Q|^{4/p-2} \|\hat{u}_0\|^4_{L^p(Q)}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{17}$$

où la somme s'effectue sur l'ensemble des partitions par les cubes dyadiques de toute taille et $12/7 < p < 2$. Cette estimation est directement reliée à la conjecture de restriction en analyse harmonique, et même une esquisse de preuve dépasse largement le cadre de cet exposé. Une modification convenable de cette estimation (déjà utilisée telle quelle dans [**38**]) est utile dans la construction de la solution minimale.

La seconde amélioration ([**4**] et indépendamment [**19**]) montre que l'interaction de deux solutions localisées à des fréquences différentes, $u = \exp(it\Delta)u_0$ et $v = \exp(it\Delta)v_0$, est très petite

$$\|uv\|^2_{L^2_{t,x}} \lesssim M/N \|u_0\|_2^2 \|v_0\|_2^2, \tag{18}$$

où le support de la transformée de Fourier de u_0 (resp. v_0) est à l'extérieur (resp. à l'intérieur) de la boule de rayon N (resp. M) et $M \ll N$, entiers dyadiques. Par partition du support de $\hat{u}_0$, il suffit de considérer le cas où ce support est en fait une boule de taille M à distance N du support de $\hat{v}_0$. La preuve d'origine procède ensuite par un argument explicite sur la convolution de deux mesures supportées par le paraboloïde $\tau = \pm|\xi|^2$. Donnons une preuve qui n'utilise pas l'expression explicite de la solution : par rotation, on fixe le centre de la boule support de $\hat{u}_0$ sur l'axe ξ_1, et une application du théorème 2.3 de [**40**] à nos solutions linéaires, avec un poids

$\rho(x-y) = |x_1 - y_1|$, nous donne

(19)
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} |\partial_1(u(x_1,x_2)\bar{v}(x_1,y_2))|^2\, dx_1dx_2dy_2dt \lesssim \|\partial_1 u_0\|_2\|v_0\|_2^3 + \|\partial_1 v_0\|_2\|u_0\|_2^3 .$$

Le support fréquentiel de u et v étant préservé par le flot, par convolution des supports nous aurons sur celui de $u\bar{v}$,

$$|\partial_1| \sim N = N^{\frac{1}{2}}(N/M)^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}} \sim N^{\frac{1}{2}}(N/M)^{\frac{1}{2}}|\partial_2|^{\frac{1}{2}}$$

et en prenant la trace $x_2 = y_2$ (ce qui consomme la demi-dérivée $|\partial_2|^{\frac{1}{2}}$), on retrouve (18) après effacement de la dérivée ∂_1 restante à droite et à gauche.

Remarque 1.5. — Ces deux améliorations sont également valides en dimension quelconque, avec une numérologie adaptée : par exemple, (18) aura un facteur M^{n-1}/N à droite (ce qui correspond à $n-1$ traces réduisant les variables transverses dans l'argument précédent).

L'estimation (18) sera cruciale pour étudier le comportement des hautes fréquences de la solution minimale, permettant de traiter l'influence des basses fréquences comme un terme de perturbation.

1.3. Décompositions en profils

L'introduction des décompositions en profils nécessite quelques notations : appelons Γ l'opérateur

$$\Gamma u(x,t) = \frac{1}{\lambda} e^{ix\cdot\xi_0 - it|\xi_0|^2} u\left(\frac{x - x_0 - 2\xi_0 t}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^2}\right),$$

et notons $\gamma = (\lambda, x_0, \xi_0)$ les paramètres d'échelle et de translation spatiale et fréquentielle. On peut alors montrer que, pour toute séquence v_n bornée dans L^2_x, il existe une suite de profils $(\phi_j)_{j\geq 0}$, des suites $(\gamma_{n,j})_j$ et $(t_{n,j})_j$ telles que, à l'extraction d'une sous-suite (en n) près,

$$v_n(x) = \sum_{j=0}^{J} \Gamma_{n,j} e^{it_{n,j}\Delta}\phi_j + w_{n,J}, \tag{20}$$

où

- la suite de fonctions $(w_{n,J})_{n,J}$ ainsi définie est un reste, au sens où
$$\lim_{J\to+\infty} \overline{\lim_{n\to+\infty}} \|e^{it\Delta} w_{n,J}\|_{L^4_{t,x}} = 0\,;$$
- pour tous les $j \leq J$, $\exp(-it_{n,j}\Delta)\Gamma_{n,j}^{-1} w_{n,J}$ tend faiblement vers zéro, et
$$\sup_J \lim_{n\to+\infty} \big(\|v_n\|_2^2 - \sum_{j=0}^{J} \|\phi_j\|_2^2 - \|w_{n,J}\|_2^2\big) = 0\,;$$

– à $j \neq j'$ fixés, les suites $(\gamma_{n,j})_n$, $(t_{n,j})_n$ et $(\gamma_{n,j'})_n$, $(t_{n,j'})_n$ sont orthogonales : soit les échelles divergent,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_{n,j}}{\lambda_{n,j'}} + \frac{\lambda_{n,j'}}{\lambda_{n,j}} = +\infty,$$

soit $\lambda_{n,j} = \lambda_{n,j'}$ et les positions divergent,

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_{n,j}|\xi_{n,j} - \xi_{n,j'}| + \frac{|x_{n,j} - x_{n,j'}|}{\lambda_{n,j}} + |t_{n,j} - t_{n,j'}| = +\infty.$$

La preuve d'une telle décomposition peut s'effectuer de diverses façons : suivant [**45**] (ou [**32**]), les divers paramètres $\gamma_{n,j}$ et $t_{n,j}$ sont extraits de manière itérative, en utilisant une version convenablement modifiée de (17),

$$\| \exp(it\Delta)v\|_{L^4_{t,x}} \lesssim \|v\|_2^{3/4} \left(\sup_Q |Q|^{-3/22} \| \exp(it\Delta)v_Q\|_{L^{11/2}_{t,x}} \right)^{\frac{1}{4}}, \tag{21}$$

où les Q sont toujours les cubes dyadiques et v_Q la troncature en fréquences de v sur le support de Q.

