FILIPPO SANTAMBROGIO

Inégalités isopérimétriques quantitatives via le transport optimal [d'après A. Figalli, F. Maggi et A. Pratelli]

Astérisque, tome 348 (2012), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 1034, p. 219-231
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2012__348__219_0>

Séminaire BOURBAKI Janvier 2011
63ᵉ année, 2010-2011, n° 1034, p. 219 à 231

INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES QUANTITATIVES VIA LE TRANSPORT OPTIMAL [d'après A. Figalli, F. Maggi et A. Pratelli]

par **Filippo SANTAMBROGIO**

INTRODUCTION

L'inégalité isopérimétrique est une inégalité géométrique qui établit une relation entre le volume et le périmètre d'une forme dans $\mathbb{R}^n$. Connue dans sa forme plus simple depuis l'antiquité, comme son nom l'indique elle concerne la recherche du corps qui, à périmètre égal, maximise le volume. De manière analogue, elle indique aussi l'objet qui minimise le périmètre à volume fixé et, comme on sait que la forme optimale est celle de la boule, en connaissant son volume et son périmètre et en choisissant une formulation invariante par dilatations, on peut l'écrire comme une inégalité vraie pour tout ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$

$$P(E) \geq n|E|^{1-\frac{1}{n}}|B|^{\frac{1}{n}}, \tag{1}$$

où P indique le périmètre, $|\cdot|$ la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle, et B la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

Cette inégalité peut être énoncée pour des ensembles E réguliers, pour lesquels la définition de $P(E)$ et $|E|$ ne présente pas d'ambiguïté, mais elle peut également être étendue à des ensembles E beaucoup plus généraux, grâce à la théorie des ensembles de périmètre fini, qui est d'ailleurs le cadre variationnel le plus adapté pour ce genre de problèmes. En effet, les problèmes de minimisation du périmètre risquent toujours d'être mal posés quand on les considère sur la classe des ensembles réguliers, bien que celui-ci précisément (minimiser le périmètre à volume contraint) ne le soit pas, tout simplement parce qu'on sait que la solution est la boule. Il convient donc de définir plus proprement l'objet périmètre par voie de la théorie des fonctions BV.

Par définition, on dit qu'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est à variation bornée (BV, Bounded Variation en anglais) si ses dérivées au sens des distributions sont des mesures finies. Autrement dit, son gradient distributionnel est une mesure vectorielle. Cette mesure aura typiquement, entre autres, une partie absolument continue ainsi qu'une partie « de saut », concentrée sur un ensemble de dimension $n-1$. Pour un ensemble E, on dit qu'il est de périmètre fini si sa fonction indicatrice I_E est BV. On définira $P(E)$ comme la masse totale de la mesure vectorielle DI_E (il est utile de rappeler que toute mesure vectorielle μ admet une mesure « variation totale », scalaire et positive, $||\mu||$, telle que $\mu = f \cdot ||\mu||$, satisfaisant $||\mu||$−p.p. l'égalité $||f|| = 1$, et que la masse totale de μ, égale à $||\mu||(\mathbb{R}^n)$, est la norme de μ dans l'espace de Banach des mesures vectorielles finies). Évidemment, pour tout ensemble régulier E, son gradient sera donné par une mesure portée par sa frontière, ayant comme densité par rapport à la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^{n-1}$ le vecteur normal sortant ν_E. La masse totale de cette mesure serait donc $\int_{\partial E} ||\nu_E|| d\mathcal{H}^{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$. Pour un ensemble moins régulier, le rôle de la frontière topologique ∂E sera joué par un ensemble plus petit, appelé *frontière réduite*, et défini comme l'ensemble $\partial^* E$ des points x tels que

$$\lim_{r\to 0} \frac{DI_E(B_r(x))}{||DI_E||(B_r(x))} \quad \text{existe et appartient à } S^{n-1}.$$

Cette limite sera indiquée $-\nu_E$ et son opposé jouera exactement le rôle de la normale sortante. La même formule intégrale pour $P(E)$ sera alors vraie en remplaçant ∂E par $\partial^* E$. D'autres notions remarquables de frontière « essentielle » peuvent être définies et elles coïncident toutes, à des ensembles $\mathcal{H}^{n-1}$-négligeables près. Il est intéressant de remarquer que la frontière réduite coïncide également, modulo $\mathcal{H}^{n-1}$, avec l'ensemble des points de densité $\frac{1}{2}$ de E.

