PETRU MIRONESCU

Le déterminant jacobien [d'après Brezis et Nguyen]

Astérisque, tome 348 (2012), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 1041, p. 405-424
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2012__348__405_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 2011
63e année, 2010-2011, n° 1041, p. 405 à 424

LE DÉTERMINANT JACOBIEN
[d'après Brezis et Nguyen]

par **Petru MIRONESCU**

1. INTRODUCTION

Récemment, Brezis et Nguyen [**14, 15**] ont décrit les espaces fonctionnels permettant de définir, de manière robuste, la distribution jacobien. Leurs résultats unifient les résultats connus auparavant. Par ailleurs, [**14**] et [**15**] apportent un nouvel éclairage au théorème classique de Reshetnyak sur la compacité faible des jacobiens [**51**]. Dans ces travaux, un rôle important est joué par plusieurs identités faisant intervenir la structure algébrique du jacobien. De ce point de vue, ces travaux s'inscrivent dans une longue série de résultats qui utilisent de manière cruciale la structure particulière du déterminant jacobien. Dans la suite, je présenterai quelques-uns des résultats marquants dans cette direction, des travaux de Morrey [**42**] et Reshetnyak [**51**] à ceux de Brezis et Nguyen [**14**] et [**15**].

2. LE JACOBIEN DES FONCTIONS PEU RÉGULIÈRES

Si $u = (u^1, \dots, u^n) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors son (déterminant) jacobien est $Ju = \det(\nabla u^1, \dots, \nabla u^n) = \det(\nabla u) = \det\left[(\partial_k u^i)_{i,k\in[\![1,n]\!]}\right]$ (1). Il est souvent nécessaire de considérer la quantité Ju lorsque u n'est pas C^1. Voici trois exemples.

2.1. Applications à distorsion bornée

Les applications quasiconformes furent introduites par Grötzsch [**26**] en 1928(2). Son point de départ est le suivant : il est impossible de représenter de manière conforme

(1) On utilise la notation $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$.
(2) Mais pas le terme quasiconforme. Celui-ci fut proposé par Ahlfors [**1**] en 1935.

un carré C sur un rectangle R qui n'est pas un carré tout en envoyant les sommets sur les sommets. Grötzsch chercha à mesurer la non-conformité (= distorsion) d'une application en considérant une représentation $u : C \to R$ qui fasse se correspondre les sommets et qui soit « la plus conforme » possible. Les applications quasiconformes sont les applications dont la non conformité est finie. En langage moderne, une application quasiconforme est $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ (avec $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert) telle que

1. u est un homéomorphisme ;
2. $u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ [(3)] ;
3. $\sup_{|h|\leq 1} |du(h)|^2 \leq K|Ju|$.

Le coefficient $K \geq 1$ mesure la distorsion. Les représentations conformes sont des exemples d'applications quasiconformes. Un autre exemple est $z \mapsto |z|^{\alpha-1}z$, avec $\alpha > 0$. Notons que, dans le cas des applications quasiconformes, parler du jacobien Ju ne pose, *a priori*, pas de problème : on a $Ju \in L^1_{\text{loc}}$, et donc Ju est bien défini comme distribution.

C'est Lavrent'ev **[36]** qui, dans ses travaux sur l'équation de Beltrami $\partial_{\bar{z}} f = \mu \partial_z f$ (dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$), considéra des applications à distorsion bornée ; ce sont des généralisations des applications quasiconformes dont nous donnerons la définition plus loin. C'est toujours Lavrent'ev **[37]** qui eut, le premier, l'intuition du rôle important que pouvaient jouer les applications quasiconformes en dimension quelconque. Reshetnyak **[50]** initia l'étude des applications à distorsion bornée (en toute dimension), dont la définition est :

1. u continue ;
2. $u \in W^{1,n}_{\text{loc}}(\Omega)$, avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Ju est de signe constant p. p. ;
3. $\sup_{|h|\leq 1} |du(h)|^n \leq K|Ju|$.

La monographie de Reshetnyak **[52]** donne un aperçu de la théorie des applications à distorsion bornée. Pour la théorie des applications quasiconformes et ses applications géométriques, voir le grand classique d'Ahlfors **[2]** ou la monographie récente **[21]**.

2.2. Élasticité

En mécanique, une déformation est une application $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ injective et qui préserve l'orientation (avec $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ouvert). Sous réserve de régularité suffisante de φ, cette dernière condition s'écrit $J\varphi > 0$. À la place de φ, il est plus commode de travailler avec $u = \varphi - \text{Id}$, qui est le déplacement. Souvent, u est obtenu en minimisant l'énergie associée au problème, et il peut arriver que la régularité de u soit *a priori* trop faible pour définir $J(\text{Id} + \text{u})$ de manière robuste. À titre d'exemple, prenons

[(3)] $W^{1,p}(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\ ;\ du \in L^p(\Omega)\}$. $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ est l'espace obtenu en remplaçant L^p par L^p_{loc}.

une forme simplifiée du système de l'élasticité linéarisée[4]. Dans ce cas, u est obtenu comme solution du problème

$$\inf\left\{\frac{\lambda}{2}\int_\Omega (\operatorname{div} v)^2 + \frac{\mu}{4}\sum_{i,k}\int_\Omega (\partial_i v^k + \partial_k v^i)^2 - T(v)\ ; v \in W^{1,2}(\Omega), \operatorname{tr} v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\right\}.$$

Ici, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est suffisamment régulier, $\lambda, \mu > 0$ sont des constantes élastiques, Γ_0 est une partie de mesure superficielle > 0 du $\partial\Omega$, et $T \in H^{-1}(\Omega)$. D'après l'inégalité de Korn [**34, 35**], l'infimum est atteint, mais *a priori* u n'est pas mieux que $W^{1,2}(\Omega)$.

Pour un tel u, quel sens donner à la quantité $J(\mathrm{Id} + \mathrm{u})$? Une première idée est de la regarder comme une quantité définie p. p. Dans ce cas, le jacobien vit dans l'espace $L^{2/3}(\Omega)$, et en particulier il ne s'agit pas d'une distribution. Une autre approche consiste à utiliser une identité qui se trouve dans Morrey [**42**, Lemma 4.4.6], mais était probablement connue avant[5]. Plus spécifiquement, si u est régulière, alors on a :

$$\text{si } n = 2\ :\ Ju = \partial_1(u^1\,\partial_2 u^2) - \partial_2(u^1\,\partial_1 u^2) = \frac{1}{2}\partial_1 \det(u, \partial_2 u) + \frac{1}{2}\partial_2 \det(\partial_1 u, u),$$

et, en toute dimension,

$$(1)\qquad Ju = \sum_{k=1}^{n} \partial_k\left(u^i\, C_i^k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \partial_k \det(\partial_1 u, \dots, \partial_{k-1}u, u, \partial_{k+1}u, \dots, \partial_n u),$$

où $(C_i^k)_{i,k\in[\![1,n]\!]}$ est la matrice des cofacteurs de la matrice ∇u. De manière équivalente, on a

$$(2)\qquad \operatorname{div}\left[(C_i^k)_{k\in[\![1,n]\!]}\right] = \sum_k \partial_k C_i^k = 0, \forall\, i \in [\![1,n]\!].$$

Revenons au cas de l'élasticité linéarisée. Si u est borné[6], alors on peut *définir* la distribution $J(\mathrm{Id}+\mathrm{u})$ à partir de (1) appliquée à $\mathrm{Id}+\mathrm{u}$. Ceci donne bien une distribution, car le membre de droite de (1) appartient à $\operatorname{div} L^1$.