On utilise alors la proposition suivante (une inégalité de Strichartz renversée, suivant la terminologie de [**32**], déjà présente sous des formes plus ou moins précises dans [**4**] et [**38**]) :

Proposition 1.6. — *Considérons $(v_n)_n$ une suite de L^2_x, convergeant vers M en norme L^2_x et telle que la norme $L^4_{t,x}$ de $\exp(it\Delta)v_n$ converge vers η. Alors, quitte à extraire une sous-suite, il existe une fonction $\phi \in L^2_x$, des suites $(\gamma_n)_n$ et $(t_n)_n$ telles que*

– *la suite $(\exp(-it_n\Delta)\Gamma_n^{-1}v_n)_n$ tend faiblement vers ϕ ;*
– *la masse de ϕ n'est pas nulle : $\|\phi\|_2 \geq CM^{\frac{1}{4}}\eta^{\frac{3}{4}}$;*
– *la suite des normes Strichartz de $v_n - \Gamma_n \exp(it_n\Delta)\phi$ a une limite supérieure strictement plus petite que η (de l'ordre de $\eta(1-(\eta/M)^c)$.*

Admettons cette proposition : la décomposition en profils en résulte en l'appliquant itérativement, à la suite initiale pour extraire le premier profil ϕ_0, puis à la suite $v_n - \Gamma_{n,0}\exp(it_{n,0}\Delta)\phi_0$, et ainsi de suite. On montre ensuite que les paramètres associés aux profils sont bien orthogonaux (le lecteur pourra consulter [**32**] où l'ensemble de la procédure est très bien détaillé sur plusieurs exemples de complexité croissante).

La proposition elle-même repose en grande partie sur l'utilisation de (21) : l'inégalité garantit l'existence d'une suite de cubes dyadiques Q_n dont la limite inférieure est plus grande que η^4/M^3. Puis on fixe l'échelle $\lambda_n = |Q_n|^{-1/2}$, et ξ_n est choisi comme le centre du cube Q_n. Par convexité de la norme de Lebesgue (entre $L^4_{t,x}$ et $L^\infty_{t,x}$) la norme $\| \exp(it\Delta) v_{n,Q_n} \|_{L^{11/2}_{t,x}}$ est majorée par (une puissance de) la norme $L^\infty_{t,x}$ et on extrait finalement t_n et x_n tels que

$$\eta^{3/4}/M^{11} \lesssim \liminf_{n\to+\infty} |(\exp(it_n\Delta) v_{n,Q_n})(x_n)| \,.$$

On obtient alors ϕ par compacité faible, et l'on montre ensuite que ϕ a une masse non triviale (conséquence directe de la dernière limite inférieure évaluée), puis que les normes Strichartz de la suite $v_n - \phi_n$ ont bien été diminuées (en appliquant une version convenable du lemme de Fatou). Remarquons par ailleurs que l'on peut toujours, quitte à déphaser les profils ϕ_j, supposer que les suites $(t_{n,j})_n$ convergent vers $\{0, \pm\infty\}$.

On peut alors effectuer une décomposition en profils de la suite de solutions nonlinéaires associées aux données v_n, en associant à chaque profil ϕ_j précédent une solution maximale U_j de l'équation nonlinéaire : si la suite $(t_{n,j})_n$ converge vers zéro, U_j est la solution de (1) de donnée initiale $U_j(0) = \phi_j$; si la suite $(t_{n,j})_n$ converge vers $\pm\infty$, U_j est la solution de (1) qui diffuse vers $V_j = \exp(it\Delta)\phi_j$ lorsque $t \to \pm\infty$.

On montre alors une décomposition de la solution nonlinéaire, essentiellement par un argument perturbatif autour de la somme des profils nonlinéaires, pour obtenir

$$u_n(x,t) = \sum_{j=0}^{J} \Gamma_{n,j} U_j + e^{it\Delta} w_{n,J} + r_{n_J}, \tag{22}$$

où le reste $r_{n,J}$ tend vers zéro dans la norme Strichartz (comme $\exp(it\Delta) w_{n,J}$) mais également dans $L^\infty_t L^2_x$.

Remarque 1.7. — Deux remarques s'imposent sur cette décomposition nonlinéaire : comme la somme des carrés des masses des données des profils nonlinéaires converge, ces profils nonlinéaires sont globaux au-delà d'un certain rang. D'autre part, le découplage des profils entre eux induit que la taille de l'intervalle d'existence de la solution nonlinéaire u_n est au moins égale à celle du plus petit intervalle d'existence des profils qui explosent en temps fini.

1.4. Existence et propriétés d'une solution minimale

Nous sommes maintenant armés pour démontrer l'existence d'une solution minimale, lorsque l'on suppose que la conjecture est fausse, c'est-à-dire que la quantité suivante est finie :

$$M_c = \sup_{\mathbb{R}_+} \{ M \text{ tel que } \|u_0\|_2 = M \implies u \text{ existe globalement et } \|u\|_{L^4_{t,x}} < +\infty \} \,.$$

D'après la théorie des données petites, l'ensemble des M pour lesquels il y a existence globale et diffusion n'est pas vide, donc M_c existe, et la conjecture consiste à démontrer que $M_c = +\infty$.