Ces notions générales ont permis d'établir une définition de *périmètre anisotrope* et d'en regarder l'inégalité isopérimétrique correspondante, ceci autant pour son intérêt géométrique ou ses applications à la tension superficielle des cristaux que pour un désir de généralisation mathématique abstraite.

Étant donné un convexe borné $K \subset \mathbb{R}^n$, contenant 0 dans son intérieur, on peut lui associer une norme $|| \cdot ||_K$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par $||x||_K := \sup\{x \cdot y,\ y \in K\}$ (norme qui peut ne pas être symétrique si K ne l'est pas). Dans la suite, on considérera également sa norme duale $||x||_K^*$, qui est caractérisée par $\{x : ||x||_K^* \leq 1\} = K$. Comme 0 appartient à l'intérieur de K, qui est borné, il existe une boule centrée à l'origine contenue dans K et une autre qui le contient, ce qui fait qu'on peut trouver deux constantes $m_K \leq M_K$ telles que $m_K||x|| \leq ||x||_K \leq M_K||x||$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On peut ensuite définir un périmètre anisotrope P_K, ou K-périmètre, en prenant

$$P_K(E) := \int_{\partial^* E} ||\nu_E||_K \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Il est important de remarquer que cette quantité correspond en effet à la norme de la mesure « gradient distributionnel de I_E » dans l'espace des mesures vectorielles, quand les normes des vecteurs sont évaluées avec la norme $|| \cdot ||_K$ (c'est-à-dire que l'on peut redéfinir le concept de variation totale d'une mesure en remplaçant la norme euclidienne par cette norme). Il sera également utile, pour toute fonction $h \in BV(\mathbb{R}^n)$, de considérer la mesure positive donnée par sa K-variation totale, notée $||Dh||_K$ (ce qui coïncide avec la mesure de densité égale à $||Dh||_K$ pour $h \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$). De cette manière on a $P_K(E) = ||-DI_E||_K(\mathbb{R}^n)$ (le signe négatif étant important ici, puisque la norme n'est pas symétrique).

La question de l'inégalité isopérimetrique anisotrope surgit alors tout de suite, et la réponse avait été suggérée par Wulf **[13]** au début du XX$^{\text{e}}$ siècle et prouvée ensuite par Gromov **[12]** : l'ensemble optimal est l'ensemble K lui-même, ce qui donnerait

$$P_K(E) \geq n|E|^{1-\frac{1}{n}}|K|^{\frac{1}{n}}. \tag{2}$$

Une fois les deux inégalités (1) et (2) établies, et une fois qu'on sait (ce qui est vrai) que les ensembles optimaux sont uniques (seulement la boule et seulement K, aux translations et aux dilatations près), la question suivante porte alors sur la stabilité des ensembles optimaux, et notamment : si un corps E est presque optimal dans l'inégalité isopérimetrique (c'est-à-dire s'il réalise presque l'égalité dans (1)), peut-on dire qu'il est presque une boule, et dans quel sens, et de même les ensembles presque optimaux dans (2) sont-ils proches de K ? Dans l'interprétation relative à l'énergie des cristaux, ceci signifie : « si on donne une petite quantité d'énergie à un cristal de forme K, peut-on quantifier la modification de sa forme ? ».

