Astérisque

CLAIRE VOISIN

Sections rationnelles de fibrations sur les surfaces et conjecture de Serre [d'après de Jong, He et Starr]

Astérisque, tome 348 (2012), Séminaire Bourbaki, exp. n° 1038, p. 317-337

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2012__348__317_0>

Séminaire BOURBAKI Avril 2011
63e année, 2010-2011, n° 1038, p. 317 à 337

SECTIONS RATIONNELLES DE FIBRATIONS SUR LES SURFACES ET CONJECTURE DE SERRE [d'après de Jong, He et Starr]

par Claire VOISIN

INTRODUCTION

Soit $f : X \to B$ un morphisme surjectif, où X et B sont des variétés projectives lisses définies sur un corps algébriquement clos k. La fibre générique X_η est une variété projective définie sur le corps de fonctions $K = k(B)$. Concrètement, donnons-nous un plongement $X \subset B \times \mathbb{P}^N$. Au-dessus d'un ouvert affine dense U de B, les équations définissant X sont des polynômes homogènes P_i en les variables $X_0, \ldots, X_N$ à coefficients dans l'anneau de fonctions polynomiales $k[U]$. Alors X_η est la sous-variété de $\mathbb{P}^N_K$ définie par les mêmes équations P_i, vues dans $K[X_0, \ldots, X_N]$, K étant par définition le corps de fractions de $k[U]$. Cette fibre générique est lisse sur K si le corps k est de caractéristique zéro. Les K-points de X_η, c'est-à-dire, dans les notations précédentes, les $N+1$-uplets $(l_0, \ldots, l_N)$ non identiquement nuls d'éléments de K solutions des équations $P_i(l_0, \ldots, l_N) = 0$ (considérés à homothétie près), correspondent bijectivement aux sections *rationnelles* $\sigma : B \dashrightarrow X$ de f. Lorsque la base B est une courbe lisse, tout morphisme rationnel $B \dashrightarrow Y$, où Y est projective, est en fait un morphisme, et donc les K-points sont les sections de f. Cette traduction élémentaire met en relation des problèmes de nature diophantienne d'une part (trouver des solutions d'équations polynomiales sur un corps non algébriquement clos) et de nature géométrique d'autre part (construire une section (rationnelle) d'un morphisme).

Lorsque le corps k est le corps des nombres complexes, on peut aborder le versant géométrique du problème par des méthodes topologiques ou de théorie de Hodge, et ceci permet de décrire des obstructions explicites à l'existence de sections, comme on le verra dans le paragraphe 1.2. Dans certains cas, et même lorsque la base est une courbe, non seulement il n'existe pas de sections, mais encore le PGCD des degrés des multisections rationnelles (ou encore l'indice de la fibre générique, cf. paragraphe 1.2) ne vaut pas 1, et pourtant toutes ces obstructions s'annulent.

Ce type de problème peut être considéré en particulier pour des fibrations localement triviales, où « localement » signifie pour la topologie étale. La trivialité locale signifie donc que la fibration devient triviale sur des revêtements étales d'ouverts de Zariski de la base. En particulier on peut considérer les torseurs sous des groupes, qui géométriquement sont des fibrations admettant une action d'un groupe ou d'un schéma en groupe sur la base qui deviennent triviales (c'est-à-dire isomorphes au produit $B \times G$ ou au schéma en groupes en question) dès qu'elles ont une section. Même si le groupe G est connexe, on peut aisément construire de tels torseurs localement triviaux pour la topologie étale mais non dans la topologie de Zariski (voir paragraphe 1.2). La non-trivialité locale dans la topologie de Zariski est dans ce cas équivalente à la non existence d'une section rationnelle, ou encore d'un K-point de la fibre générique.

Pour obtenir des exemples projectifs, on considère certaines fibrations en variétés homogènes correspondant à ces G-torseurs. On verra en fait dans le paragraphe 3.1 que la trivialité d'un G-torseur peut souvent se ramener à l'existence d'une section (ou point rationnel) d'une famille de variétés homogènes projectives associée, par un argument classique de réduction du groupe structurel. Les exemples typiques sont donnés par les variétés de Brauer-Severi, qui sont des fibrés en espaces projectifs localement triviaux pour la topologie étale, mais n'admettent pas de sections rationnelles, et en particulier, ne sont pas obtenues en projectifiant un fibré vectoriel algébrique. Ce sont des fibrations en variétés homogènes associées à des G-torseurs, où $G = PGl_n$ (cf. **[3]**). Les variétés de Brauer-Severi non triviales n'existent pas sur les courbes (cf. **[12]**). Elles existent en abondance sur les surfaces, comme le montre le calcul explicite du groupe de Brauer (cf. paragraphe 1.2). Dans **[20]**, Serre conjecture la trivialité des G-torseurs sur les corps de fonctions de surfaces définies sur un corps algébriquement clos lorsque le groupe algébrique G est connexe, semi-simple et simplement connexe. Cette conjecture a été montrée dans de nombreux cas (cf. **[9]**) par des méthodes de cohomologie galoisienne et de classification des groupes. L'une des contributions de l'article **[14]** de de Jong, He et Starr décrit ici est d'une part de compléter la démonstration (cf. paragraphe 3.1) et d'autre part de donner une approche totalement différente, complètement géométrique, du problème.

La trivialité des variétés de Brauer-Severi sur les courbes n'est qu'une partie d'une série d'énoncés (**[11]**, **[10]**) de généralité croissante (cf. section 1.2) concernant l'existence de sections rationnelles de morphismes projectifs $f : X \to B$ avec B lisse. Le théorème suivant concernant le cas des familles d'intersections complètes est dû à Tsen et Lang (cf. **[11]**) :

THÉORÈME 0.1. — *Toute intersection de r hypersurfaces $Y_1, \dots, Y_r$ de degrés respectifs $d_1, \dots, d_r$ dans $\mathbb{P}^n_K$, $K = k(B)$, possède un K-point si k est algébriquement clos et $\sum_{i=1}^r d_i^d \leq n$, où $d = \dim B$.*

Lorsque la base est une courbe, c'est-à-dire $d = 1$, la condition numérique $\sum_{i=1}^r d_i \leq n$ est équivalente au fait que les fibres sont des variétés de Fano, à supposer qu'elles soient lisses. Le théorème a été généralisé dans ce cas par Graber, Harris, Starr (voir théorème 1.3) sur $\mathbb{C}$, puis par de Jong et Starr en caractéristique p [**15**]. Le théorème 1.3 énonce l'existence d'une section pour toute famille de variétés rationnellement connexes (cf. 1.1) sur une courbe lisse, ce qui montre aussi de façon inattendue l'absence de toute obstruction cohomologique à l'existence d'une section, et entre autres l'absence de fibres multiples pour une telle fibration.

Le principal résultat de [**14**] fournit des conditions sur la fibre générale d'un morphisme projectif surjectif $f : X \to B$, où X est muni d'un fibré en droites relativement ample L, et B est une *surface* lisse sur $\mathbb{C}$ (ou n'importe quel corps algébriquement clos de caractéristique 0), garantissant l'existence d'une section rationnelle de f.

THÉORÈME 0.2. — *Si la fibre générale X_b de f satisfait :*

(i) *il existe un entier n tel que la famille $B_{n,x,y}$ paramétrant les « chaînes de n droites libres » joignant x à y dans X_b soit non vide et rationnellement connexe pour x, y généraux dans X_b. De plus, pour un point général $x \in X_b$, la variété des droites de X_b passant par x est rationnellement connexe ;*

(ii) *la variété X_b (polarisée par $L_b = L_{|X_b}$) possède une surface réglée « très tordue »,*

alors f admet une section.

Dans la condition (i), les droites sont dites libres si leur fibré normal dans la fibre X_b est engendré par ses sections globales. Cette condition est automatiquement satisfaite si les fibres X_b sont des variétés homogènes.

On renvoie au paragraphe 2.3 pour un énoncé précis de la condition (ii). Elle dit qu'il existe un morphisme $\phi : \Sigma \to X_b$ où Σ est une surface fibrée en droites sur $\mathbb{P}^1$, c'est-à-dire admet un morphisme $\pi : \Sigma \to \mathbb{P}^1$ dont les fibres Σ_t sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$ et satisfont $\deg \phi^* L_{|\Sigma_t} = 1$, tel que le fibré normal du morphisme (ϕ, π) de Σ dans $X_b \times \mathbb{P}^1$ soit suffisamment positif.