THÉORÈME 1.8 ([**30, 45**]). — *Si $M_c < +\infty$, il existe une solution de l'équation* (1) *dont la masse est exactement M_c et qui explose à droite et à gauche.*

PREUVE (esquisse) — On peut construire une suite de solutions nonlinéaires $(u_n)_n$ dont la masse M_n tend vers M_c par valeur supérieure, et telle que les deux normes $L^4(\mathbb{R}_\pm; L^4_x)$ explosent (quitte à translater suivant une suite t_n). En utilisant convenablement la décomposition en profils de cette suite de solutions explosives, on peut montrer qu'il n'existe en fait qu'un unique profil explosif, et que la masse de ce profil est nécessairement M_c : informellement (et l'on retrouve ici l'idée centrale de l'induction sur l'énergie de [**5**]), chaque profil ayant une masse non triviale, si deux profils explosent, alors leur masse sera plus petite que M_c (puisque la somme des masses au carré est inférieure ou égale à M_c), ce qui est une contradiction ; et s'il n'y en a qu'un, alors pour la même raison sa masse ne peut être que M_c. On remarque également que cette solution minimale explose à droite et à gauche (sous peine de contredire l'explosion à droite et à gauche de u_n pour n grand). □

Finalement, on montre un résultat de compacité pour la solution minimale, qui s'avérera crucial pour le théorème de rigidité qui va suivre (la compacité va engendrer, via Ascoli, de la petitesse uniformément en temps à l'infini, en espace comme en fréquence, modulo le groupe d'invariances).

THÉORÈME 1.9 ([**45**]). — *Considérons la solution minimale $u_c(x,t)$, définie sur son intervalle maximal I. Il existe une fonction $\gamma = (x, \xi, \lambda)$ définie de I dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ telle que l'ensemble $\{\Gamma(t)u(x,t)\}_{t\in I}$ est pré-compact dans L^2_x.*

La démonstration du théorème est immédiate : pour n'importe quelle séquence de temps t_n, il suffit de reprendre le raisonnement précédent en considérant la suite $(v_n)_n$ où la donnée initiale de v_n est $u(x, t_n)$. □

Remarque 1.10. — En utilisant la continuité de l'application $t \in I \to u(t) \in L^2_x$, on peut choisir la fonction γ continue. Alternativement, on peut la choisir constante par morceaux, ce qui, au moins pour le paramètre d'échelle λ et le paramètre de Galilée ξ s'avère pratique. Le paramètre de translation spatiale x ne jouera aucun rôle dans la suite, les estimations utilisées étant invariantes par translation.

Il est possible d'effectuer une dernière normalisation supplémentaire de la solution minimale, en tirant parti de la compacité (suivant un argument utilisé à l'origine pour l'équation de KdV généralisée, [**36**], puis dans [**27**]).

THÉORÈME 1.11. — *Il existe une solution minimale, vérifiant les conclusions du théorème précédent, et telle que*

– *la solution explose à l'infini à droite : $\mathbb{R}_+ \subset I$, $\int_0^{+\infty} |u|^4\, dxdt = +\infty$;*
– *sur $\mathbb{R}_+$, $\lambda(0) = 1$, et $\lambda(t) \geq 1$.*

Preuve (esquisse) — Il s'agit de procéder à une dernière extraction à partir de la solution minimale précédente : on considère une suite d'intervalles compacts emboîtés J_n dans I (donc λ est borné non nul sur un tel intervalle), on sélectionne un temps $t_n \in J_n$ tel que $\lambda(t_n) \leq \lambda(t)$ sur J_n, et l'on rescale $u(t_n)$ par λ_n pour avoir une nouvelle suite de données initiales. La compacité fournit une nouvelle donnée, qui engendre également une solution minimale explosive sur laquelle on vérifie la borne inférieure en λ. □

De fait, la dernière étape est facilitée par la caractérisation d'une famille pré-compacte de L^2_x par une version convenable du théorème d'Ascoli :

Proposition 1.12. — *Une famille de fonctions est pré-compacte dans L^2 si et seulement si*

– *la famille est uniformément bornée en norme L^2 ;*
– *on a les propriétés d'étroitesse et d'équicontinuité suivantes,*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists R \ \textit{tel que} \int_{|x|>R} |f(x)|^2\,dx + \int_{|\xi|>R} |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi < \varepsilon\,. \tag{23}$$

On pourra donc dans la suite remplacer la propriété de compacité montrée dans le théorème 1.9 par la propriété plus quantitative suivante : il existe une fonction (le module de continuité) R telle que, pour tout $t \in I$,

$$\int_{|x-x(t)|>R(\varepsilon)\lambda(t)} |u(x,t)|^2\,dx + \int_{|\xi-\xi(t)|>R(\varepsilon)/\lambda(t)} |\hat{u}(\xi,t)|^2\,d\xi < \varepsilon\,. \tag{24}$$

Cette fonction R peut même être prise indépendante de la solution minimale (à ce stade, nous avons de toute façon achevé nos réductions par extractions successives).

2. RIGIDITÉ : UN THÉORÈME DE TYPE LIOUVILLE

Une première (relative) innovation de **[17]** consiste à requalifier les scénarios possibles pour la solution minimale construite dans la section précédente. Dans le cadre radial (qui fixe $x(t) = \xi(t) = 0$), **[31]** considère trois scénarios :

– une explosion en $t = 0$ de type autosimilaire, $\lambda(t) \sim \sqrt{t}$;
– une solution de type soliton, $\lambda(t) = 1$ et $I = \mathbb{R}$;
– une double cascade de fréquences revenant vers zéro, c'est-à-dire que $\lambda(t)^{-1} \leq 1$ et $\lim_{t\to\pm\infty} \lambda(t)^{-1} = 0$.

Cette alternative est remplacée par la suivante (où l'on raisonne sur les temps positifs uniquement) :

– une solution de type soliton, vérifiant

$$\int_0^{+\infty} \lambda(t)^{-3}\, dt = +\infty\,; \tag{25}$$

– une solution de type cascade de fréquences vers zéro, telle que

$$\int_0^{+\infty} \lambda(t)^{-3}\, dt < +\infty\,. \tag{26}$$

Le premier cas sera exclu par un argument de type Morawetz (ce qui est cohérent avec le fait que, dans le cas défocalisant, il n'y a pas de soliton, et que dans le cas focalisant les solitons ont une masse trop grande), et le second cas sera exclu en montrant dans un premier temps que la solution minimale est d'énergie finie, puis que cette énergie (qui est de l'ordre de $\lambda(t)^{-1}$) tend vers zéro, ce qui est en contradiction avec sa conservation.