Plus généralement, on peut définir, *via* la formule (1), la distribution Ju si $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, avec $\frac{n-1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Après intégration par parties, la définition revient à

$$(3)\quad Ju(\varphi) = -\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega \det(\partial_1 u, \dots, \partial_{k-1}u, u, \partial_{k+1}u, \dots, \partial_n u)\,\partial_k\varphi, \quad \forall\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Cas particulier : soit $p_n = \dfrac{n^2}{n+1}$. L'injection de Sobolev $W^{1,p_n}_{\mathrm{loc}} \hookrightarrow L^{n^2}(\Omega)$ permet de définir Ju, *via* (1), pour $u \in W^{1,p_n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Par exemple, en dimension 2, définir Ju

[4] Ce système est une approximation linéaire du problème de mixte déplacement-traction lorsque le déplacement u est petit.
[5] Le cas $n = 2$ était connu par Poincaré [**38**]. Le cas général semble être dû à Kronecker.
[6] Hypothèse raisonnable, car le déplacement u est censé être petit.

comme $\det(\nabla u)$ donne une distribution si $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$, alors que (1) permet de descendre jusqu'à $W^{1,4/3}_{\mathrm{loc}}$.

L'utilisation systématique de la formule (1) en élasticité est due à Ball [**4**]. Son article a ouvert de nombreuses voies, et plusieurs résultats dont il sera question plus loin sont directement inspirés par [**4**].

2.3. Cristaux liquides

Un cristal liquide est un état de la matière intermédiaire entre le solide et le fluide isotrope [**25**]. La modélisation mathématique des cristaux liquides fait intervenir les Q-tenseurs [**25**] ; leur analyse est délicate, ce qui explique le succès d'un modèle très simplifié, celui d'Oseen et Frank [**49, 22**]. Selon ce modèle(7), un cristal liquide en équilibre est une application $u : \Omega \to \mathbb{S}^2$ (avec Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$) minimisant de l'énergie de Dirichlet $\int_\Omega |\nabla u|^2$ par rapport à sa propre condition aux limites, $g \in C^\infty(\partial\Omega; \mathbb{S}^2)$. D'après un résultat profond de Schoen et Uhlenbeck [**54, 55**], u est régulière sauf en un nombre fini de points $a_1, \ldots, a_k$. Brezis, Coron et Lieb [**12**] ont découvert que, si $u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{S}^2)$ est régulière sauf en un nombre fini de points, alors son jacobien, défini par (1), « entend » les singularités de u : $Ju = \frac{4\pi}{3} \sum d_j \delta_{a_j}$. Ici, la somme se fait sur les singularités a_j de u, et l'entier d_j est le degré topologique de u sur une petite sphère autour de a_j (8). Dans le cas particulier où $u(x) = \dfrac{x}{|x|}$, ceci avait été remarqué par Ball [**4**]. Par ailleurs, le déterminant $\det(\nabla u)$ vaut 0 presque partout (en fait, en dehors des singularités), et donc n'entend rien(9). Raison de plus de considérer que le bon jacobien est donné par (1) !

3. COMPACITÉ

On doit à Reshetnyak [**51**] ce surprenant résultat.

THÉORÈME 3.1. — *Soit $(u_j) \subset W^{1,n}(\Omega)$, avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $u_j \rightharpoonup u$, alors $Ju_j \to Ju$ au sens des distributions.*

Notons que la convergence est due à la structure spéciale du jacobien ; elle n'a pas lieu pour un terme de la forme $\partial_1 u_j^1 \ldots \partial_n u_j^n$ (10).

(7) Dans sa forme la plus simple : approximation à une constante élastique et condition d'ancrage.
(8) Par un argument d'homotopie, d_j ne dépend pas de la sphère.
(9) Preuve : si $u \in C^\infty$ au voisinage de x, alors les dérivées $\partial_j u(x)$ sont orthogonales à $u(x)$, ce qui s'obtient en dérivant la relation $|u|^2 \equiv 1$. Il s'ensuit que ces dérivées ne sont pas indépendantes. On obtient $\det(\nabla u) = 0$ p. p. On se servira de ce fait dans la section 5.
(10) Prendre $n = 2$, $u_j(x_1, x_2) = \dfrac{1}{j}(\sin(jx_1)\cos(jx_2), \cos(jx_2)\sin(jx_1))$.

Démonstration. — On montre, par récurrence sur $l \in [\![1, n]\!]$, que

$$\int_\Omega du_j^1 \wedge \cdots \wedge du_j^l \wedge \varphi \to \int_\Omega du^1 \wedge \cdots \wedge du^l \wedge \varphi, \quad \forall\, \varphi \in L^{n/(n-l)}(\Omega; \Lambda^{n-l}(\mathbb{R}^n)).$$

Le cas $l = n$ donne la conclusion ; le cas $l = 1$ est clair. Le cas $l = 2$ est déjà générique. Pour le traiter, on part de

$$\int_\Omega du_j^1 \wedge du_j^2 \wedge \varphi = -\int_\Omega du_j^1 \wedge (u_j^2\, d\varphi), \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega; \Lambda^{n-2}(\mathbb{R}^n)).$$

De par le théorème de Rellich-Kondratchov, la parenthèse converge fortement dans $L^n(\Omega)$ vers $u^2\, d\varphi$, ce qui permet de conclure[11]. □

Le même argument donne : si $\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u$ dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $u_j \to u$ dans $L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, avec $\frac{n-1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $Ju_j \to Ju$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. Cas particulier : si $p > p_n$, alors on a convergence sous la seule hypothèse $u_j \rightharpoonup u$ dans $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$. En effet, dans ce cas l'injection $W^{1,p}_{\mathrm{loc}} \hookrightarrow L^q_{\mathrm{loc}}$ est compacte.

Il est nécessaire de supposer au moins une convergence forte afin de conclure. En effet, Dacorogna et Murat **[18]** ont construit une suite bornée dans $W^{1,p_n}(\Omega)$, avec $u_j \rightharpoonup u$ mais $Ju_j \not\rightharpoonup Ju$. Cette construction a été généralisée par Brezis et Nguyen **[14]**.

PROPOSITION 3.2. — *Si $1 \le p \le p_n$ et $\frac{n-1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors il existe u et une suite (u_j) tels que $u_j \rightharpoonup u$ dans $W^{1,p} \cap L^q$, mais $Ju_j \not\rightharpoonup Ju$.*

Démonstration. — La preuve est basée sur la construction du dipôle, qui remonte à Brezis, Coron et Lieb **[12]**. Exemple en dimension 2 : on considère le losange $L_{a,b}$ de sommets $(0,0)$, $(0,2a)$, (b,a), $(-b,a)$, et la fonction $u_{a,b}$ qui vaut zéro en dehors de $L_{a,b}$ et qui parcourt, sur l'intersection de $L_{a,b}$ avec chaque droite verticale, le cercle $C((1,0);1)$ une fois (à partir de l'origine) dans le sens direct et à vitesse constante. En jouant avec les paramètres $a, b, c \to 0$, on a, pour $1 < p \le \dfrac{4}{3}$, $u_{a,b}/c \rightharpoonup 0$ dans $W^{1,p} \cap L^q(B_{\mathbb{R}^2}(0,1))$ et $J\,(u_{a,b}/c) \to \partial_1 \delta_0$. □

Retour au théorème de Reshetnyak. Sa preuve n'est pas explicite : elle ne donne pas la vitesse de convergence. Brezis et Nguyen **[14]** ont découvert une inégalité qui permet de retrouver en une ligne le théorème de Reshetnyak.