Le rôle de la condition (i) dans la démonstration est facile à voir (cf. paragraphe 2.2). La condition (ii) est plus difficile à comprendre (cf. paragraphe 2.3). Néanmoins l'optimalité du théorème de Tsen-Lang (cf. [**11**]) montre qu'il existe des familles d'hypersurfaces cubiques dans $\mathbb{P}^8$ paramétrées par une surface et ne possédant pas de section rationnelle. Or, si X est une hypersurface cubique lisse dans $\mathbb{P}^8$ et x, $y \in X$ deux points généraux, la variété des droites de X passant par x est une variété de

Fano (c'est l'intersection complète d'une quadrique et d'une cubique dans $\mathbb{P}^6$), et il n'est pas difficile de montrer que la variété paramétrant les chaînes de deux droites joignant x à y dans X est aussi une variété de Fano. Donc la condition (i) est satisfaite par les hypersurfaces cubiques de $\mathbb{P}^8$ et on conclut que la condition (i) seule n'est pas suffisante pour garantir l'existence de sections.

L'application du théorème 0.2 à la conjecture de Serre est obtenue en montrant que les variétés homogènes $X = G/P$ avec $\rho(X) = 1$ satisfont les conditions (i) et (ii).

Remerciements

Je remercie Jean-Louis Colliot-Thélène, Jason Starr, et Olivier Wittenberg pour leurs commentaires qui m'ont permis d'améliorer une version antérieure de ce texte.

1. EXISTENCE ET NON-EXISTENCE DE SECTIONS RATIONNELLES

1.1. Variétés rationnellement connexes

Les variétés rationnellement connexes ont été introduites par Kollár, Miyaoka et Mori dans [**19**]. On renvoie à [**8**], [**17**] pour plus de détails concernant cette sous-partie. Ces variétés sont caractérisées de la façon suivante :

DÉFINITION 1.1. — *Une variété projective lisse Z définie sur un corps algébriquement clos k est dite rationnellement connexe si pour toute paire de points x, $y \in X(k)$, il existe des morphismes $\phi_i : \mathbb{P}^1 \to X$, $i = 1, \ldots, n$ et des points p_i, $q_i \in \mathbb{P}^1$ tels que $\phi_i(q_i) = \phi_{i+1}(p_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n-1$ et $\phi_1(p_1) = x$, $\phi_n(q_n) = y$.*

Remarque 1.2. — En caractéristique 0, il y a d'autres caractérisations des variétés rationnellement connexes (cf. [**8**]), dont l'existence d'une courbe rationnelle $\phi : \mathbb{P}^1 \to X$ très libre, c'est-à-dire telle que $\phi^* T_X$ soit un fibré ample sur $\mathbb{P}^1$. C'est cette dernière définition (dite de connexité rationnelle séparable) qu'il faut adopter en caractéristique non nulle. Comme le théorème principal de l'article [**14**] n'est pas démontré en caractéristique non nulle, ceci n'est pas important pour ce texte.

Les données ci-dessus, modulo les automorphismes fixant p_1 et q_n de la courbe rationnelle obtenue en recollant n copies de $\mathbb{P}^1$ via les identifications $q_i = p_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, forment ce que l'on appelle une « chaîne de courbes rationnelles » joignant x à y. Si la variété Z est munie d'un fibré en droites ample L, et que les morphismes ϕ_i satisfont $\deg \phi_i^* L = d$, on parlera de chaînes de courbes rationnelles de degré d. Si $d = 1$ on parlera de chaînes de droites. Si le fibré en question est très ample, c'est-à-dire est la restriction du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ via un plongement de Z dans

$\mathbb{P}^r$, les morphismes $\phi_i : \mathbb{P}^1 \to Z$ tels que $\deg \phi_i^* L = 1$ sont les identifications de $\mathbb{P}^1$ avec une droite de $\mathbb{P}^r$ contenue dans Z. Lorsque le fibré L n'est pas très ample (par exemple le fibré $p^* \mathcal{O}(1)$ sur un revêtement ramifié cyclique $p : Z \to \mathbb{P}^r$ de degré k dont l'hypersurface de ramification est de degré $> k$), cette terminologie de « droites » est abusive. Néanmoins le fait de considérer des courbes rationnelles de degré 1 garantit que les courbes $\phi_i(\mathbb{P}^1)$ ne peuvent pas dégénérer sur l'union de deux courbes, ce qui est la propriété essentielle des droites : elles ne dégénèrent pas. Dans cet exposé, on supposera que le fibré L est très ample, ce qui facilite grandement la présentation. On pourra de ce fait parler de « variétés de droites dans X » ou de « variétés de chaînes de droites dans X », comme étant des sous-variétés de grassmanniennes de droites dans $\mathbb{P}^r$, ou des sous-variétés localement fermées de produits de telles grassmanniennes.

Des exemples très importants de variétés rationnellement connexes sont donnés en caractéristique 0 par les variétés de Fano ([**2**], [**18**], [**7**]), c'est-à-dire à fibré anticanonique ample. Par exemple les hypersurfaces $Z \subset \mathbb{P}^r$ lisses de degré $\leq r$ sont de Fano et donc rationnellement connexes (ce qui est très facile à voir dans ce cas). Le théorème suivant de Graber, Harris et Starr (dû à de Jong et Starr en caractéristique non nulle) généralise donc en caractéristique 0 le théorème de Tsen-Lang (théorème 0.1) :

THÉORÈME 1.3 ([**10**], [**15**]). — *Tout morphisme surjectif $\phi : Z \to B$ entre variétés projectives définies sur un corps algébriquement clos, où Z est lisse, B est une courbe lisse, et dont la fibre générale est lisse rationnellement connexe (séparablement rationnellement connexe en caractéristique non nulle), admet une section.*

Ce théorème montre a fortiori l'annulation sous ces hypothèses des éventuelles obstructions de nature cohomologique ou locale, décrites dans le paragraphe suivant, à l'existence d'une section.

1.2. Obstructions à l'existence de sections ; calcul de l'indice

On se placera ici dans le cas de fibrations $X \to B$, où X et B sont projectives lisses définies sur $\mathbb{C}$. Comme dans l'introduction, les sections rationnelles peuvent être pensées en termes de $\mathbb{C}(B)$-points de la fibre générique, mais on veut ici tirer parti de la topologie pour décrire des obstructions à l'existence de sections rationnelles. En fait, les obstructions qu'on décrira ici sont plutôt des obstructions à l'existence de multisections $B_i \subset X$, avec $\deg B_i/B = m_i$, les m_i étant premiers entre eux. On renvoie à [**5**] pour une discussion similaire dans le contexte de la cohomologie étale.

Dans la terminologie des K-points, les B_i déterminent des points de X_η définis sur K_i, où $K_i = \mathbb{C}(B_i)$ et le degré d'un tel point sur $K = \mathbb{C}(B)$ est défini comme le degré de l'extension algébrique $K \subset K_i$. C'est aussi le degré sur B de la multisection B_i. L'indice $I(X_\eta)$ étant défini comme le PGCD des degrés de K_i sur K, où K_i est une extension finie de K sur laquelle il existe un point rationnel de X_η, on peut traduire (cf. **[21]**) la question précédente sous la forme :

Décrire des obstructions à ce que $I(X_\eta) = 1$.

Notons qu'il existe des exemples où il n'existe pas de sections mais où l'indice de la fibre générique vaut 1 (cf. **[22]**), ce qui montre que les deux problèmes (existence de sections rationnelles, ou encore de K-points, et indice 1) ne sont pas équivalents. On renvoie à **[9]** pour une discussion de ce fait dans le cas des G-torseurs.

L'obstruction la plus simple est de nature locale, et provient de l'existence de fibres multiples. Supposons que la base B soit de dimension 1. S'il existe une section de f, pour tout point b de B, la fibre X_b admet au moins une composante réduite (celle par laquelle passe la section). Si l'indice de X_η vaut 1, pour tout point b de B, le PGCD des multiplicités des composantes de la fibre X_b vaut 1.