Remarque 2.1. — L'idée de relier une quantité apparaissant à gauche dans l'inégalité d'interaction de Morawetz à une intégrale divergente du paramètre d'échelle $\lambda(t)$ est bien sûr déjà présente dans [**12**], où, pour des raisons d'échelle, c'est $\int_J \lambda(t)\, dt$ qui est utilisé.

Nous terminons cette introduction par quelques propriétés utiles reliant le paramètre d'échelle $\lambda(t)$ à diverses intégrales de u : dans [**31**], il est montré que pour une solution minimale sur un intervalle J,

$$\int_J \lambda^{-2}(t)\, dt \lesssim \int_J |u|^4\, dxdt \lesssim 1 + \int_J \lambda^{-2}(t)\, dt\,. \tag{27}$$

Pour la suite, il va s'avérer crucial de montrer que

$$\int_J \lambda^{-3}(t)\, dt \sim \sum_{J_k} \lambda^{-1}(J_k), \tag{28}$$

où J est partitionné en intervalles J_k sur lesquels $\int_{J_k} |u|^4\, dxdt \sim \varepsilon_0$ et $\lambda(t) \sim \lambda(J_k)$ (on peut montrer, voir [**31**], que $\lambda(t)$ varie peu sur un tel intervalle J_k, ou, si on a choisi λ constant par morceaux, qu'il peut être pris constant sur J_k). En utilisant (24) et $\varepsilon = M^2/1000$, on a

$$M^4/16 \leq \left(\int_{|x-x(t)|\leq R(\varepsilon)\lambda(t)} |u|^2\right)^2 \lesssim_M \lambda^2(t)\|u\|_4^4,$$

qui donne immédiatement la moitié (gauche) des équivalences précédentes. Dans l'autre sens, si t^- désigne le début de l'intervalle J_k, le flot linéaire issu de t^- vérifie $\|\exp(i(t-t^-)\Delta)u(t^-)\|_4^4 > \varepsilon_0/2$ (sinon la norme $L^4_{t,x}$ sur J_k de u ne peut atteindre ε_0), donc par injection de Sobolev

$$\|\exp(i(t-t^-)\Delta)P_{|\xi-\xi^-|<R(\varepsilon_0^2)\lambda^{-1}(t^-)}u(t^-)\|^4_{L^4_{J_k}L^4_x} \lesssim M^2|J_k|\lambda^{-2}(J_k),$$

ce qui donne la moitié droite en sommant, après avoir remarqué que la troncature spectrale à gauche n'induit qu'un terme négligeable compte tenu de la partie spectrale de (24), puisque

$$\| \exp(i(t-t^-)\Delta) P_{|\xi-\xi^-|>R(\varepsilon_0^2)\lambda^{-1}(t^-)} u(t^-)\|_{L^4_{J_k} L^4_x} \lesssim \|P_{|\xi-\xi^-|>R(\varepsilon_0^2)\lambda^{-1}(t^-)} u(t^-)\|_2 \leq \varepsilon_0^2 .$$

Enfin, un argument similaire à celui utilisé pour contrôler les variations de $\lambda(t)$ permet de contrôler le mouvement de $\xi(t)$: dans **[32]** par exemple, il est montré que si $J=[0,T]$,

$$|\xi(T)-\xi(0)| \lesssim \sum_k \lambda^{-1}(J_k) . \tag{29}$$

Expliquons brièvement pourquoi : il suffit de traiter un intervalle $J_k = [t^-, t^+]$. Sur un tel intervalle, le terme nonlinéaire est négligeable devant le terme linéaire. En choisissant $\varepsilon = M^2/1000$ dans (24), on conclut que les deux boules $\lambda(t^-)|\xi-\xi(t^-)| \leq R(\varepsilon)/1000$ et $\lambda(t^+)|\xi-\xi(t^+)| \leq R(\varepsilon)/1000$ doivent se recouvrir par conservation de la masse, donc $|\xi(t^+)-\xi(t^-)| \leq \lambda^{-1}(J_k)$ et l'on conclut en sommant. □

Une bonne partie des arguments qui vont suivre reposeront sur ce va-et-vient entre arguments de type perturbatifs (plus ou moins élaborés, notamment par des découpages temporels soigneux en fonction du paramètre λ) et utilisation judicieuse de la compacité.

Pour exclure les deux scénarios de l'alternative présentée auparavant, nous utiliserons une estimation sur de longs intervalles de temps, qui constitue la seconde innovation (la plus importante) de **[17, 16, 15, 18]**. C'est l'objet de la prochaine section.

2.1. Strichartz en temps grand et substituts

Dans cette section, nous allons procéder comme si, dans la proposition 1.3, le choix extrêmal $p=\rho=2$ était autorisé (« double endpoint », pour lequel un contre-exemple existe). Ceci permet d'esquisser la preuve d'une estimation en temps long sans les complications techniques inhérentes à $n \geq 3$ (la nonlinéarité n'est plus polynomiale) ou à $n=1,2$ (il convient de remplacer les espaces de Strichartz par des espaces conormaux, convenablement ajustés aux paramètres dynamiques $\lambda^{-1}(t)$ et $\xi(t)$).