THÉORÈME 3.3. — *Si $u, v \in W^{1,p} \cap L^q(\Omega)$, avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $\frac{n-1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$|Ju(\varphi) - Jv(\varphi)| \lesssim \|u - v\|_{L^q} (\|\nabla u\|_{L^p}^{n-1} + \|\nabla v\|_{L^p}^{n-1}) \|\nabla \varphi\|_{L^\infty} \tag{4}$$ [12].

---

[11] Au vu de (1), la preuve est intuitive : on a $u_j^n \to u^n$ dans $L^n(\Omega)$. Avec des notations naturelles, il reste à montrer que $C_n^{k,j} \rightharpoonup C_n^k$ dans $L^{n/(n-1)}(\Omega)$.

[12] On peut reformuler cette inégalité en termes de la distance de Wasserstein W_1 : on a

$$W_1(Ju, Jv) \lesssim \|u - v\|_{L^q} (\|\nabla u\|_{L^p}^{n-1} + \|\nabla v\|_{L^p}^{n-1}).$$

Démonstration. — La première égalité de (1) combinée avec l'identité

$$(5)\quad \det(a_1,\dots,a_n)-\det(b_1,\dots,b_n)=\sum_{k=1}^{n}\det(b_1,\dots,b_{k-1},a_k-b_k,a_{k+1},\dots,a_n),$$

donne

$$(6)\ Ju(\varphi)-Jv(\varphi)=-\sum_{k=1}^{n}\int_{\Omega}(u^k-v^k)\det(\nabla v^1,\dots,\nabla v^{k-1},\nabla\varphi,\nabla u^{k+1},\dots,\nabla u^n).$$

On conclut grâce à l'inégalité de Hölder.

Un argument similaire donne

$$|Ju(\varphi)-Jv(\varphi)|\lesssim \|\nabla u-\nabla v\|_{L^p}(\|\nabla u\|_{L^p}^{n-2}+\|\nabla v\|_{L^p}^{n-2})(\|u\|_{L^q}+\|v\|_{L^q})\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}.\ \square$$

Le théorème 3.3 peut être amélioré dans le cas $p=n-1$, $q=\infty$, mais ceci nécessite une excursion dans le monde des espaces de Hardy.

À l'origine de ce détour, il y a un étonnant théorème de Müller [**43**].

THÉORÈME 3.4. — *Si $u\in W^{1,n}(\Omega)$, avec $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, et si $w=Ju\geq 0$, alors la fonction $w\ln(2+w)$ est localement intégrable.*

Démonstration. — La preuve de Müller est basée sur un argument géométrique, plus spécifiquement sur l'inégalité suivante

$$(7)\qquad \left|\int_{B_{\mathbb{R}^n}(0,1)}Ju\right|\lesssim\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\sum_{i,k=1}^{n}|C_i^k|\right)^{n/(n-1)},\quad \forall\, u\in C^\infty(\bar{B}_{\mathbb{R}^n}(0,1);\mathbb{R}^n),$$

à parfum d'inégalité isopérimétrique(13).

Mais là on sort du cadre habituel des distances de Wasserstein, car Ju et Jv ne sont pas forcément des mesures.

(13) Dans le cas particulier où $u:\overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,1)\to\overline{\Omega}$ est un C^1-difféomorphisme préservant l'orientation, $\int\det(\nabla u)$ n'est rien d'autre que le volume de Ω. Par ailleurs, l'intégrale de surface qui apparaît dans (7) contrôle l'aire de $\partial\Omega$. Donc, dans ce cas particulier, (7) s'obtient bien à partir de l'inégalité isopérimétrique. Comme noté dans [**43**], le cas général peut être obtenu à partir de l'inégalité isopérimétrique pour les courants [**19**, Theorem 4.5.9 (31)], mais Müller donne aussi une preuve directe [**43**, Section 3]. La preuve de (7) est simple en dimension 2 ; autant la présenter. Une intégration par parties donne

$$\int_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}Ju=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^1}\left(u-\fint_{\mathbb{S}^1}u\right)\wedge\frac{\partial u}{\partial\tau}\leq\frac{1}{2}\left\|u-\fint_{\mathbb{S}^1}u\right\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\int_{\mathbb{S}^1}|\nabla u|\lesssim\left(\int_{\mathbb{S}^1}|\nabla u|\right)^2.$$

On notera que c'est encore une intégration par parties !

En utilisant (7) sur une boule $B(x,\rho)$ et en intégrant par rapport à $\rho \in (R, 2R)$, avec $0 < R < \frac{1}{2}\mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega)$, on obtient, grâce à la positivité de w :

$$(8) \qquad \fint_{B(x,R)} w \lesssim \left(\fint_{B(x,2R)} \sum_{i,k=1}^{n} |C_i^k| \right)^{n/(n-1)} \lesssim \left(\mathcal{M}(|\nabla u|^{n-1})(x) \right)^{n/(n-1)} ;$$

ici, $\mathcal{M}$ est la fonction maximale de Hardy-Littlewood,

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{0<r<\mathrm{dist}\,(x,\partial\Omega)} \fint_{B(x,r)} |f(y)|\, dy.$$

Par un argument standard, (8) reste vraie pour tout $u \in W^{1,n}$. Comme $|\nabla u|^{n-1} \in L^{n/(n-1)}$, le théorème de la fonction maximale donne $\mathcal{M}(|\nabla u|^{n-1}) \in L^{n/(n-1)}$. Ce fait, combiné avec (8), implique $\mathcal{M}w \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Il s'ensuit que $w \ln(2+w) \in L^1_{\mathrm{loc}}$ [14]. □

Le résultat de Müller mena à deux directions de recherche. D'une part, trouver d'autres situations d'intégrabilité « améliorée » du jacobien (compris au sens ponctuel). Dans cette direction, citons deux résultats.

THÉORÈME 3.5. — *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $u \in W^{1,1}(\Omega)$ telle que $\int_\Omega |\nabla u| = 1$ et $w = \det(\nabla u) \geq 0$ p. p.*[15]*. Soit K un compact de Ω.*

1) (Iwaniec et Sbordone [**30**]) *On a*

$$(9) \qquad \int_K w \lesssim \int_\Omega \frac{|\nabla u|^n}{\ln(2+|\nabla u|)}.$$

2) (Brezis, Fusco et Sbordone [**13**]) *Pour $0 < \alpha < 1$, on a*

$$(10) \qquad \int_K w \ln^\alpha(2+w) \lesssim \int_\Omega \frac{|\nabla u|^n}{\ln^{1-\alpha}(2+|\nabla u|)}.$$

Démonstration. — Ces deux résultats seraient des conséquences immédiates de (8) et des propriétés standard de la fonction maximale. Mais je ne sais pas si (8) reste vraie si, au lieu de supposer $u \in W^{1,n}$, on suppose uniquement la finitude du membre de droite de (9) ou (10). La preuve repose sur une forme plus faible de (8) qui, elle, est vraie sous cette hypothèse. Plus spécifiquement, on a

$$(11) \qquad \fint_{B(x,R)} w \lesssim \left(\mathcal{M}(|\nabla u|^{n^2/(n+1)})(x) \right)^{(n+1)/n} \text{ [16]}.$$

[14] L'implication $\mathcal{M}f \in L^1_{\mathrm{loc}} \Longrightarrow f \ln(2+|f|) \in L^1_{\mathrm{loc}}$ est connue sous le nom de lemme de Stein [**58**].
[15] *A priori*, ici w est juste une fonction mesurable, pas une distribution.
[16] Cette inégalité repose sur une estimation délicate concernant les décompositions de Hodge, due à Iwaniec [**28**, Theorem 8.2].