L'obstruction la plus simple suivante est de nature topologique (et généralise en fait la précédente). Elle est donnée par le critère suivant (où l'on considère l'homologie ou la cohomologie de Betti des variétés complexes associées) :

LEMME 1.4. — *Si $I(X_\eta) = 1$, l'application $f_* : H_{2d}(X, \mathbb{Z}) \to H_{2d}(B, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, où $d = \dim B$, est surjective.*

En effet pour chaque multisection $j_i : B_i \to X$ de degré m_i au-dessus de B, la classe d'homologie $[B_i] := j_{i*}[B_i]_{\text{fond}} \in H_{2d}(X, \mathbb{Z})$ satisfait $f_*[B_i] = m_i[B]_{\text{fond}}$.

Cette obstruction purement topologique est non triviale dans certains exemples de variétés de Brauer-Severi donnés par des fibrés $X \to B$ de fibre isomorphe à $\mathbb{P}^1$ (cf. exemple 1.7). Le calcul de la flèche $f_* : H_{2d}(X, \mathbb{Z}) \to H_{2d}(B, \mathbb{Z})$ ou encore, par dualité de Poincaré, du morphisme de Gysin $f_* : H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^0(B, \mathbb{Z})$ est fort simple car la suite spectrale de Leray de f est sphérique, avec $R^i f_* \mathbb{Z} = 0$, pour $i \neq 0$, 2 et

$$R^0 f_* \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z},\ R^2 f_* \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}.$$

La suite spectrale de Leray est donc dégénérée en E_3 et fournit une suite exacte longue :

$$\ldots H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_*} H^0(B, \mathbb{Z}) \xrightarrow{d_3} H^3(B, \mathbb{Z}) \ldots.$$

Ainsi l'obstruction topologique donnée par le lemme 1.4 à ce que $I(X_\eta) = 1$ vit dans $H^3(B, \mathbb{Z})$ et c'est en fait un élément de 2-torsion, vu que le fibré canonique relatif $K_{X/\mathbb{P}^1}$ est de degré -2 sur les fibres, ce qui garantit l'existence de multisections de degré 2 au-dessus de B.

Une obstruction plus fine, car faisant intervenir non seulement les groupes de cohomologie mais aussi leurs structures de Hodge, vient de la théorie de Hodge :

LEMME 1.5. — *Si $I(X_\eta) = 1$, l'application $f_* : Hdg_{2d}(X, \mathbb{Z}) \to Hdg_{2d}(B, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, où $d = \dim B$, est surjective.*

Ici on utilise la décomposition de Hodge sur $H_{2d}(X,\mathbb{C}) \cong H^{2n-2d}(X,\mathbb{C})$, $n = \dim X$, et on définit $Hdg_{2d}(X,\mathbb{Z})$ comme l'ensemble des classes de cohomologie entière de degré $2n-2d$ qui sont de type $(n-d, n-d)$ dans la décomposition de Hodge. Le lemme 1.5 résulte immédiatement du fait que, pour chaque multisection B_i de f, la classe $[B_i]$ est dans le sous-groupe $Hdg_{2d}(X,\mathbb{Z})$.

Ce lemme permet entre autres de décrire de façon plus fine les obstructions de type Brauer (cf. [**12**]) : dans l'exemple ci-dessus des fibrés en $\mathbb{P}^1$, on s'intéresse maintenant à l'image de $f_* : Hdg^2(X,\mathbb{Z}) \to H^0(B,\mathbb{Z})$. Supposant qu'on a la surjectivité de la flèche $f_* : H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^0(B,\mathbb{Z})$, on dispose d'une classe entière $a \in H^2(X,\mathbb{Z})$ telle que $f_*a = 1_B$. Cette classe a est définie à $f^*H^2(B,\mathbb{Z})$ près. Comme le groupe $H^2(X,\mathbb{Z})/Hdg^2(X,\mathbb{Z})$ s'envoie injectivement dans $H^2(X,\mathcal{O}_X) = H^2(B,\mathcal{O}_B)$, l'obstruction est donc la classe $\overline{a} \in H^2(B,\mathcal{O}_B)/H^2(B,\mathbb{Z})$. C'est la partie non topologique de la classe de Brauer, c'est-à-dire de l'obstruction à ce que $I(X_\eta) = 1$. Notons que, dans ce cas, le lemme 1.5 décrit entièrement la classe de Brauer, du fait que la conjecture de Hodge est satisfaite par les classes de Hodge entières de degré 2, de sorte que $Hdg^2(X,\mathbb{Z})$ est bien l'ensemble des classes de diviseurs de X.

Remarque 1.6. — La description donnée ci-dessus de l'obstruction à la trivialité d'une variété de Brauer-Severi fibrée en $\mathbb{P}^1$ est valable en fait pour les variétés de Brauer-Severi de toute dimension. Ceci est dû au fait que pour une variété X définie sur un corps K, et isomorphe à $\mathbb{P}^n$ sur $\overline{K}$, l'existence d'un point $x \in X(k)$ est équivalente à l'existence d'un fibré en droites L sur X défini sur K tel que $L_{\overline{K}}$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$.

Exemple 1.7. — Prenons une surface d'Enriques Σ. Il existe un élément de 2-torsion dans $H^3(\Sigma,\mathbb{Z})$ qui détermine canoniquement, du fait que $H^2(\Sigma,\mathcal{O}_\Sigma) = 0$, une fibration $P \to \Sigma$ en $\mathbb{P}^1$ sur Σ, dont la fibre générique est d'indice 2 sur $\mathbb{C}(\Sigma)$. (L'existence de cette variété de Brauer-Severi fibrée en $\mathbb{P}^1$ est par exemple une conséquence du travail de de Jong [**13**], voir [**3**, Théorème 3.13].) Sa classe de Brauer est non triviale et correspond à l'obstruction fournie par le lemme 1.4. Considérons maintenant le revêtement universel (étale de degré 2) $p : S \to \Sigma$, où S est une surface $K3$. L'image inverse $P_S \to S$ a maintenant une classe topologique de Brauer triviale car $H^3(S,\mathbb{Z})$ est nul. Pour décider si P_S admet une section rationnelle ou non, il faut appliquer le critère 1.5, et il est montré dans [**1**] que la réponse dépend en fait de la surface d'Enriques considérée.

Pour les classes de Hodge de degré ≥ 4, on dispose de nombreux contre-exemples à la conjecture de Hodge pour les classes entières (cf. [**23**] pour une obstruction calculable topologiquement, [**16**] pour des exemples beaucoup plus mal compris). De ce fait, le lemme 1.5 ne fournit pas une condition nécessaire et suffisante pour que l'indice soit égal à 1 (cf. exemple 1.8). On renvoie à **[6]** pour une discussion de la relation, reposant sur le lemme 1.5, entre défaut de la conjecture de Hodge pour les classes entières et indice pour des familles de variétés sur une courbe dont les fibres X_t satisfont $H^i(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 0$, $i > 0$. Notons que pour les variétés X uniréglées (c'est-à-dire balayées par des courbes rationnelles) de dimension 3, la conjecture de Hodge est vraie pour les classes entières de degré 4 d'après **[24]**. Ainsi, si on combine les résultats de **[6]** et **[24]**, on conclut que $I(X_\eta) = 1$, lorsque $f : X \to B$ est un morphisme surjectif à fibre générale rationnellement connexe, B est une courbe lisse, et X est de dimension 3. Ceci est bien entendu impliqué par le théorème 1.3, mais l'argument ci-dessus est cohomologique.

Pour conclure, mentionnons l'exemple suivant, où la condition du lemme 1.5 est satisfaite sans que l'indice soit égal à 1, et qui montre aussi que les théorèmes 0.1, 1.3 et le théorème mentionné plus haut de **[24]** sont optimaux :

Exemple 1.8. — Soit $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ une hypersurface très générale en modules de bidegré $(3,4)$. Notons $f : X \to \mathbb{P}^1$ la restriction à X de la première projection. Alors pour toute courbe $C \subset X$, $f_{|C} : C \to \mathbb{P}^1$ est de degré pair. De façon équivalente, l'indice $I(X_\eta)$ est divisible par 2.