Nous allons donc « montrer » l'estimation suivante : si P_Γ désigne une projection spectrale lissée sur l'ensemble de fréquences définie par la condition Γ,

$$\text{(30)}\quad \forall \varepsilon\, \exists N_0 \text{ tel que } N > N_0,\ K>0 \text{ tel que } \int_J \lambda^{-3}(t)\, dt \sim K$$
$$\Longrightarrow \|P_{|\xi-\xi(t)|>N} u\|_{L^2_J L^\infty} \lesssim_M \varepsilon \left((K/N)^{\frac12}+1\right).$$

Cette estimation est montrée d'abord pour $\varepsilon = 1 = N_0$, par induction : en utilisant Duhamel sur l'intervalle J (qui est compact) et $\|u\|^4_{L^4_J L^4} = C(J)$, il est clair que l'estimation est vraie pour $N < K/C(J)$. Abrégeons la notation pour la projection $P_{|\xi-\xi(t)|>N}u = u_{>N}$ et $u - u_{>N} = u_{<N}$. Il s'agit donc de contrôler $u_{>N}$ par $u_{>\eta N}$ avec un $\eta < 1$. Subdivisons J en intervalles J_k comme précédemment, en les ajustant pour que sur chaque J_k, $|\xi(t_1) - \xi(t_2)| \leq \lambda^{-1}(J_k)/(100\gamma)$, où γ est fixé, petit :

- si $\lambda^{-1}(J_k) > \gamma N$, l'intervalle J_k est « mauvais ». D'après (28), il y a au plus $2K/(\gamma N)$ « mauvais » intervalles (et, comme $1 \lesssim \lambda(t)$, si $N > 2/\gamma$, il n'y a plus de « mauvais » intervalles !). Sur de tels intervalles, on se contente de $\|u\|_{L^2_{J_k} L^\infty} \lesssim_M 1$;
- si $\lambda^{-1}(J_k) \leq \gamma N$, l'intervalle est « bon » (un exercice de dénombrement montre qu'il y a au plus un nombre de bons intervalles égal au nombre de mauvais intervalles plus $1 + K/(\gamma N)$). Comme $|\xi - \xi(t)|$ reste de l'ordre de $\gamma N \ll N$, on peut dans la projection $P_{|\xi-\xi(t)|>N}$ remplacer le $\xi(t)$ par $\xi(t^-)$ en remplaçant N par $N/2$. En décomposant $u = u_{>\eta N} + u_{<\eta N}$ dans la formule de Duhamel et en utilisant les propriétés des supports spectraux, il vient

$$\|u_{>N}\|_{L^2_J L^\infty} \lesssim \|P_{|\xi-\xi(t^-)|>N/2} u(t^-)\|_2 + \|u_{>\eta N} u^2_{>\eta N}\|_{L^2_J L^1} + \|u_{>\eta N} u^2_{<\eta N}\|_{L^2_J L^1} .$$

On subdivise à nouveau $u_{<\eta N} = u_{<C_0\lambda^{-1}(J_k)} + P_{<\eta_N} u_{>C_0\lambda^{-1}(J_k)}$, et pour tous les termes comportant $u^2_{>C_0\lambda^{-1}(J_k)}$ (et a fortiori $u^2_{>\eta N}$!) on utilise la norme $L^\infty_t L^2_x$ et la compacité, qui donnent un facteur $\varepsilon(C_0)\|u_{>\eta N}\|_{L^2_J L^\infty}$. Reste un terme, pour lequel on va utiliser le gain bilinéaire issu de (18), ou plutôt sa version inhomogène ([**46**]) où l'on autorise un terme source $F \in L^{4/3}_{t,x}$: si $\lambda^{-1}(J_k) \leq \gamma\eta N$, on peut geler le $\xi(t)$ et écrire

$$\begin{aligned}\|u_{>\eta N} u^2_{<R_0\lambda^{-1}(J_k)}\|_{L^2_{J_k} L^1} &\lesssim_M \|u_{|\xi-\xi(t^-)|>\eta N/2} u_{|\xi-\xi(t^-)|<(R_0+1/\gamma)\lambda^{-1}(J_k)}\|_{L^2_{J_k} L^2_x} \\ &\lesssim_M \left(\frac{R_0\lambda^{-1}(J_k)}{\eta N}\right)^{\frac{1}{2}} (\|u_{>\eta N/2}(t^-)\|_2 + \|(i\partial_t + \Delta)u_{>\eta N/4}\|_{L^{4/3}_{J_K} L^{4/3}_x}) ;\end{aligned}$$

finalement, si $\lambda^{-1}(J_k) \geq \gamma\eta N$, on majore simplement par $M\|u_{|\xi-\xi(t)|>\eta N}\|_{L^\infty_{J_k} L^2}$, et l'on remarque qu'il y a au plus $K/(\gamma\eta N)$ intervalles de ce type grâce à (28).

En sommant les divers termes et en tenant compte des nombres respectifs d'intervalles de divers types, on obtient l'inégalité d'induction désirée ; il reste ensuite à établir la petitesse pour N grand, indépendamment de K. On revisite alors les majorations précédentes, pour remarquer que si N et K sont pris assez grands, il n'y a plus de mauvais intervalles, et que les autres termes comportent tous un facteur qui tend convenablement vers zéro : en particulier, le terme $L^{4/3}_{J_k} L^{4/3}$ de droite dans la dernière inégalité tend vers zéro pour N grand par compacité et réutilisation d'un argument de découpage spectral de la nonlinéarité.

Remarque 2.2. — Lorsque $n \geq 3$, les estimations du type (18) ne sont plus adaptées à l'échelle L^2_x : il est nécessaire d'utiliser en outre la compacité en espace pour séparer le terme $u_{<R_0\lambda^{-1}(J_k)}$ entre $|x - x(t)| < R_0\lambda(J_k)$ (traité par Hölder grâce à la taille du support physique) et $|x - x(t)| > R_0\lambda(J_k)$ traité par compacité pour obtenir la petitesse.

Comme indiqué précédemment, il est nécessaire en dimension un et deux de remplacer la norme Strichartz par une norme de type conormale (voir **[20]** pour une excellente présentation), comme celle introduite dans **[34]**, adaptée à la taille de l'intervalle temporel considéré. La complexité de la preuve de l'estimation d'induction augmente alors considérablement (notamment le dénombrement des intervalles temporels de divers type) et nous renvoyons à **[16]** et **[15]** pour les détails.