Fin de la preuve : par une généralisation bien connue du théorème de la fonction maximale [7], on a

$$\int_\Omega \frac{(\mathcal{M}\eta)^p}{\ln^{1-\alpha}(2+\mathcal{M}\eta)} \sim \int_\Omega \frac{\eta^p}{\ln^{1-\alpha}(2+\eta)}, \quad \forall\, p>1, \forall\, 0\le\alpha\le 1. \tag{12}$$

Cette inégalité, appliquée à $\eta = |\nabla u|^{n^2/(n+1)}$ et $p = \dfrac{n+1}{n}$, combinée avec (11), donne

$$\int_K \frac{\mathcal{M}w}{\ln^{1-\alpha}(2+\mathcal{M}w)} \lesssim \int_\Omega \frac{|\nabla u|^n}{\ln^{1-\alpha}(2+|\nabla u|)}. \tag{13}$$

Les estimations (9) et (10) s'obtiennent en combinant (13) avec la généralisation suivante du lemme de Stein [**6**, Theorem 4.1] :

$$\int_\Omega |\eta| \ln^\alpha(2+|\eta|) \lesssim \int_\Omega \frac{\mathcal{M}\eta}{\ln^{1-\alpha}(2+\mathcal{M}\eta)}, \quad \forall\, 0<\alpha\le 1, \text{ si } \fint_\Omega |\eta| = 1. \qquad \square$$

Dans une autre direction, un célèbre résultat de Coifman, Lions, Meyer et Semmes [**17**] apporta un nouvel éclairage au théorème de Müller. Avant de le formuler, revenons à (1) et notons que, si $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$, alors $Ju = A\cdot B$, avec $A = \nabla u^1 \in L^n$ vérifiant $\operatorname{rot} A = 0$ et $B = (C_1^k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in L^{n/(n-1)}$ satisfaisant $\operatorname{div} B = 0$ [17]. Rappelons aussi la définition de l'espace de Hardy réel $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$, introduit par Stein et Weiss [**59**] :

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) = \{f\in L^1(\mathbb{R}^n)\ ;\ \mathcal{M}_\rho f = \sup_{\varepsilon>0} |f*\rho_\varepsilon| \in L^1(\mathbb{R}^n)\}\ ;$$

ici, ρ est un noyau régularisant et $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ est muni de la norme $\|f\|_{\mathcal{H}^1} = \|\mathcal{M}_\rho f\|_{L^1}$. L'un des résultats de [**17**] est

THÉORÈME 3.6. — *Soient* $1<p,q<\infty$, *avec* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Si* $A\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $B\in L^q(\mathbb{R}^n)$ *vérifient* $\operatorname{rot} A = 0$ *et* $\operatorname{div} B = 0$, *alors* $A\cdot B \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. — Soient $1<a\le p$, $1<b\le q$ tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 1+\frac{1}{n}$. L'hypothèse $\operatorname{rot} A = 0$ permet d'écrire $A = \nabla f$. En utilisant la condition $\operatorname{div} B = 0$, on obtient

[17] Ce point de vue permet de faire le lien entre le théorème de Reshetnyak et la compacité par compensation développée par Tartar [**60, 61, 62**] et Murat [**44, 45, 46**] à partir de 1978. En effet, avec des notations naturelles, la preuve du théorème de Reshetnyak suit le schéma $A^j \rightharpoonup A, B^j \rightharpoonup B \Longrightarrow A^j\cdot B^j \to A\cdot B$, ce qui est un cas très particulier de la compacité par compensation.

$w := A \cdot B = \operatorname{div}(fB)$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. En supposant $\operatorname{supp} \rho \subset B_{\mathbb{R}^n}(0,1)$, on a[18]

$$
\begin{aligned}
|w * \rho_\varepsilon(x)| &= \left| \sum_{j=1}^{n} (fB_j) * \partial_j(\rho_\varepsilon)(x) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \sum_{j=1}^{n} \int_{B_{\mathbb{R}^n}(x,\varepsilon)} \partial_j \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \left(f(y) - \fint_{B_{\mathbb{R}^n}(x,\varepsilon)} f \right) B_j(y)\, dy \right| \\
&\lesssim \frac{1}{\varepsilon} \left(\fint_{B_{\mathbb{R}^n}(x,\varepsilon)} \left| f - \fint_{B_{\mathbb{R}^n}(x,\varepsilon)} f \right|^{b/(b-1)} \right)^{(b-1)/b} \left(\fint_{B_{\mathbb{R}^n}(x,\varepsilon)} |B|^b \right)^{1/b} \\
&\lesssim \left(\fint_{B_{\mathbb{R}^n}(x,\varepsilon)} |\nabla f|^a \right)^{1/a} \left(\fint_{B_{\mathbb{R}^n}(x,\varepsilon)} |B|^b \right)^{1/b},
\end{aligned} \tag{14}
$$

la dernière ligne découlant de l'inégalité de Poincaré. On obtient

$$
\mathscr{M}_\rho w(x) \lesssim \mathscr{M}(|\nabla f|^a)^{1/a} \mathscr{M}(|B|^b)^{1/b} = \mathscr{M}(|A|^a)^{1/a} \mathscr{M}(|B|^b)^{1/b}. \tag{15}
$$

Le théorème de la fonction maximale, combiné avec l'inégalité de Hölder donne alors

$$
\|\mathscr{M}_\rho w\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|A\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|B\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}. \tag{16}
$$

□

Corollaire 3.7. — *Soient $u^j \in W^{1,p_j}(\mathbb{R}^n)$, $j \in [\![1,n]\!]$, avec $1 < p_1 < \infty$ et $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} = 1$. Alors $Ju \in \mathscr{H}^1(\mathbb{R}^n)$. De plus, on a*

$$
\|Ju\|_{\mathscr{H}^1} \lesssim \prod_{j=1}^{n} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^n)}. \tag{17}
$$

Ce corollaire implique le théorème de Müller : si $Ju \geq 0$ dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, alors $\mathscr{M}(Ju) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, et on conclut grâce au lemme de Stein.

Avant d'aller plus loin, rappelons que, d'après un résultat célèbre de Fefferman **[20]**, le dual de $\mathscr{H}^1(\mathbb{R}^n)$ est $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. Cet espace, introduit par John **[32]** et étudié initialement par John et Nirenberg **[33]**, est normé (modulo des constantes) par

$$
|f|_{\mathrm{BMO}} = \sup \left\{ \fint_C \left| f(x) - \fint_C f \right| dx \ ; \ C \subset \mathbb{R}^n \text{ cube} \right\}.
$$

L'espace $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ est (strictement) plus grand que $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Plus précisément, on a $L^\infty(\mathbb{R}^n)/\mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

Retour au théorème 3.3. Dans le cas particulier $p = n-1$, $q = \infty$, Brezis et Nguyen **[14]** ont obtenu l'amélioration suivante.

(18) Encore par une intégration par parties !

THÉORÈME 3.8. — *Soit* $n \geq 3$.