Lorsqu'on suppose que la base est de dimension 2, les exemples donnés ci-dessus de variétés de Brauer-Severi non triviales montrent qu'il peut y avoir des obstructions non nulles de nature cohomologique, même avec une fibre des plus simples (comme $\mathbb{P}^1$) à l'existence d'une section rationnelle. Le théorème 0.2 fournit des conditions garantissant l'existence d'une section rationnelle. Ces conditions ne portent pas seulement sur la fibre, du fait que l'existence globale du fibré en droites L sur X entre également dans les hypothèses. En effet il est crucial pour la preuve du théorème 0.2 de pouvoir travailler avec des « droites » dans les fibres (cf. paragraphe 1.1). Comme le montre clairement l'exemple des variétés de Brauer-Severi, l'existence globale de ce fibré L se restreignant au générateur du groupe de Picard des fibres X_t est en fait une hypothèse d'annulation pour une obstruction de type Brauer.

1.3. Conjecture de Serre II

La conjecture énonce la trivialité des G-torseurs sur un corps K parfait de dimension cohomologique ≤ 2, lorsque le groupe G est connexe, semi-simple et simplement connexe.

DÉFINITION 1.9. — *Soit K un corps et soit G un groupe sur K. Un G-torseur est une variété T définie sur K sur laquelle G agit, de façon que pour toute extension L de K et tout point $t \in T(L)$, le morphisme $G_L \to T_L$, $g \mapsto g \cdot t$ soit un isomorphisme.*

Les classes d'isomorphisme de G-torseurs sont décrites par les classes de cohomologie galoisienne $H^1(K, G)$. Ainsi la conjecture de Serre peut-elle être formulée comme une conjecture d'annulation de cohomologie galoisienne, bien que cela ne joue aucun rôle dans le travail **[14]** :

CONJECTURE 1.10 (**[20]**). — *Toute classe de cohomologie galoisienne $\alpha \in H^1(K, G)$ est triviale pour un groupe G semi-simple simplement connexe sur un corps parfait K de dimension cohomologique ≤ 2.*

La dimension cohomologique du corps K est l'entier d minimal tel que $H^i(L, \mathbb{Z}/l) = 0$ pour tout nombre premier l, pour tout $i \geq d+1$, et pour toute extension finie L de K. Les corps de fonctions $K = k(S)$ de surfaces sur un corps algébriquement clos k sont de dimension cohomologique 2. Lorsque $k = \mathbb{C}$, cela résulte du fait que toute variété affine U de dimension 2 sur $\mathbb{C}$ a le type d'homotopie d'un CW complexe de dimension ≤ 2. En effet, la cohomologie de Betti de U à valeurs dans $\mathbb{Z}/l$, et donc aussi sa cohomologie étale, s'annulent donc en degré ≥ 3. La cohomologie galoisienne de K à valeurs dans $\mathbb{Z}/l$ est la limite directe des cohomologies étales des ouverts affines U de S à valeurs dans $\mathbb{Z}/l$, d'où la conclusion.

On renvoie à **[9]** pour une description approfondie des principales contributions à cette conjecture. Dans les paragraphes 3.1 et 3.2, on expliquera comment le théorème 0.2 permet de compléter la preuve de la conjecture de Serre pour les corps de fonctions de surfaces. Dans le cas où le corps K est un corps de fonctions $k(B)$, où k est algébriquement clos, le groupe G correspond à un schéma en groupes $\mathcal{G} \to U$ sur un ouvert de Zariski de B. Il est plus facile d'étudier les G-torseurs lorsque $\mathcal{G}$ est défini sur k, i.e. $\mathcal{G} = G_k \times U$. Le groupe G_k agit en effet dans ce cas sur chaque $\mathcal{G}$-torseur $\mathcal{T}$, et, choisissant un sous-groupe de Borel $H \subset G_k$, on peut construire à partir d'un tel $\mathcal{T}$ un quotient $\mathcal{T}/H$ défini sur $k(B)$. C'est a priori seulement à cette situation que s'applique le travail **[14]**, mais il se trouve qu'en combinant le résultat dans le cas où le schéma en groupes est trivial et les résultats de **[4]**, un argument astucieux expliqué dans l'introduction de **[14]** permet de conclure la preuve de la conjecture de Serre pour les corps de fonctions de surfaces.

THÉORÈME 1.11. — *Soit k un corps algébriquement clos. Soit $K = k(S)$ où S est une surface définie sur k. Pour tout groupe G connexe, simplement connexe et semi-simple défini sur K, tout G-torseur sur K est trivial.*

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME PRINCIPAL

2.1. Stratégie

La stratégie de la démonstration est très naturelle. Partons d'une fibration $f : X \to B$ où B est une surface projective lisse. Prenons un pinceau de Lefschetz de diviseurs amples sur B, ce qui nous donne un morphisme $\pi : \widetilde{B} \to \mathbb{P}^1$ à fibre générale lisse et connexe, où $\widetilde{B}$ est obtenue en éclatant B le long du lieu de base du pinceau. Pour $t \in \mathbb{P}^1$, on notera $B_t = \pi^{-1}(t)$, qui est naturellement contenue dans B et $f_t : X_t \to B_t$ la restriction de f à $f^{-1}(B_t)$. Pour t dans un ouvert de Zariski non vide $U \subset \mathbb{P}^1$ au-dessus duquel π est lisse, la fibration : $X_t \to B_t$ satisfait les hypothèses (i) et (ii) du théorème 0.2. De plus la base B_t et la variété X_t sont lisses, comme on le voit en appliquant le théorème de Bertini. Le théorème 0.2 sera obtenu à l'aide du lemme 2.2 comme conséquence du théorème 2.1 suivant. Soit C une courbe projective lisse, et soit $f : Y \to C$ un morphisme surjectif, où Y est lisse. Soit L un fibré en droites ample sur Y. Pour tout entier d, les sections $\sigma : C \to Y$ de f telles que $\deg \sigma^* L = d$ sont paramétrées par un ouvert de Zariski $S_d(f)$ d'un schéma de Hilbert de Y. On notera $\widetilde{S}_d(f)$ un modèle projectif lisse de $S_d(f)$. Pour toute section σ comme ci-dessus, on dispose de l'élément $\sigma^* L \in \mathrm{Pic}^d C$, ce qui fournit un morphisme d'Albanese

$$a_d : S_d(f) \to \mathrm{Pic}^d C. \tag{1}$$

On notera encore a_d le morphisme $\widetilde{S}_d(f) \to \mathrm{Pic}^d C$ obtenu en composant l'application de désingularisation $\widetilde{S_d}(f) \to S_d(f)$ avec le morphisme a_d.

THÉORÈME 2.1. — *Soit $f : Y \to C$ un morphisme projectif et surjectif, où C est une courbe lisse. Soit L un fibré en droites sur Y, relativement ample par rapport à f (c'est-à-dire dont la restriction aux fibres de f est ample). On suppose que le triplet (Y, f, L) satisfait les conditions* (i) *et* (ii) *du théorème 0.2. Alors pour d suffisamment grand, il existe une composante distinguée $\widetilde{S}_d^0(f)$ de $\widetilde{S}_d(f)$ telle que le morphisme $a_d : \widetilde{S}_d^0(f) \to \mathrm{Pic}^d C$ est surjectif à fibres rationnellement connexes.*

Ici, le terme « distingué » signifie que si $f : Y \to C$ et L sont définis sur un corps F, de sorte que $S_d(f)$ est aussi défini sur F, la composante $S_d^0(f)$ de $S_d(f)$ est aussi définie sur F. Pour les applications géométriques, le corps F sera le corps de fonctions de $\mathbb{P}^1$ (voir démonstration ci-dessous), et faisant varier $f_t : Y_t \to C_t$ avec $t \in \mathbb{P}^1$, la composante irréductible « distinguée » $S_d^0(f_t)$ est une composante qui n'est pas échangée par monodromie avec d'autres composantes de $S_d(f_t)$, ce qui garantit qu'on dispose d'une famille $\mathcal{S}_d^0 \to \mathbb{P}^1$ de fibre $\mathcal{S}_{d,t}^0 = S_d^0(f_t)$.