Enfin, il convient de remarquer que l'ensemble de cette section s'applique indifféremment au cas focalisant ou défocalisant, la nature des preuves étant principalement perturbative.

2.2. Morawetz bilinéaire et le premier scénario

Nous souhaitons maintenant exclure une solution minimale de type soliton, et nous allons présenter une preuve valide dans le cas défocalisant, qui repose sur les estimations de Morawetz bilinéaires. Rappelons d'abord en quoi consiste l'identité du viriel : si $\rho(x)$ est une fonction (qu'on choisit le plus souvent convexe !) de poids, on définit le viriel associé par $M_\rho(t) = \int \rho(x)|u|^2(x,t)\,dx$, et un calcul élémentaire conduit à

(31)
$$\frac{d^2}{dt^2}M_\rho(t) = \frac{d}{dt}2\mathrm{Im}\int \bar{u}\nabla u \cdot \nabla\rho = 4\int \mathrm{Hess}(\rho)(\nabla u, \nabla\bar{u}) \pm \int |u|^4\Delta\rho - \int |u|^2\Delta^2\rho\,.$$

Le choix classique est $\rho(x) = |x|^2$, qui conduit à (5) puisque alors (31) donne le contrôle de $\|u\|^4_{L^4_{t,x}}$ après intégration en temps (dans le cas défocalisant. Dans le cas focalisant, on en déduit l'existence de solutions explosives en temps fini). Le choix $\rho(x) = |x|$ correspond à l'identité de **[35]**, de type Morawetz (si $n \geq 3$ pour éviter un bilaplacien trop singulier), cruciale dans **[5]** (où elle est convenablement localisée en temps) ; la dépendance à l'origine $x = 0$ à travers le poids est en partie responsable de la restriction au cas radial. Dans **[11]** est introduite une nouvelle famille d'estimations où (31) est appliqué au produit tensoriel $u(x)v(y)$ de deux solutions, et où le poids choisi est $\rho(x,y) = |x - y|$, ce qui permet d'obtenir une estimation invariante par translation spatiale, un aspect crucial dans **[12]**. Ces nouvelles estimations, d'abord limitées à $n \geq 3$, seront ensuite généralisées en petites dimensions dans **[8]** et **[40]**.

Remarque 2.3. — Le lecteur pourra consulter **[23]** pour une présentation élégante de l'argument introduit par **[40]**, de portée plus générale que celui de **[8]**, comme illustré par (19). Dans cette section, l'estimation utilisée résulte indifféremment des deux approches, qui étendent naturellement **[11]**. Notons également que ces estimations bilinéaires permettent de redémontrer les résultats de diffusion pour l'équation d'énergie sous-critique et de masse sur-critique démontrés à l'origine dans **[22]**, un travail pionnier utilisant des arguments délicats d'induction sur la décroissance en temps des solutions (ne donnant pas de bornes explicites sur les normes en espace-temps).

Supposons pour un moment que notre solution minimale est d'énergie finie (qui, dans le cas défocalisant, contrôle la norme $\|\nabla u\|_2$). L'estimation de Morawetz bilinéaire s'écrit (en dimension deux, avant intégration en temps)

$$\int \||\nabla_x|^{\frac{1}{2}}(|u|^2)|^2\, dx + \int (+)\, dx = \frac{d}{dt}\int \nabla(|x-y|)\cdot(\operatorname{Im}(\bar{u}\nabla_x u)(x)|u|^2(y) - \operatorname{Im}(\bar{u}\nabla_y u)(y)|u|^2(x)\, dxdy\,, \tag{32}$$

où le terme $(+)$ à gauche est positif grâce au caractère défocalisant. Par des manipulations assez proches de celles conduisant à (28), on peut montrer que

$$(K \approx)\int_J \lambda^{-3}(t)\, dt \lesssim \int_J\int \||\nabla_x|^{\frac{1}{2}}(|u|^2)|^2\, dxdt \tag{33}$$

qui est naturellement consistant avec l'échelle du problème. On en déduit immédiatement une contradiction avec (32) appliquée sur l'intervalle J, puisqu'il vient $K \lesssim 1$.

Cependant, la solution minimale n'a pas de raison particulière de posséder de la régularité additionnelle. Il faut donc localiser spectralement l'estimation (32), en remplaçant u par $u_{|\xi-\xi(t)|<K}$. Ceci engendre deux complications différentes :

- les termes de bord qui sont à droite sont, a priori, d'ordre K ; cependant, comme remarqué dans **[40]**, l'estimation (32) est invariante par transformation de Galilée, et l'on peut donc remplacer la dérivée ∇_x par $\nabla_x - i\xi(t)$ (où il est utile de penser à $\xi(t)$ comme constant par morceaux). Dès lors, on obtient K fois une somme de Cesaro dont le terme général tend vers zéro par compacité (rappelons que $\lambda(t) \geq 1$).
- Il apparaît un terme de reste dans le calcul conduisant à cette estimation, faisant intervenir $u_{|\xi-\xi(t)|<K}|u_{|\xi-\xi(t)|<K}|^2 - P_{|\xi-\xi(t)|<K}(|u|^2u)$. Des considérations spectrales montrent immédiatement qu'un tel terme comporte un facteur $u_{|\xi-\xi(t)|>K}$, qui va pouvoir être contrôlé par (30), alors que les termes $u_{|\xi-\xi(t)|<K}$ conduisent à un facteur K venant de la dérivée présente dans l'expression (il y a ici un certain nombre de complications techniques qui relèvent à nouveau de découpages fréquentiels et temporels adaptés, sur lesquels on ne s'étend pas).

Remarque 2.4. — Le traitement perturbatif des termes de reste doit beaucoup au savoir-faire acquis dans le perfectionnement des techniques perturbatives initiées dans **[4]** pour montrer que l'équation cubique défocalisante est globalement bien posée dans H^s, pour un $s > 3/5$; **[10]** introduit la « I-method » dans ce contexte, obtenant

$s > 4/7$, jusqu'aux résultats très récents de **[13]** ($s > 1/3$) puis **[14]** ($s > 1/4$), ces derniers localisant déjà spectralement l'estimation de Morawetz bilinéaire.