1) *On peut définir* Ju *via* (3) *si* $u \in W^{1,n-1} \cap \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

2) *On a*

$$|Ju(\varphi) - Jv(\varphi)| \lesssim |u-v|_{\mathrm{BMO}}(\|\nabla u\|^{n-1}_{L^{n-1}} + \|\nabla v\|^{n-1}_{L^{n-1}})\|\nabla\varphi\|_{L^\infty} \text{ [19]}. \tag{18}$$

Démonstration. — On part de (6). Le corollaire 3.7 combiné avec la dualité $\mathscr{H}^1(\mathbb{R}^n)$-$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ donne

$$\begin{aligned}|Ju(\varphi) - Jv(\varphi)| &\leq \sum_{k=1}^{n} |u^k - v^k|_{\mathrm{BMO}} \|\det(\nabla v^1, \ldots, \nabla v^{k-1}, \nabla\varphi, \nabla u^{k+1}, \ldots, \nabla u^n)\|_{\mathscr{H}^1} \\ &\lesssim |u-v|_{\mathrm{BMO}}(\|\nabla u\|^{n-1}_{L^{n-1}} + \|\nabla v\|^{n-1}_{L^{n-1}})\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

1) s'obtient de (18) en prenant $v = 0$ [20]. □

4. DÉFINITION DE Ju...

...ou l'art de l'intégration par parties[21].

Les formules (1) ou (3) permettent de définir Ju si $u \in W^{1,p} \cap L^q$, avec $\frac{n-1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ceci mène naturellement à deux questions : s'il y a un cadre commun contenant tous ces cas, et s'il est possible d'aller au-delà de ces espaces. Les réponses de Brezis et Nguyen **[14]** font appel aux espaces de Sobolev fractionnaires (ou espaces de Slobodeskii) $W^{s,p}(\Omega)$. Si $0 < s < 1$, $1 \leq p < \infty$ et Ω est borné régulier, alors ces espaces sont normés modulo les constantes par

$$|u|_{W^{s,p}} = \left(\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dxdy\right)^{1/p}.$$

THÉORÈME 4.1 (**[14]**). — *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné régulier.*

1) *On peut définir de manière robuste* Ju *pour* $u \in W^{1-1/n,n}(\Omega)$.

2) *L'espace* $W^{1-1/n,n}(\Omega)$ *est optimal.*

Traduction : l'application $u \mapsto Ju$, définie *a priori* pour $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, se prolonge par continuité + densité à tout l'espace $W^{1-1/n,n}(\Omega)$, à valeurs $\mathscr{D}'(\Omega)$. Par ailleurs, ce résultat devient faux si on remplace $W^{1-1/n,n}(\Omega)$ par un espace de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ qui n'est pas contenu dans $W^{1-1/n,n}(\Omega)$.

---

[19] Il est possible de donner une forme « locale » (sur un domaine) de ce résultat, mais ceci ne sera pas discuté ici.

[20] Si $n = 2$, la preuve ne marche plus. Par ailleurs, il n'est pas connu s'il est possible ou non de définir Ju pour $u \in W^{1,1} \cap \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^2)$.

[21] J'ai emprunté ce joli titre à Iwaniec **[29]**.

Avant de passer à la preuve, quelques commentaires. Les inégalités de Gagliardo-Nirenberg pour les espaces de Sobolev[22] donnent

$$(19) \qquad |u|_{W^{1-1/n,n}} \lesssim \|u\|_{L^q}^{1/n} \|\nabla u\|_{L^p}^{1-1/n}, \quad \forall\, u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \frac{n-1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

à l'exception notable du cas $n = 2$, $p = 1$, $q = \infty$, pour lequel cette inégalité est fausse. Ainsi, l'espace $W^{1-1/n,n}$ est contenu dans $W^{1,p} \cap L^q$ dans tous les cas où on sait définir le jacobien Ju *via* (1) (sauf le cas exceptionnel ci-dessus).

Par ailleurs, l'estimation (22) qui vient avec la preuve du théorème 4.1, combinée avec (19), permet d'affiner (4).

De même, il est possible de retrouver le théorème 3.8 à partir du théorème 4.1 et de l'inégalité suivante à la Gagliardo-Nirenberg

$$(20) \qquad |u|_{W^{1-1/n,n}} \lesssim |u|_{\mathrm{BMO}}^{1/n} \|\nabla u\|_{L^{n-1}}^{1-1/n}, \quad \forall\, u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \forall\, n \geq 3\,[23].$$

Intuitivement, une fonction de $W^{s,p}$ a s dérivées dans L^p. Il existe d'autres espaces de fonctions qui s'interprètent naturellement comme espaces de fonctions ayant un nombre fractionnaire de dérivées dans L^p : les espaces de Besov ou de Bessel (ou plus généralement de Lizorkin-Triebel). L'existence du jacobien dans les espaces de Besov a été étudiée par Youssfi **[63]** ; dans les espaces de Bessel par Sickel et Youssfi **[56, 57]**. Leurs résultats, dont les preuves sont assez sophistiquées, sont des cas particuliers du théorème 4.1.

Démonstration du théorème 4.1. — 1) La possibilité de définir Ju est encore une histoire d'intégration par parties. Le point de départ est une identité qui remonte à **[9]** (voir aussi **[27]**) : si $U \in C^1(\Omega \times (0,1); \mathbb{R}^n)$ est une extension de $u \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, et si $\Phi \in C_c^1(\Omega \times [0,1); \mathbb{R})$ est une extension de $\varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R})$, alors

$$(21) \qquad \int_\Omega \det(\nabla u)\, \varphi = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{\Omega \times (0,1)} D_k(U) \partial_k \Phi,$$

où

$$D_k(U) = (-1)^{n-k} \det(\partial_1 U, \ldots, \partial_{k-1} U, \partial_{k+1} U, \ldots, \partial_{n+1} U), \quad \forall\, k \in [\![1, n]\!],$$

et

$$D_{n+1}(U) = -\det(\partial_1 U, \ldots, \partial_n U).$$

---

[22] Dues à Gagliardo **[24]** et Nirenberg **[48]** pour le cas d'un nombre entier de dérivées, et à Jawerth **[31]** pour le cas général.

[23] Cette inégalité semble bien connue, mais est introuvable. Pour l'espace BMO remplacé par sa variante locale bmo, elle se trouve dans Jawerth **[31]**. Pour une preuve de (20), voir **[14]**.

On peut choisir Φ de sorte que $\|\nabla\Phi\|_{L^\infty} \lesssim \|\nabla\varphi\|_{L^\infty}$. Par ailleurs, la théorie des traces **[23]** permet de choisir U tel que $\|\nabla U\|_{L^n} \lesssim |u|_{W^{1-1/n,n}}$. On trouve

$$\left|\int_\Omega \det(\nabla u)\,\varphi\right| \lesssim |u|^n_{W^{1-1/n,n}}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}.$$

On conclut de manière standard, par densité.

Par ailleurs, une identité à la (5) donne

$$|Ju(\varphi) - Jv(\varphi)| \lesssim |u-v|_{W^{1-1/n,n}}(|u|^{n-1}_{W^{1-1/n,n}} + |v|^{n-1}_{W^{1-1/n,n}})\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}. \tag{22}$$

2) Dans la preuve de l'optimalité, le cas délicat est $s = 1 - 1/n$ et $p > n$ [(24)(25)]. Ce cas est traité en adaptant, au cas des espaces fractionnaires, un exemple « oscillant » classique dans l'étude du jacobien, dont l'idée remonte à Tartar et qui apparaît chez Murat [**45**, p. 252] et Ball et Murat [**5**, Counterexample 7.3]. □

Un dernier résultat pour conclure cette partie : dans les cas où Ju peut être défini *via* (1), Ju est mieux qu'une distribution « quelconque » : on a $Ju \in \operatorname{div} L^1$. Le même résultat est vrai si $u \in W^{1-1/n,n}$ **[9, 14]**. La preuve se fait ainsi : on utilise (21) avec un Φ de la forme $\Phi(x, x^{n+1}) = \varphi(x)\zeta(x^{n+1})$. Le théorème de Fubini donne

$$Ju(\varphi) = \sum_{k=1}^n \int_\Omega v^k \partial_k\varphi + \int_\Omega v^{n+1}\varphi,$$

avec $v^k \in L^1$, $k \in [\![1, n+1]\!]$. Pour conclure, il suffit d'écrire v^{n+1} comme la divergence d'un champ L^1.