PREUVE DE (THÉORÈME 2.1 $\Rightarrow$ THÉORÈME 0.2) — Au-dessus de $\mathbb{P}^1$, ou plutôt de l'ouvert U de $\mathbb{P}^1$ au-dessus duquel π est lisse, on a la fibration $\mathrm{Pic}^d(\widetilde{B}/\mathbb{P}^1) \to \mathbb{P}^1$ qui est un torseur sous la fibration jacobienne $\operatorname{Jac}(\widetilde{B}/\mathbb{P}^1) \to \mathbb{P}^1$. Pour des entiers d suffisamment grands et suffisamment divisibles, la fibration $\operatorname{Pic}^d(\widetilde{B}/\mathbb{P}^1) \to \mathbb{P}^1$ admet une section : il suffit pour cela qu'il existe un fibré en droites H sur B tel que $\deg H_{|B_t} = d$. On considère alors la section α donnée par $\alpha(t) = H_{|B_t} \in \operatorname{Pic} B_t$.

Notons $\widetilde{\mathcal{S}}_d^0 \to U$ une désingularisation de la famille $\mathcal{S}_d^0$ des variétés $S_{d,t}^0$ paramétrée par $t \in U$. Pour d suffisamment grand, et quitte à restreindre U, le morphisme (1) fournit une fibration $A_d : \widetilde{\mathcal{S}}_d^0 \to \operatorname{Pic}^d(B_U/U)$ en variétés rationnellement connexes au-dessus de U. Pour d suffisamment grand et suffisamment divisible, on dispose comme noté ci-dessus d'une section de $\operatorname{Pic}^d(B_U/U) \to U$ d'image Γ. Le théorème 1.3 s'applique à la fibration restreinte

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{d,\Gamma} := A_d^{-1}(\Gamma) \to \Gamma.$$

On dispose donc finalement d'une section rationnelle $\Gamma' \subset \mathcal{S}_d^0$, $\Gamma' \overset{birat}{\cong} \mathbb{P}^1$ de la fibration $\mathcal{S}_d^0 \to U$. On conclut alors avec le lemme suivant :

Lemme 2.2. — *Une section rationnelle $\Gamma' \subset \mathcal{S}_d^0$, $\Gamma' \overset{birat}{\cong} \mathbb{P}^1$ fournit une section rationnelle $B \dashrightarrow X$ de f.*

Preuve. — En effet, on a un morphisme d'évaluation $\mathrm{ev} : \mathcal{S}_d \times_{\mathbb{P}^1} \widetilde{B} \to X$ défini de la façon suivante. Rappelant que la fibre de $\mathcal{S}_d \to \mathbb{P}^1$ en $t \in \mathbb{P}^1$ paramètre les sections de degré d de la fibration $X_t \to B_t$, l'application ev associe à un point (b, σ), $b \in B_t$, $\sigma \in S_d(f_t)$, le point $\sigma(b) \in X_t \subset X$.

Restreignant ce morphisme à $\Gamma' \times_{\mathbb{P}^1} \widetilde{B}$, qui contient un ouvert de Zariski de B, on a bien construit une section rationnelle de f. □

La fin de cette partie est consacrée à la preuve du théorème 2.1.

2.2. Première étape de la preuve du théorème 2.1

Dans ce paragraphe, on va uniquement tirer les conséquences de l'hypothèse (i). On se donne un morphisme $f : Y \to C$, et un fibré en droites L sur Y relativement ample. On suppose que la condition (i) est satisfaite. La technique de base consiste dans le même esprit que **[19]**, **[10]** à partir d'une section $\sigma : C \to Y$ (qui existe d'après le théorème 1.3) de degré $d := \deg_L \sigma(C)$, et à construire d'autres courbes dans Y (qu'on appellera des « porcs-épics » suivant **[14]**) et qui sont des sortes de « peignes » particuliers, selon la terminologie de **[19]**, en ajoutant à $\sigma(C)$ des droites verticales l_i, $i = 1, \ldots, N$ rencontrant $\sigma(C)$ en des points $p_1, \ldots, p_N$. Ces courbes ne sont plus des sections mais des morphismes σ' d'une courbe C' isomorphe à $C \cup_i l_i$, où les l_i sont des $\mathbb{P}^1$ attachés à C aux points p_i, vers Y, qui ont la propriété que la composition $f \circ \sigma'$ est le morphisme évident de C' vers C contractant les l_i sur les points p_i, et que le morphisme σ' envoie chaque l_i sur une droite (verticale) de Y : $\deg \sigma'^* L_{|l_i} = 1$. Pour un porc-épic comme ci-dessus, on dira que la section $\sigma : C \to Y$ à partir de laquelle il est construit est son corps.

On cherche alors à « lissifier » le morphisme obtenu, c'est-à-dire à déformer la paire (C', σ') sur une paire (C'', σ''), avec C'' lisse, ce qui entraîne que C'' est isomorphe à C et que σ'' est une section de f. Pour pouvoir effectuer cette lissification, il faut s'assurer que la courbe $\sigma(C)$ rencontre l'ouvert Y_0 de Y constitué des points par lesquels passent les droites libres des fibres, où « libre » signifie que le fibré normal de la droite considérée est engendré par ses sections globales, et que la section σ est libre (c'est-à-dire non obstruée et à fibré normal globalement engendré). On sait alors qu'en ajoutant suffisamment de droites libres rencontrant $\sigma(C)$, les déformations de la paire (C', σ') sont non obstruées et permettent sa lissification. On peut montrer que si $f : Y \to C$ est à fibres rationnellement connexes, il existe des sections libres (cf. [**10**, Lemma 8.3]), ce qui entraîne l'existence de sections libres rencontrant l'ouvert Y_0, auxquelles cette construction s'applique.

Les courbes qu'on obtient par ce procédé de lissification sont des sections de f dont le degré (relativement à L) est égal à $d + N$. Le fait qu'on puisse déformer des porcs-épics sur des sections de f permet de voir les porcs-épics comme des sections généralisées. Désormais, ce qu'on notera $S_d(f)$ est la variété paramétrant les porcs-épics de degré d de f.

Un énoncé facile mais important est le lemme 2.3 suivant, dont une version généralisée montre que le morphisme d'Albanese a_d de (1) qui était défini sur l'espace des sections de f, s'étend à l'espace des sections généralisées. Soit B une courbe lisse et soit $\mathscr{C} \to B$ un morphisme surjectif de fibre isomorphe à C en dehors de $b_0 \in B$ et de fibre en b_0 isomorphe à $C \cup_i l_i$, où les l_i sont des $\mathbb{P}^1$ attachés à C aux points p_i. Soit $\sigma : \mathscr{C} \to Y$ un morphisme identifiant chaque $\mathbb{P}^1$ à une droite l_i de Y. Soit σ_0 la restriction de σ à la composante de $\mathscr{C}_{b_0}$ isomorphe à C et pour $b \neq b_0$, soit σ_b la restriction de σ à la fibre $\mathscr{C}_b \cong C$.

LEMME 2.3. — *Le morphisme*

$$\phi : B \setminus \{b_0\} \to \mathrm{Pic}^{d+N}(C), \ b \mapsto \sigma_b^* L,$$

s'étend en b_0, et on a $\phi(b_0) = \sigma_0^* L(\sum_i p_i)$ dans $\mathrm{Pic}^{d+N}(C)$.

La première étape consiste à montrer le théorème 2.4 suivant. On suppose que $f : Y \to C$ satisfait la condition (i) du théorème 0.2. Soit Z une composante irréductible de l'espace des sections de degré d de f, dont le point général paramètre une section libre.

THÉORÈME 2.4. — (a) *Pour N suffisamment grand, il existe une unique composante Z_N (déterminée par Z) de la variété $S_{d+N}(f)$ contenant les porcs-épics à N droites et dont le corps est un élément de Z.*

(b) *Soient σ, σ' deux sections libres de f. Alors pour N, N' assez grands comme ci-dessus, il existe une chaîne de courbes rationnelles paramétrant des sections généralisées de f, et joignant un porc-épic de corps $\sigma(C)$, avec N droites verticales en position suffisamment générale attachées aux points p_i, et un porc-épic de corps $\sigma'(C)$ et à N' droites verticales en position suffisamment générale attachées au point q_j, si et seulement si*

$$\sigma^* L\Big(\sum_{1\leq i\leq N} p_i\Big) = \sigma'^* L\Big(\sum_{1\leq i\leq N'} q_i\Big) \text{ dans } \mathrm{Pic}(C), \tag{2}$$

où les p_i sont les points d'attachement des droites dans le premier porc-épic, et les q_i sont les points d'attachement des droites dans le second porc-épic.