2.3. Gain de régularité et le second scénario

Nous allons maintenant exclure le second scénario : ici, nous pouvons considérer le cas focalisant et le cas défocalisant de la même façon, le point essentiel étant de montrer un gain de régularité qui assure que la solution est d'énergie finie et même légèrement mieux. Supposons que cette régularité supplémentaire est vraie : alors (directement ou en utilisant Gagliardo-Nirenberg dans le cas focalisant) on en déduit que la norme $\dot{H}^1$ de u est très petite pour t grand (dans ce scénario, $\lambda^{-1}(t) \to 0$ à l'infini), puis, en utilisant la localisation de la masse par compacité, que cette même masse est également très petite, ce qui contredit l'hypothèse de masse minimale M.

Il reste à montrer le gain de régularité : on utilise (30), en oubliant la petitesse; par interpolation avec la masse, on peut obtenir que

$$\|u_{|\xi-\xi(t)|>N}\|_{L^4_{t,x}} \lesssim (K/N)^{\frac{1}{4}} + 1\,. \tag{34}$$

Pour tirer profit de cette estimation, nous allons utiliser une propriété déjà cruciale dans la résolution de la conjecture dans les cas radiaux : la solution minimale « ignore » sa partie linéaire, au sens où

$$u(t) = i\int_t^{+\infty} e^{i(t-s)\Delta}(|u|^2u)(s)\,ds, \tag{35}$$

où l'égalité s'entend comme limite faible dans L^2_x si l'on remplace $+\infty$ par un grand paramètre temporel (**[45]** ou **[32]**) ; il suffit de tester $u(t)$ contre une solution linéaire et d'utiliser l'asymptotique de celle-là (voir (6)) ainsi que la croissance de $\lambda(t)$ vers l'infini.

On reprend alors le même type de manipulation effectuée auparavant dans le régime $N < K$, mais en utilisant la formule (35) pour progressivement améliorer l'estimation, jusqu'à obtenir une régularité Sobolev $s > 1$. $\square$

2.4. Variation sur le viriel bilinéaire et le cas focalisant

Seul le premier de nos deux cas, celui d'une solution minimale de type soliton, a été exclu en utilisant l'inégalité de Morawetz d'interaction (32). Il n'est pas difficile d'observer, comme le fait **[18]**, que le changement de signe induit dans cette estimation par le cas focalisant n'est pas récupérable par Gagliardo-Nirenberg, faute de constantes numériques ajustées. Dans **[18]**, l'inégalité bilinéaire est remplacée par une généralisation adéquate, dépendante du temps à travers une fonction de poids $\rho(x-y)$ qui fait intervenir le temps à travers le paramètre $\lambda(t)$, ou plutôt une version lissée de celui-là. La fonction ρ est donc tronquée dynamiquement en fonction du temps, et les termes de reste produits par cette procédure dynamique sont ignorés grâce à la compacité. Il s'agit, au moins dans l'esprit, d'une version bilinéaire des arguments de viriel utilisés par **[27]** pour l'équation d'énergie critique. L'introduction de ce nouveau viriel bilinéaire adapté au cas focalisant est l'innovation essentielle de **[18]**, le reste de la preuve (hors dérivation du viriel et vérification que les termes temporels ne produisent pas d'effets indésirables, ce qui est fait dans **[17]** et **[16]**) relevant des travaux précédents.

RÉFÉRENCES

[1] H. Bahouri & P. Gérard – Optique géométrique généralisée pour les ondes non linéaires critiques, in *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1996–1997*, École Polytech., 1997, p. exp. n° VIII, 17.

[2] ———, High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations, *Amer. J. Math.* **121** (1999), p. 131–175.

[3] P. Bégout & A. Vargas – Mass concentration phenomena for the L^2-critical nonlinear Schrödinger equation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), p. 5257–5282.

[4] J. Bourgain – Refinements of Strichartz' inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity, *Int. Math. Res. Not.* **1998** (1998), p. 253–283.

[5] ———, Global wellposedness of defocusing critical nonlinear Schrödinger equation in the radial case, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), p. 145–171.

[6] N. Burq – Explosion pour l'équation de Schrödinger au régime du « log log » (d'apres Merle-Raphael), Séminaire Bourbaki, vol. 2005/2006, exp. n° 953, *Astérisque* **311** (2007), p. 33–53.

[7] T. Cazenave & F. B. Weissler – The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s, *Nonlinear Anal.* **14** (1990), p. 807–836.

[8] J. Colliander, M. Grillakis & N. Tzirakis – Tensor products and correlation estimates with applications to nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **62** (2009), p. 920–968.

[9] J. Colliander, J. Holmer, M. Vişan & X. Zhang – Global existence and scattering for rough solutions to generalized nonlinear Schrödinger equations on $\mathbb{R}$, *Commun. Pure Appl. Anal.* **7** (2008), p. 467–489.

[10] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka & T. Tao – Almost conservation laws and global rough solutions to a nonlinear Schrödinger equation, *Math. Res. Lett.* **9** (2002), p. 659–682.

[11] ———, Global existence and scattering for rough solutions of a nonlinear Schrödinger equation on $\mathbb{R}^3$, *Comm. Pure Appl. Math.* **57** (2004), p. 987–1014.

[12] ———, Global well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^3$, *Ann. of Math.* **167** (2008), p. 767–865.

[13] J. COLLIANDER & T. ROY – Bootstrapped Morawetz estimates and resonant decomposition for low regularity global solutions of cubic NLS on $\mathbb{R}^2$, *Commun. Pure Appl. Anal.* **10** (2011), p. 397–414.