5. APPLICATIONS À VALEURS DANS UNE SPHÈRE

Si $u \in C^1(\mathbb{S}^n; \mathbb{S}^n)$, alors son degré de Brouwer est donné par la formule de Kronecker

$$\deg u = \fint_{\mathbb{S}^n} \det(du) = \fint_{\mathbb{S}^n} \det(\nabla u, u). \tag{23}$$

Dans la première intégrale, u est regardée comme une application à valeurs $\mathbb{S}^n$, et le déterminant est celui d'une matrice $n \times n$; dans la deuxième, u est considérée comme une application à valeurs $\mathbb{R}^{n+1}$, et le déterminant est celui d'une matrice $(n+1) \times (n+1)$.

(24) Les autres cas se traitent essentiellement par un argument de changement d'échelle.

(25) Petite remarque au passage : on interprète $W^{s,p}$ comme un espace de fonctions ayant s dérivées dans L^p. Mais cette interprétation a ses limites. Exemple : si $p > q$, s est entier et Ω est borné, alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,q}(\Omega)$. Mais ceci est faux si s n'est pas entier **[40]**. En particulier, $W^{1-1/n,p}(\Omega) \not\hookrightarrow W^{1-1/n,n}(\Omega)$ si $p > n$.

Le thème de cette section est la façon de donner un sens à (23) ou à des quantités similaires pour des fonctions peu régulières[26]. Pour commencer : *via* (23), on peut définir de manière robuste $\deg u$ si $u \in W^{1,n}(\mathbb{S}^n; \mathbb{R}^{n+1})$. On peut faire un peu mieux si on part de la remarque suivante : si $V \in C^1(\overline{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1); \mathbb{R}^{n+1})$ est une extension de u, alors

$$\fint_{\mathbb{S}^n} \det(\nabla u, u) = \fint_{B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1)} \det(\nabla V)^{(27)}. \tag{24}$$

En prenant V une extension par moyennes de u et en utilisant la théorie des traces, (24) permet de donner une définition robuste du membre de gauche de (24) si $u \in W^{1-1/(n+1),n+1}(\mathbb{S}^n; \mathbb{R}^{n+1})$. Mais ceci n'utilise pas le fait que u est à valeurs $\mathbb{S}^n$. Nous verrons comment on peut intégrer dans les calculs l'information géométrique $|u| \equiv 1$ [28].

Commençons par le cas des fonctions continues. Dans ce cas, on sait que le degré de Brouwer est bien défini, et stable par convergence uniforme. Il est possible de voir ceci à travers une intégration par parties. L'idée qui suit remonte à **[10]**. On considère une projection approchée sur $\mathbb{S}^n$, c'est-à-dire une application $\Psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ telle que $\Psi(x) = \frac{x}{|x|}$ si $|x| \geq a > 0$. Soit $U : \overline{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1) \to \mathbb{R}^{n+1}$ une extension par moyennes de u [29]. Si $u \in C^1$, alors (24) donne

$$\deg u = \fint_{B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1)} \det(\nabla(\Psi \circ U)). \tag{25}$$

PROPOSITION 5.1 (**[39]**). — *Si $u \in C(\mathbb{S}^n; \mathbb{S}^n)$, alors $\int |\det(\nabla(\Psi \circ U))| < \infty$ et*

$$C(\mathbb{S}^n; \mathbb{S}^n) \ni u \mapsto \fint_{B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1)} \det(\nabla(\Psi \circ U))$$

est continue[30].

Démonstration. — Il existe $R = R(u) < 1$ tel que $|U(x)| \geq a$ si $|x| \geq R$. Si $|x| > R$, alors $|\Psi \circ U|^2 \equiv 1$, d'où $\det(\nabla(\Psi \circ U)(x)) = 0$. On trouve

$$\left| \fint_{B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1)} \det(\nabla(\Psi \circ U)) \right| \lesssim \int_{B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,R)} |\nabla U|^{n+1} < \infty.$$

(26) L'une des motivations est la possibilité d'entendre les singularités des applications à valeurs sphères, à l'instar de ce qui a été évoqué dans la section 2 pour les cristaux liquides. Ce point ne sera pas développé ici, mais voir, à ce sujet, **[3]** ou **[10]**.

(27) Une autre formule de Kronecker.

(28) Les résultats décrits plus loin s'adaptent en partie au cas des applications à valeurs dans une variété compacte quelconque M ; en particulier, il est possible de prendre en compte la contrainte $u(x) \in M$ p. p.

(29) On peut aussi prendre U l'extension harmonique de u.

(30) Ce résultat permet d'obtenir en quelques lignes l'existence du degré de Brouwer.

La deuxième partie s'obtient en notant que, si $u_j \to u$, alors il est possible de considérer un $R(u_j)$ indépendant de j, et que

$$L^1(\mathbb{S}^n) \ni u \mapsto U \in W^{1,n+1}_{\mathrm{loc}}(B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1))$$

est continue. □

Un cas plus délicat est celui des fonctions VMO $(\mathbb{S}^n;\mathbb{S}^n)$. L'espace VMO de Sarason [**53**] est défini comme l'adhérence de C^0 dans BMO, et est caractérisé par

$$\lim_{t\to 0} \sup \left\{ \fint_C \left| f(x) - \fint_C f \right| dx \ ; \ C \subset \mathbb{R}^n \text{ cube}, |C| \le t \right\} = 0.$$

Les applications de l'espace VMO $(\mathbb{S}^n;\mathbb{S}^n)$ ont un degré ; ceci remonte à Boutet de Monvel et Gabber [**41**, Appendix] (et aussi à Schoen et Uhlenbeck [**54**]), et l'exploration systématique des propriétés de ce degré est due à Brezis et Nirenberg [**16**]. L'existence du degré repose sur deux ingrédients :

(i) la densité de $C^1(\mathbb{S}^n;\mathbb{S}^n)$ dans VMO $(\mathbb{S}^n;\mathbb{S}^n)$;

(ii) la continuité de $u \mapsto \fint_{B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1)} \det(\nabla(\Psi \circ U))$ dans VMO $(\mathbb{S}^n;\mathbb{S}^n)$.

Dans la preuve de (i), l'ingrédient essentiel est le suivant

Proposition 5.2 ([**16**]). — *Soit $u \in$ VMO$(\mathbb{S}^n;\mathbb{S}^n)$. Soit $U : B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1) \to \mathbb{R}^{n+1}$ l'extension par moyennes de u. Alors $\lim_{|x|\to 1} |U(x)| = 1$.*

Démonstration. — Il est commode de redresser la sphère (de départ) et de supposer $U(x,t) = \fint_{B_{\mathbb{R}^n}(x,t)} u$. On a à montrer que $\lim_{t\to 0} |U(x,t)| = 1$. Ceci suit de

$$1 - |U(x,t)| = \fint_{B_{\mathbb{R}^n}(x,t)} (|u(y)| - |U(x,t)|)\, dy \le \fint_{B_{\mathbb{R}^n}(x,t)} |u(y) - U(x,t)|\, dy \to 0$$

quand $t \to 0$. □

La preuve de (ii) est une variante de celle de la proposition 5.1 [**39**].