(c) *Soient Z et Z' deux composantes irréductibles de l'espace des sections de degrés respectifs d, d', dont le point général paramètre une section libre. Alors, pour N, N' suffisamment grands tels que $d + N = d' + N'$, on a $Z_N = Z'_{N'}$.*

Preuve (esquisse). — On peut prouver (a) par un argument de lissité générique de $S_{N+d}(f)$ le long de (la composante principale de) la variété paramétrant les porcs-épics de type $\sigma(C) \cup \cup_{1\leq i\leq N} l_i$, avec $\sigma \in Z$.

(b) On applique la condition (i) à la paire de points $(\sigma(b), \sigma'(b)) \in Y_b$, pour $b \in C$. Notons que comme les sections σ et σ' sont libres, quitte à considérer une déformation de σ ou σ', on peut supposer que pour un point général b de C, la variété $\mathscr{C}h_b$ paramétrant les chaînes de n droites libres joignant $\sigma(b)$ à $\sigma'(b)$ est rationnellement connexe. On dispose donc d'une famille $\mathscr{C}h \to C$ fibrée au-dessus de C avec des fibres générales rationnellement connexes, de fibre $\mathscr{C}h_b$ au-dessus de b. Le théorème 1.3 de Graber, Harris et Starr dit qu'il existe une section ρ de cette fibration.

Rappelant (cf. définition 1.1) qu'une chaîne de droites libres joignant $\sigma(b)$ à $\sigma'(b)$ dans la fibre Y_b est la donnée de n droites libres $l_1, \ldots, l_n$ contenues dans Y_b, avec des points marqués p_i, $q_i \in l_i$ tels que les points q_i et p_{i+1} coïncident dans Y_b et $p_1 = \sigma(b)$, $q_n = \sigma'(b)$, la section ρ nous fournit n surfaces $\Sigma_i \subset Y$ fibrées via f en droites sur C, chacune étant munie de deux sections P_i, Q_i, telles que $Q_i = P_{i+1}$ comme sections de f, avec $P_1 = \sigma$ et $Q_n = \sigma'$ comme sections de f.

Pour chaque surface réglée $f_i : \Sigma_i \to C$, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Pic}\,\Sigma_i \cong f_i^* \mathrm{Pic}\, C \oplus \mathbb{Z} L_{|\Sigma_i}.$$

Les deux sections P_i et Q_i diffèrent donc par un élément de $f_i^* \mathrm{Pic}\, C$, et on a plus précisément

$$Q_i - P_i = f_i^*(Q_i^* L - P_i^* L) \text{ dans } \mathrm{Pic}\,\Sigma_i.$$

On peut donc trouver pour r_1 suffisamment grand des points $p_1, \dots, p_{r_1}, q_1, \dots, q_{r_2}$ de C en position générale tels qu'on ait l'égalité suivante dans $\mathrm{Pic}\,\Sigma_1$:

$$Q_1 + \sum_{1 \le i \le r_2} l_{q_i} = P_1 + \sum_{1 \le j \le r_1} l_{p_j}, \tag{3}$$

où les droites l_{p_i}, l_{q_j} sont les fibres de f_1 passant par p_i, q_j. Cette égalité se traduit par l'existence d'un pinceau de sections (généralisées) de f_1, joignant le porc-épic $\sigma(C) \cup \cup_{1 \le j \le r_1} l_{p_j}$ au porc-épic $Q_1 \cup \cup_{1 \le i \le r_2} l_{q_i}$.

Voyant la courbe $Q_1 = P_2$ comme contenue dans la surface Σ_2, le porc-épic $Q_1 \cup \cup_{1 \le i \le r_2} l_{q_i} = P_2 \cup \cup_{1 \le i \le r_2} l_{q_i}$ peut maintenant être joint via une famille de porcs-épics paramétrée par une courbe rationnelle à un porc-épic $P_2 \cup \cup_{1 \le i \le r_2} l'_{q_i}$, où l'_{q_i} est cette fois la droite passant par q_i dans la surface Σ_2. Il suffit pour cela de rappeler que la variété des droites verticales de Y passant par q_i est rationnellement connexe.

Dans la surface Σ_2, on trouve encore une égalité de diviseurs effectifs

$$Q_2 + \sum_{1 \le i \le r'_1} l'_{q'_i} = P_2 + \sum_{1 \le j \le r_2} l'_{q_j}, \tag{4}$$

à condition d'avoir choisi initialement r_1 suffisamment grand. L'égalité (4) fournit comme précédemment un pinceau de courbes dans la surface Σ_2. Ce pinceau est une courbe rationnelle qui joint les deux porcs-épics $P_2 \cup \cup_{1 \le j \le r_2} l'_{q_j}$ et $Q_2 \cup \cup_{1 \le i \le r'_2} l'_{q'_i}$ dans l'espace de sections généralisées du degré convenable. Continuant de proche en proche, on voit qu'on arrive à construire une chaîne de courbes rationnelles paramétrant des sections généralisées de même degré $d + r_1$, où $d = \deg \sigma^* L$, et joignant le porc-épic $\sigma(C) \cup \cup_{1 \le j \le r_1} l_{p_j}$ au porc-épic $Q_n \cup \cup_{1 \le j \le r_2^{(n)}} l^{(n)}_{q_{n,j}} = \sigma'(C) \cup \cup_{1 \le j \le r_2^{(n)}} l^{(n)}_{q_{n,j}}$, si et seulement si la condition (2) est satisfaite, c'est-à-dire :

$$\sigma^* L(\sum_{1 \le i \le r_1} p_i) = \sigma'^* L(\sum_{1 \le j \le r_{n+1}} q_{n,j}) \text{ dans } \mathrm{Pic}\, C.$$

Ceci garantit en effet que les deux diviseurs $P_n + \sum_{1 \le j \le r_{n,j}} l^n_{p_{n,j}}$ et $Q_n + \sum_{1 \le j \le r_{n+1,j}} l^n_{q_{n,j}}$ sont linéairement équivalents dans la surface Σ_n.

La preuve de (c) résulte de l'examen de la preuve de (b) qui permet d'assurer que les sections généralisées intervenant dans la chaîne de courbes rationnelles joignant les deux porcs-épics $\sigma(C) \cup \cup_{1 \le i \le N} l_{p_i}$ et $\sigma'(C) \cup \cup_{1 \le j \le N'} l_{q_j}$ sont contenues dans le lieu lisse de $S_{d+N}(f)$. On en déduit immédiatement qu'elles sont contenues dans une même composante irréductible Z^0 de $S_{d+N}(f)$, ce qui entraîne par définition des composantes Z_N l'égalité

$$Z^0 = Z_N(\sigma) = Z_{N'}(\sigma'). \qquad \square$$

2.3. Deuxième étape de la preuve du théorème 2.1

Quand on examine la démonstration du théorème 2.4, on voit qu'elle montre plus que ce qui est énoncé (en particulier l'égalité (c) qui va nous fournir la composante distinguée $S_e(f)^0$ de $S_e(f)$ pour $e \gg 0$). En effet, l'énoncé (b), combiné avec le lemme 2.3, montre aussi que dans les fibres de l'application $a_e : S_e(f)^0 \to \mathrm{Pic}^e(C)$ les porcs-épics avec suffisamment de droites sont joints par des chaînes de courbes rationnelles. Cela n'est évidemment pas suffisant pour prouver que les fibres de l'application a_e sont rationnellement connexes. La principale difficulté ici est le fait qu'on n'a pas contrôlé le nombre de droites ajoutées et que ces chaînes de courbes rationnelles ne balaient pas nécessairement $S_e(f)^0$.