[14] B. DODSON – Improved almost Morawetz estimates for the cubic nonlinear Schrödinger equation, *Commun. Pure Appl. Anal.* **10** (2011), p. 127–140.

[15] ———, Global well-posedness and scattering for the defocusing, L^2-critical, nonlinear Schrödinger equation when $d = 1$, prépublication arXiv:1010.0040.

[16] ———, Global well-posedness and scattering for the defocusing, L^2-critical, nonlinear Schrödinger equation when $d = 2$, prépublication arXiv:1006.1375.

[17] ———, Global well-posedness and scattering for the defocusing, L^2-critical, nonlinear Schrödinger equation when $d \geq 3$, prépublication arXiv:0912.2467.

[18] ———, Global well-posedness and scattering for the mass critical nonlinear schrödinger equation with mass below the mass of the ground state, prépublication arXiv:1104.1114.

[19] P. GÉRARD – Conférence en l'honneur de L. Peletier, Université d'Orsay, 1998.

[20] J. GINIBRE – Le problème de Cauchy pour des EDP semi-linéaires périodiques en variables d'espace (d'après Bourgain), Séminaire Bourbaki, vol. 1994/95, exp. n° 796, *Astérisque* **237** (1996), p. 163–187.

[21] J. GINIBRE & G. VELO – Existence of solutions and scattering theory for the nonlinear Schrödinger equation, in *Proceedings of the International Conference on Operator Algebras, Ideals, and their Applications in Theoretical Physics (Leipzig, 1977)*, Teubner, 1978, p. 320–334.

[22] ———, Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations, *J. Math. Pures Appl.* **64** (1985), p. 363–401.

[23] ———, Quadratic Morawetz inequalities and asymptotic completeness in the energy space for nonlinear Schrödinger and Hartree equations, *Quart. Appl. Math.* **68** (2010), p. 113–134.

[24] L. GLANGETAS & F. MERLE – A geometrical approach of existence of blow up solutions in H^1 for nonlinear Schrödinger equation, rapport n° R95031, Laboratoire d'Analyse Numérique, Univ. Pierre et Marie Curie, 1995.

[25] R. T. GLASSEY – On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations, *J. Math. Phys.* **18** (1977), p. 1794–1797.

[26] M. KEEL & T. TAO – Endpoint Strichartz estimates, *Amer. J. Math.* **120** (1998), p. 955–980.

[27] C. E. KENIG & F. MERLE – Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case, *Invent. Math.* **166** (2006), p. 645–675.

[28] ———, Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical focusing non-linear wave equation, *Acta Math.* **201** (2008), p. 147–212.

[29] S. Keraani – On the defect of compactness for the Strichartz estimates of the Schrödinger equations, *J. Differential Equations* **175** (2001), p. 353–392.

[30] ———, On the blow up phenomenon of the critical nonlinear Schrödinger equation, *J. Funct. Anal.* **235** (2006), p. 171–192.

[31] R. Killip, T. Tao & M. Vişan – The cubic nonlinear Schrödinger equation in two dimensions with radial data, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **11** (2009), p. 1203–1258.

[32] R. Killip & M. Vişan – Nonlinear Schrödinger equations at critical regularity, *Clay Lecture Notes* (2008).

[33] R. Killip, M. Vişan & X. Zhang – The mass-critical nonlinear Schrödinger equation with radial data in dimensions three and higher, *Anal. PDE* **1** (2008), p. 229–266.

[34] H. Koch & D. Tataru – A priori bounds for the 1D cubic NLS in negative Sobolev spaces, *Int. Math. Res. Not.* **2007** (2007), Art. ID rnm053, 36.

[35] J. E. Lin & W. A. Strauss – Decay and scattering of solutions of a nonlinear Schrödinger equation, *J. Funct. Anal.* **30** (1978), p. 245–263.

[36] Y. Martel & F. Merle – Stability of blow-up profile and lower bounds for blow-up rate for the critical generalized KdV equation, *Ann. of Math.* **155** (2002), p. 235–280.

[37] F. Merle & P. Raphaël – On universality of blow-up profile for L^2 critical nonlinear Schrödinger equation, *Invent. Math.* **156** (2004), p. 565–672.

[38] F. Merle & L. Vega – Compactness at blow-up time for L^2 solutions of the critical nonlinear Schrödinger equation in 2D, *Int. Math. Res. Not.* **1998** (1998), p. 399–425.

[39] A. Moyua, A. Vargas & L. Vega – Restriction theorems and maximal operators related to oscillatory integrals in $\mathbf{R}^3$, *Duke Math. J.* **96** (1999), p. 547–574.

[40] F. Planchon & L. Vega – Bilinear virial identities and applications, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **42** (2009), p. 261–290.

[41] P. Raphaël – Stability and blow up for the non linear Schrödinger equation, *Clay Lecture Notes* (2008).

[42] R. S. Strichartz – Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations, *Duke Math. J.* **44** (1977), p. 705–714.

[43] C. Sulem & P.-L. Sulem – *The nonlinear Schrödinger equation, self-focusing and wave collapse*, Applied Mathematical Sciences, vol. 139, Springer, 1999.

[44] T. Tao, M. Vişan & X. Zhang – Global well-posedness and scattering for the defocusing mass-critical nonlinear Schrödinger equation for radial data in high dimensions, *Duke Math. J.* **140** (2007), p. 165–202.

[45] ———, Minimal-mass blowup solutions of the mass-critical NLS, *Forum Math.* **20** (2008), p. 881–919.

[46] M. Vişan – The defocusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in higher dimensions, *Duke Math. J.* **138** (2007), p. 281–374.

[47] M. I. Weinstein – Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, *Comm. Math. Phys.* **87** (1982/83), p. 567–576.

Fabrice PLANCHON

Université de Nice Sophia-Antipolis
Laboratoire J.-A. Dieudonné
UMR CNRS 6621
Parc Valrose
F–06108 Nice Cedex 02
E-mail : `fab@unice.fr`