Motivés par l'existence du degré, Brezis et Nguyen [**15**] ont étudié la possibilité de définir de manière robuste le jacobien de u en tant que distribution. Il s'agit donc d'étendre l'application

$$C^1(\mathbb{S}^n;\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto Ju(\varphi) = \int_{\mathbb{S}^n} \det(du)\varphi \tag{26}$$

au-delà de la classe $C^1(\mathbb{S}^n;\mathbb{S}^n)$. Je vais citer un seul de leurs résultats, simple à énoncer ; sa preuve va laisser deviner des résultats plus généraux.

Théorème 5.3 ([**15**]). — *Soit $n \ge 2$.*

1) *Si $n \ge 2$ et $\frac{n-1}{n} < \alpha < 1$, alors Ju est défini de manière robuste dans $C^\alpha(\mathbb{S}^n;\mathbb{S}^n)$.*

2) *Ceci n'est plus vrai dans $C^{(n-1)/n}(\mathbb{S}^n;\mathbb{S}^n)$.*

Démonstration. — 1) C'est à nouveau une question d'intégration par parties. Si V, respectivement Φ, est une extension de u, respectivement de φ, à $B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1)$, et si toutes les fonctions sont C^1, alors on a l'identité

$$Ju(\varphi) = (n+1)\int_{B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1)} \det(\nabla V)\Phi + \sum_{k=1}^{n+1}\int_{B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1)} D_k(V)\partial_k\Phi, \tag{27}$$

où

$$D_k(V) = \det(\partial_1 V, \ldots, \partial_{k-1}V, V, \partial_{k+1}V, \ldots, \partial_{n+1}V).$$

On utilise cette identité avec $V = \Psi \circ U$. D'après la proposition 5.1, la première intégrale passe à la limite en cas de convergence uniforme. Par un argument standard, on peut conclure si les autres intégrales sont contrôlées par $|u|_{C^\alpha}$. Or, ceci découle de l'inégalité

$$\left|\int_{B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1)} D_k(V)\partial_k\Phi\right| \leq \int_{B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1)} |\nabla V|^n \|\partial_k\Phi\|_{L^\infty},$$

de la théorie des traces et de l'injection $C^\alpha \hookrightarrow W^{1-1/n,n}$, valable si $\alpha > \dfrac{n-1}{n}$.

2) Le contre-exemple est semblable à celui qui sert dans la preuve du théorème 4.1. □

En examinant de plus près cette preuve, on devine que, pour $n \geq 2$, un cadre fonctionnel convenable pour définir la distribution jacobienne est $\mathrm{VMO} \cap W^{1-1/n,n}(\mathbb{S}^n;\mathbb{S}^n)$ (31). En effet, la convergence dans VMO permet de mimer la preuve de la proposition 5.1 et de passer à la limite la première intégrale dans (27). La convergence dans $W^{1-1/n.n}$ combinée avec la théorie des traces permet de passer à la limite les autres intégrales. Par ailleurs, il est possible de remplacer la convergence dans VMO par une condition plus faible assurant (avec les notations de la preuve de la proposition 5.1) l'existence d'un R indépendant de la suite (u_j). Pour plus de détails, voir [**15**, Theorem 1]. À nouveau, le résultat obtenu est essentiellement optimal : on ne peut pas affaiblir les hypothèses de convergence.

Le lecteur trouvera dans [**15**] des estimations bien plus fines ; en particulier, des estimations très délicates de la quantité $\int|\det(\nabla(\Psi\circ U))|$. Ces estimations ont comme point de départ une preuve non publiée de Bourgain [**8**, Section 4] et ont été développées dans [**11, 47**]. Avant de citer un résultat précis, donnons l'esprit de ces estimations. La théorie des traces donne, si $u \in W^{1-1/(n+1),n+1}(\mathbb{S}^n;\mathbb{S}^n)$:

$$\int_{B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1)} |\det(\nabla(\Psi\circ U))| \lesssim \int |\nabla U|^{n+1} \lesssim \iint_{\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{n+1}}{|x-y|^{2n}}\,dxdy. \tag{28}$$

Considérons le cas d'une fonction u proche, en norme L^∞, d'un point $P \in \mathbb{S}^n$. Pour une telle fonction, on a $|\Psi\circ U| \equiv 1$, et donc $\det(\nabla(\Psi\circ U)) \equiv 0$, alors que le membre

(31) Si $n = 1$, ce cadre devient $\mathrm{VMO} \cap B$, où B est l'espace de Besov $B^0_{1,1}$.

de droite de (28) peut être arbitrairement grand, car il voit les petites oscillations de u. Ceci donne l'idée qu'une bonne estimation ne doit tenir compte que des grandes oscillations de u. En voici une.

THÉORÈME 5.4 ([**11**]). — *Si* $u \in C(\mathbb{S}^n;\mathbb{S}^n)$, *alors*

$$\int_{B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1)} |\det(\nabla(\Psi \circ U))| \lesssim \iint_{|u(x)-u(y)|>1} \frac{1}{|x-y|^{2n}}\, dxdy. \tag{29}$$

La preuve de [**11**] montre qu'il est possible de remplacer la contrainte $|u(x)-u(y)|>1$ par $|u(x)-u(y)|>c$ pour tout $c<\sqrt{2}$. Mais la valeur $\sqrt{2}$ n'est pas optimale ; la valeur optimale[32] a été trouvée par Nguyen dans le très joli article [**47**].

Remerciements

L'auteur remercie H. Brezis pour des discussions stimulantes concernant [**14**], [**15**].

RÉFÉRENCES

[1] L. V. AHLFORS – Zur Theorie der Überlagerungsflächen, *Acta Math.* **65** (1935), p. 157–194.

[2] ———, *Lectures on quasiconformal mappings*, 2e éd., University Lecture Series, vol. 38, Amer. Math. Soc., 2006.

[3] G. ALBERTI, S. BALDO & G. ORLANDI – Functions with prescribed singularities, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **5** (2003), p. 275–311.

[4] J. M. BALL – Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **63** (1976/77), p. 337–403.

[5] J. M. BALL & F. MURAT – $W^{1,p}$-quasiconvexity and variational problems for multiple integrals, *J. Funct. Anal.* **58** (1984), p. 225–253.

[6] C. BENNETT – Intermediate spaces and the class $L\log^{+L}$, *Ark. Mat.* **11** (1973), p. 215–228.

[7] C. BENNETT & K. RUDNICK – On Lorentz-Zygmund spaces, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* **175** (1980).

[8] J. BOURGAIN, H. BREZIS & P. MIRONESCU – Complements to the paper « Lifting, degree and the distributional Jacobian revisited » , `http://math.univ-lyon1.fr/~mironescu/2.pdf`, 2004.

[9] ———, $H^{1/2}$ maps with values into the circle : minimal connections, lifting, and the Ginzburg-Landau equation, *Publ. Math. IHÉS* **99** (2004), p. 1–115.

(32) Cette valeur est $\sqrt{2+\frac{2}{n+1}}$.

[10] ———, Lifting, degree, and distributional Jacobian revisited, *Comm. Pure Appl. Math.* **58** (2005), p. 529–551.

[11] J. Bourgain, H. Brezis & H.-M. Nguyen – A new estimate for the topological degree, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **340** (2005), p. 787–791.

[12] H. Brezis, J.-M. Coron & E. H. Lieb – Harmonic maps with defects, *Comm. Math. Phys.* **107** (1986), p. 649–705.

[13] H. Brezis, N. Fusco & C. Sbordone – Integrability for the Jacobian of orientation preserving mappings, *J. Funct. Anal.* **115** (1993), p. 425–431.