Le second ingrédient géométrique consiste à introduire la définition suivante :

DÉFINITION 2.5. — *Etant donnés $f : Y \to C$ et $L \in \mathrm{Pic}\, Y$, une* surface réglée en droites m-tordue *dans Y est la donnée d'une surface réglée $\pi : R \to C$, d'un morphisme $h : R \to Y$ tels que $f \circ h = \pi$ et les fibres de π sont via h des droites verticales de Y, et d'un diviseur $D \in \mathrm{Pic}\, R$, de degré 1 sur les fibres de π, satisfaisant les conditions suivantes :*

(i) *Le système linéaire $|D|$ est sans point de base (en particulier, par Bertini, il contient de nombreuses sections de π).*

(ii) *Le groupe de cohomologie $H^1(R, \mathcal{O}_R(D))$ est nul.*

(iii) *Le fibré normal $N_{R/X}$ est engendré par ses sections et ses groupes de cohomologie $H^1(R, N_{R/X})$ et $H^1(R, N_{R/X}(-D - \pi^* A))$ s'annulent pour tout diviseur A de C de degré $\leq m$.*

On dira que la surface R est très tordue si elle est 2-tordue. La condition (ii) des théorèmes 0.2 et 2.1, qui est une condition sur les fibres Y_t de f, dit que le morphisme $pr_2 : Y_t \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ possède une surface réglée en droites très tordue.

Remarque 2.6. — Sous l'hypothèse (i) du théorème 0.2, la variété des droites F_t de Y_t est rationnellement connexe. Il existe donc d'après **[19]** des courbes rationnelles $C \subset F_t$, $C \cong \mathbb{P}^1$, à fibré normal arbitrairement ample. Une telle courbe fournit une surface réglée en droites $\Sigma \subset Y_t \times \mathbb{P}^1$, qui a la propriété que le fibré $R^0 pr_{2*} N_{\Sigma/Y_t \times \mathbb{P}^1}$ est arbitrairement ample. Mais ceci est insuffisant pour conclure à la seconde annulation demandée dans (iii) ci-dessus.

On verra plus loin comment sont utilisées ces surfaces pour conclure la démonstration. Dans l'immédiat, le résultat suivant permet de montrer l'existence de telles surfaces à l'aide de la condition (ii) (qui porte sur les fibres) :

PROPOSITION 2.7. — *Si une fibre lisse Y_t de f possède une surface réglée en droites très tordue, et $f : Y \to C$ satisfait la condition* (i) *du théorème 0.2, le morphisme $Y \to C$ possède une surface réglée en droites très tordue.*

Preuve (esquisse). — La démonstration est assez semblable à celle qui permettrait de montrer l'existence d'une section libre de f sachant qu'il passe par tout point d'une fibre (et donc aussi d'une fibre générale par un argument de déformation) des courbes rationnelles à fibré normal ample dans cette fibre. Partant d'une section arbitraire S, on lui attacherait en un certain nombre de points des courbes rationnelles R_i à fibré normal ample dans les fibres passant par ces points. On montrerait ensuite que la courbe $S \cup \cup_i R_i$ se lissifie en une section à fibré normal engendré par ses sections, à condition que les R_i soient génériquement choisies et que le nombre de courbes attachées soit suffisamment grand.

Dans notre cas, on montre tout d'abord que l'existence de surfaces réglées en droites très tordues dans la fibre Y_t est une propriété ouverte sur t. On part d'une section $\sigma : C \to Y$ (qui existe par le théorème 1.3 puisque les fibres de f sont rationnellement connexes). On applique encore une fois le théorème 1.3 à la variété fibrée au-dessus de $\sigma(C)$, dont la fibre au point $\sigma(t)$ est la famille des droites de Y_t passant par $\sigma(t)$. Cette fibre est rationnellement connexe par l'hypothèse (i). Ceci nous donne une surface réglée en droites $R \subset Y$ contenant $\sigma(C)$. Cette surface réglée n'a peut-être aucune des propriétés de positivité demandées dans la définition 2.5. Mais si on attache à cette surface réglée un grand nombre de surfaces réglées très tordues $R_i \to C_i$, $C_i \cong \mathbb{P}^1$, munies d'un diviseur D_i qui doit coïncider avec $\sigma(C)$ au-dessus des t_i, dans des fibres Y_{t_i}, la surface réglée $R \cup \cup_i R_i$ sur $C \cup \cup_i C_i$, munie du diviseur $D = \sigma(C) \cup \cup_i D_i$ se déforme sur une surface réglée très tordue dans Y. □

L'existence de ces surfaces réglées très tordues permet de terminer la démonstration du théorème 2.1 grâce à la proposition suivante :

PROPOSITION 2.8. — (a) *S'il existe une surface réglée en droites très tordue $(\pi : R \to C,\ D \subset R,\ h : R \to Y)$, les courbes générales dans $|D|$ sont des sections libres de f, et leurs déformations sont induites par des déformations de la paire (R, D).*

(b) *Pour $p \in C$, les courbes du système linéaire $|D(-\pi^* p)|$ satisfont la même conclusion.*

(c) *Soit $\sigma'(C)$ une section de π donnée par une courbe générique dans $|D(-\pi^{-1}(p))|$. Alors les déformations du porc-épic $l_p \cup \sigma'(C)$, où l_p est la droite $\pi^{-1}(p) \subset R$, sont contenues dans une déformation de R.*

Notons que la courbe $\sigma(C)$ est par définition dans le même système linéaire sur R que la courbe $l_p \cup \sigma'(C)$. Il existe donc un $\mathbb{P}^1$ paramétrant des sections de R joignant la section libre $\sigma(C)$ et le porc-épic $l_p \cup \sigma'(C)$. La démonstration du théorème 2.1

consiste à utiliser la proposition 2.8 pour conclure que les sections $\sigma(C)$ apparaissant comme membres du système linéaire $|D|$ pour (R, D) comme dans (a) remplissent pour e suffisamment grand un ouvert d'une composante de $S_e(f)$ qui n'est autre que la composante distinguée $S_e^0(f)$, et que tout point de cet ouvert est connecté par une courbe rationnelle, dans $S_e^0(f)$, à un porc-épic ayant exactement une droite. Un énoncé plus précis permet finalement de montrer que tout point de cet ouvert est connecté par une courbe rationnelle, dans $S_e^0(f)$, à un porc-épic possédant un grand nombre de droites, et le théorème 2.4 permet finalement de conclure.

3. APPLICATION À LA CONJECTURE DE SERRE

3.1. Réduction géométrique

On se contentera ici de considérer les G_K-torseurs sur $K = k(S)$, lorsque le groupe G_K sur K est l'extension à K d'un groupe G défini sur le corps algébriquement clos k de définition de S. De façon équivalente, le schéma en groupes sur un ouvert de Zariski U de S correspondant à G_K est en fait un produit $G \times U$, où G est défini sur k. On renvoie à **[9]**, **[4]** et à l'introduction de **[14]** pour le cas général. On veut montrer leur trivialité lorsque le groupe est semi-simple et simplement connexe. On se place dans ce paragraphe en caractéristique 0, de sorte que les résultats précédents s'appliquent. Un énoncé intermédiaire est le suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Soit S une surface quasi-projective définie sur un corps algébriquement clos k de caractéristique* 0, *et soit $\pi : X \to S$ un morphisme projectif dont la fibre générique géométrique $X_{\overline{\eta}}$ est isomorphe à G/P pour un sous-groupe parabolique P du groupe algébrique connexe G. On suppose que l'application de restriction* $\operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} X_{\overline{\eta}}$ *est surjective. Alors π admet une section rationnelle.*

On dira dans la suite qu'une fibration en variétés homogènes $X \to S$ est *scindée* si la flèche de restriction $\operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} X_{\overline{\eta}}$ est surjective.

Remarque 3.2. — Comme il résulte de la remarque 1.6, l'hypothèse de scindage est en fait une condition d'annulation pour une obstruction de type Brauer à l'existence d'une section.

Montrons d'abord comment ceci entraîne la conjecture de Serre 1.10 en caractéristique 0 et pour un groupe défini sur le corps de base.

COROLLAIRE 3.3. — *Si G est connexe, simplement connexe et semi-simple défini sur k, tout G-torseur sur $k(S)$ est trivial.*

Preuve. — (Voir [**9**, 6.5].) — Quitte à remplacer S par un ouvert de Zariski, on peut supposer que ce torseur T a un modèle sur S, soit une fibration $\mathcal{T} \to S$ munie d'une action du groupe G. Soit B un sous-groupe de Borel de G. On peut considérer le quotient $X := \mathcal{T}/B \to S$.

Il faut tout d'abord garantir que ce quotient satisfait l'hypothèse principale du théorème 3.1, à savoir que la fibration $X \to S$ est scindée. Cette condition (qui est une condition d'annulation d'une classe de type Brauer) est garantie par le fait que le groupe G est connexe et simplement connexe. En effet, cette hypothèse garantit que tout fibré inversible sur $X_{\overline{\eta}}$ admet une G-linéarisation, et donc que $\operatorname{Pic} X_{\overline{\eta}}$ provient des caractères de B. Or ces caractères fournissent aussi bien des éléments de $\operatorname{Pic} X$.

D'après le théorème 3.1, on dispose alors d'une section rationnelle de $X \to S$. Ceci se traduit en termes de réduction du torseur T : il provient d'un torseur sous B. Or les $k(S)$-torseurs sous B sont triviaux (de façon équivalente $H^1(k(S), B) = 1$, cf. [**9**, 6.5]). □

La preuve du théorème 3.1 se fait en deux étapes. Le cas où $\rho(X_{\overline{\eta}}) = 1$ est déduit directement du théorème 0.2 par la proposition suivante (cf. [**14**, Corollary 15.4 et Lemma 15.8]).

PROPOSITION 3.4. — *Soit $Z = G/P$ une variété homogène projective à nombre de Picard $\rho = 1$, où G est connexe, semi-simple et défini sur k, et soit L le générateur positif de* $\operatorname{Pic} Z$. *Alors Z satisfait les conditions* (i) *et* (ii) *du théorème 0.2.*

Pour conclure la démonstration, il reste à se ramener au cas où la fibration en variétés homogènes $X \to S$ du théorème 3.1 satisfait la condition $\rho(X_{\overline{\eta}}) = 1$. Ceci résulte de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.5 ([**14**], Lemma 16.1). — *Soit S une variété définie sur k et soit $\pi : X \to S$ une fibration en variétés homogènes* scindée. *Alors quitte à restreindre S, il existe une factorisation de π*

$$X \xrightarrow{\pi_1} Y \xrightarrow{\pi_2} S$$

où π_1 et π_2 sont des fibrations en variétés homogènes scindées, et $\rho(Y_{\overline{\eta}}) = 1$.

Cette proposition permet de conclure de la façon suivante : Partant de la fibration scindée $X \to S$, on a la factorisation $X \xrightarrow{\pi_1} Y \xrightarrow{\pi_2} S$ donnée par la proposition 3.5, où les deux fibrations sont scindées et la seconde satisfait $\rho(Y_{\overline{\eta}}) = 1$. Comme le théorème est déjà établi dans le cas où $\rho(X_{\overline{\eta}}) = 1$, on dispose, quitte à restreindre S, d'une section $\sigma : S \to Y$ de π_2. On continue alors avec la fibration $X_\sigma \to S$, obtenue en restreignant $X \to Y$ à $\sigma(S)$. Cette fibration est encore scindée, ce qui permet de continuer à raisonner avec $X_\sigma \to S$ à la place de $X \to S$. Comme le nombre de Picard de la fibre générique géométrique diminue d'un à chaque étape, on obtient au bout d'un nombre fini d'étapes une section de $X \to S$ définie sur un ouvert de Zariski de S.

3.2. Passage à la caractéristique non nulle

Le théorème 0.2 n'est pas démontré en caractéristique non nulle. La preuve de la conjecture de Serre en caractéristique non nulle est obtenue en se ramenant à la caractéristique nulle par un argument de relèvement : le groupe G sur le corps k algébriquement clos de caractéristique non nulle sera un groupe linéaire connexe, semi-simple et simplement connexe, et le sous-groupe parabolique P sera supposé réduit. Si R est l'anneau de Witt de k, les groupes P et G se remontent sur R, de sorte qu'il existe G_R et $P_R \subset G_R$, dont la réduction sur k donne la paire $P \subset G$. Le résultat nécessaire est donné dans le lemme suivant :

LEMME 3.6. — *On suppose que le groupe P est parabolique maximal (c'est-à-dire que $\rho(G/P) = 1$). Soit Ω la clôture algébrique de* $\operatorname{Frac} R$. *Si toute famille scindée de variétés homogènes à fibre générale G_Ω/P_Ω sur une surface définie sur Ω admet une section rationnelle, il en va de même sur k.*

On peut se ramener au cas parabolique maximal par la proposition 3.5 qui est valable en toute caractéristique.

RÉFÉRENCES

[1] A. BEAUVILLE – On the Brauer group of Enriques surfaces, *Math. Res. Lett.* **16** (2009), p. 927–934.

[2] F. CAMPANA – Connexité rationnelle des variétés de Fano, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **25** (1992), p. 539–545.

[3] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE – Algèbres simples centrales sur les corps de fonctions de deux variables (d'après A. J. de Jong), Séminaire Bourbaki, vol. 2004/2005, exp. n° 949, *Astérisque* **307** (2006), p. 379–413.

[4] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, P. GILLE & R. PARIMALA – Arithmetic of linear algebraic groups over 2-dimensional geometric fields, *Duke Math. J.* **121** (2004), p. 285–341.

[5] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE & T. SZAMUELY – Autour de la conjecture de Tate à coefficients $\mathbb{Z}_l$ pour les variétés sur les corps finis, in *The geometry of algebraic cycles*, Clay Math. Proc., vol. 9, Amer. Math. Soc., 2010, p. 83–98.

[6] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE & C. VOISIN – Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière, *Duke Math. J.* **161** (2012), p. 735–801.

[7] O. Debarre – Variétés de Fano, Séminaire Bourbaki, vol. 1996/97, exp. n° 827, *Astérisque* **245** (1997), p. 197–221.

[8] ______, Variétés rationnellement connexes (d'après T. Graber, J. Harris, J. Starr et A. J. de Jong), Séminaire Bourbaki, vol. 2001/2002, exp. n° 905, *Astérisque* **290** (2003), p. 243–266.

[9] P. Gille – Serre's conjecture II : a survey, in *Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology*, Dev. Math., vol. 18, Springer, 2010, p. 41–56.

[10] T. Graber, J. Harris & J. M. Starr – Families of rationally connected varieties, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), p. 57–67.

[11] M. J. Greenberg – *Lectures on forms in many variables*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[12] A. Grothendieck – Le groupe de Brauer I, II, III, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson et North-Holland, 1968.

[13] A. J. de Jong – The period-index problem for the Brauer group of an algebraic surface, *Duke Math. J.* **123** (2004), p. 71–94.

[14] A. J. de Jong, X. He & J. M. Starr – Families of rationally simply connected varieties over surfaces and torsors for semisimple groups, *Publ. Math. I.H.É.S.* **114** (2011), p. 1–85.

[15] A. J. de Jong & J. M. Starr – Every rationally connected variety over the function field of a curve has a rational point, *Amer. J. Math.* **125** (2003), p. 567–580.

[16] J. Kollár – Trento examples, in *Classification of irregular varieties* (E. Ballico, F. Catanese & C. Ciliberto, éds.), Lecture Notes in Math., vol. 1515, Springer, 1992.

[17] ______, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebn. Math. Grenzg., vol. 32, Springer, 1996.

[18] J. Kollár, Y. Miyaoka & S. Mori – Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds, *J. Differential Geom.* **36** (1992), p. 765–779.

[19] ______, Rationally connected varieties, *J. Algebraic Geom.* **1** (1992), p. 429–448.

[20] J-P. Serre – Cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires, in *Colloq. Théorie des Groupes Algébriques (Bruxelles, 1962)*, Librairie Universitaire, Louvain, 1962, p. 53–68.

[21] J. M. Starr – Arithmetic over function fields, in *Arithmetic geometry*, Clay Math. Proc., vol. 8, Amer. Math. Soc., 2009, p. 375–418.

[22] ______, A pencil of Enriques surfaces of index one with no section, *Algebra Number Theory* **3** (2009), p. 637–652.

[23] B. Totaro – Torsion algebraic cycles and complex cobordism, *J. Amer. Math. Soc.* **10** (1997), p. 467–493.

[24] C. Voisin – On integral Hodge classes on uniruled or Calabi-Yau threefolds, in *Moduli spaces and arithmetic geometry*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 45, Math. Soc. Japan, 2006, p. 43–73.

Claire VOISIN

Institut de Mathématique de Jussieu
Université Paris VI
Case 247
4, place Jussieu
F–75252 PARIS Cedex 05
E-mail : voisin@math.jussieu.fr