[14] H. Brezis & H.-M. Nguyen – The Jacobian determinant revisited, à paraître dans *Invent. Math.*

[15] ———, On the distributional Jacobian of maps from $\mathbb{S}^N$ into $\mathbb{S}^N$ in fractional Sobolev and Hölder spaces, à paraître dans *Ann. Math.*

[16] H. Brezis & L. Nirenberg – Degree theory and BMO. I. Compact manifolds without boundaries, *Selecta Math. (N.S.)* **1** (1995), p. 197–263.

[17] R. Coifman, P.-L. Lions, Y. Meyer & S. Semmes – Compensated compactness and Hardy spaces, *J. Math. Pures Appl.* **72** (1993), p. 247–286.

[18] B. Dacorogna & F. Murat – On the optimality of certain Sobolev exponents for the weak continuity of determinants, *J. Funct. Anal.* **105** (1992), p. 42–62.

[19] H. Federer – *Geometric measure theory*, Die Grund. Math. Wiss., Band 153, Springer New York Inc., New York, 1969.

[20] C. Fefferman – Characterizations of bounded mean oscillation, *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971), p. 587–588.

[21] A. Fletcher & V. Markovic – *Quasiconformal maps and Teichmüller theory*, Oxford Graduate Texts in Math., vol. 11, Oxford Univ. Press, 2007.

[22] F. C. Frank – On the theory of liquid crystals, *Discuss. Faraday Soc.* **25** (1958).

[23] E. Gagliardo – Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **27** (1957), p. 284–305.

[24] ———, Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili, *Ricerche Mat.* **8** (1959), p. 24–51.

[25] P.-G. de Gennes & J. Prost – *The physics of liquid crystals*, Intern. Series of Monographs in Physics, Oxford Univ. Press, 1993.

[26] H. Grötzsch – Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. I, II, *Berichte Leipzig* **80** (1928), p. 367–376, 497–502.

[27] F. Hang & F. Lin – A remark on the Jacobians, *Commun. Contemp. Math.* **2** (2000), p. 35–46.

[28] T. Iwaniec – p-harmonic tensors and quasiregular mappings, *Ann. of Math.* **136** (1992), p. 589–624.

[29] ———, Null Lagrangians, the art of integration by parts, in *The interaction of analysis and geometry*, Contemp. Math., vol. 424, Amer. Math. Soc., 2007, p. 83–102.

[30] T. Iwaniec & C. Sbordone – On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses, *Arch. Rational Mech. Anal.* **119** (1992), p. 129–143.

[31] B. Jawerth – Some observations on Besov and Lizorkin-Triebel spaces, *Math. Scand.* **40** (1977), p. 94–104.

[32] F. John – Rotation and strain, *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961), p. 391–413.

[33] F. John & L. Nirenberg – On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961), p. 415–426.

[34] A. Korn – Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas où les efforts sont donnés à la surface, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.* **10** (1908), p. 165–269.

[35] ———, Über einige Ungleichungen, welche in der Theorie der elastischen und elektrischen Schwingungen eine Rolle spielen, *Bulletin International, Cracovie Akademie Umiejet, Classe des sciences mathématiques et naturelles* (1909), p. 705–724.

[36] M. A. Lavrent'ev – Sur une classe de représentations continues, *Mat. Sb.* **42** (1935), p. 407–424.

[37] ———, Sur un critère différentiel des transformations homéomorphes des domaines à trois dimensions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **20** (1938), p. 241–242.

[38] J. Mawhin – Communication personnelle.

[39] P. Mironescu – Sobolev maps on manifolds : degree, approximation, lifting, in *Perspectives in nonlinear partial differential equations*, Contemp. Math., vol. 446, Amer. Math. Soc., 2007, p. 413–436.

[40] P. Mironescu & W. Sickel – En préparation.

[41] A. Boutet de Monvel-Berthier, V. Georgescu & R. Purice – A boundary value problem related to the Ginzburg-Landau model, *Comm. Math. Phys.* **142** (1991), p. 1–23.

[42] C. B. Morrey, Jr. – *Multiple integrals in the calculus of variations*, Grundl. Math. Wiss., vol. 130, Springer New York, Inc., New York, 1966.

[43] S. Müller – Higher integrability of determinants and weak convergence in L^1, *J. reine angew. Math.* **412** (1990), p. 20–34.

[44] F. Murat – Compacité par compensation, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **5** (1978), p. 489–507.

[45] ———, Compacité par compensation. II, in *Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis (Rome, 1978)*, Pitagora, 1979, p. 245–256.

[46] ———, Compacité par compensation : condition nécessaire et suffisante de continuité faible sous une hypothèse de rang constant, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **8** (1981), p. 69–102.

[47] H.-M. Nguyen – Optimal constant in a new estimate for the degree, *J. Anal. Math.* **101** (2007), p. 367–395.

[48] L. Nirenberg – On elliptic partial differential equations, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **13** (1959), p. 115–162.

[49] C. W. Oseen – Beiträge zur Theorie anisotroper Flüssigkeiten, *Arkiv för matematik, astronomi och fysik* **19A** (1925), p. 1–19.

[50] J. G. Rešetnjak – Estimates of the modulus of continuity for certain mappings, *Sibirsk. Mat. Ž.* **7** (1966), p. 1106–1114.

[51] ———, Mappings with bounded distortion as extremals of integrals of Dirichlet type, *Sibirsk. Mat. Ž.* **9** (1968), p. 652–666.

[52] Y. G. Reshetnyak – *Space mappings with bounded distortion*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 73, Amer. Math. Soc., 1989.

[53] D. Sarason – Functions of vanishing mean oscillation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **207** (1975), p. 391–405.

[54] R. Schoen & K. Uhlenbeck – A regularity theory for harmonic maps, *J. Differential Geom.* **17** (1982), p. 307–335.

[55] ———, Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps, *J. Differential Geom.* **18** (1983), p. 253–268.

[56] W. Sickel & A. Youssfi – The characterisation of the regularity of the Jacobian determinant in the framework of potential spaces, *J. London Math. Soc.* **59** (1999), p. 287–310.

[57] ———, The characterization of the regularity of the Jacobian determinant in the framework of Bessel potential spaces on domains, *J. London Math. Soc.* **60** (1999), p. 561–580.

[58] E. M. Stein – Note on the class $L \log L$, *Studia Math.* **32** (1969), p. 305–310.

[59] E. M. Stein & G. Weiss – On the theory of harmonic functions of several variables. I. The theory of H^p-spaces, *Acta Math.* **103** (1960), p. 25–62.

[60] L. Tartar – Compensated compactness and applications to partial differential equations, in *Nonlinear analysis and mechanics : Heriot-Watt Symposium, Vol. IV*, Res. Notes in Math., vol. 39, Pitman, 1979, p. 136–212.

[61] ———, The compensated compactness method applied to systems of conservation laws, in *Systems of nonlinear partial differential equations (Oxford, 1982)*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 111, Reidel, 1983, p. 263–285.

[62] ———, Remarks on oscillations and Stokes' equation, in *Macroscopic modelling of turbulent flows (Nice, 1984)*, Lecture Notes in Phys., vol. 230, Springer, 1985, p. 24–31.

[63] A. Youssfi – Bilinear operators and the Jacobian-determinant on Besov spaces, *Indiana Univ. Math. J.* **45** (1996), p. 381–396.

Petru MIRONESCU

Institut Camille Jordan
Université Claude Bernard Lyon 1
Bâtiment Braconnier
21, avenue Claude Bernard
F–69622 Villeurbanne Cedex
E-mail : `mironescu@math.univ-lyon1.fr`