Ces questions sont précisées de la manière suivante : le *déficit isopérimetrique* $\delta(E)$ de E est introduit comme étant

$$\delta(E) := \frac{P_K(E)}{n|E|^{1-\frac{1}{n}}|K|^{\frac{1}{n}}} - 1$$

(dorénavant, puisque le cas de l'inégalité isopérimétrique standard correspond au cas où $K = B$, dans la plupart des énoncés nous allons nous limiter au cas anisotrope) et l'*index d'asymétrie* $A(E)$ est défini par

$$A(E) := \inf\left\{\frac{|E\Delta(x_0 + rK)|}{|E|} \ : \ x_0 \in \mathbb{R}^n,\ r^n|K| = |E|\right\}$$

(la proportion de volume de la différence symétrique entre E et une copie de K du même volume, à des translations près).

La question revient alors à estimer $\delta(E)$ en termes de $A(E)$.

Le résultat principal du papier de Figalli, Maggi et Pratelli (**[6]**) est justement d'établir une inégalité de ce genre, et ce avec un exposant optimal :

$$A(E) \leq C(n)\sqrt{\delta(E)}. \tag{3}$$

La constante $C(n)$ qu'ils ont n'est pas forcément optimale, mais l'exposant $1/2$ pour l'asymétrie l'est. De plus, ils trouvent une constante $C(n)$ avec une croissance polynomiale en n et qui ne dépend pas de K.

Auparavant, de nombreuses recherches s'étaient concentrées sur le cas « euclidien » (quand $K = B$), en obtenant d'abord une preuve en dimension 2 ([**1, 2**]), ensuite parmi les E convexes ([**7**]) en dimension quelconque, puis sans la contrainte de convexité mais avec un exposant $\frac{1}{4}$ non-optimal ([**9**]). Ce ne sont que les travaux récents de Fusco, Maggi et Pratelli ([**8**]) qui ont clos la question.

Or, dans tous ces travaux, la technique principale se base sur un procédé de symétrisation (la symétrisation de Steiner), qui permet d'établir que le périmètre d'un ensemble décroît si on le remplace par des versions plus symétriques qui préservent son volume. Ceci admet aussi des versions quantitatives, mais ces outils ne sont pas disponibles pour le cas d'un convexe K quelconque et ne sont donc applicables que pour le cas euclidien. Des résultats sur la stabilité pour l'inégalité anisotrope existaient néanmoins, le plus complet étant celui de [**5**], mais qui n'arrive pas à l'exposant optimal.

Pour suivre la stratégie de [**6**], on présentera d'abord les démonstrations, basées sur des outils de transport de mesure, de l'inégalité et de l'unicité de l'ensemble optimal, en remarquant ce qui pourrait se transformer en inégalité quantitative. Ensuite, on examinera les différents passages qui permettent d'arriver à prouver l'estimation (3).

1. PREUVES PAR TRANSPORT

1.1. Transport monotones : Knothe et Brenier

Nous introduisons ici le concept de *transport de mesures*, même si on le présentera seulement dans le cas de mesures absolument continues : étant données deux densités $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ de même masse totale $\int f(x)dx = \int g(x)dx$ (à support compact, par simplicité), on dit qu'une application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transporte (ou envoie) f sur g si pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ on a $\int_{T^{-1}(A)} f(x)dx = \int_A g(x)dx$. Si T est injectif et suffisamment régulier, cette condition équivaut à une condition sur le jacobien : $|\det(DT)| = f/g(T)$.

Des applications de transport existent toujours, et on va en voir des exemples importants. Nous commençons d'abord avec le cas $n = 1$. Dans ce cas, nous sommes intéressés surtout par le transport monotone croissant. Il y en a toujours un, défini de manière unique presque partout par $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{T(x)} g(t)dt$.

En dimension supérieure, il y a au moins deux extensions intéressantes de ce transport unidimensionnel. La première est celle connue comme *transport de Knothe* ([**11**]), obtenue de la manière suivante : considérons les densités $f(x_1, x_2)$ et $g(x_1, x_2)$ sur $\mathbb{R}^2$ et tout d'abord leurs marges sur la variable x_1, définies par $f_1(x_1) = \int f(x_1, x_2)dx_2$ et

$g_1(x_1) = \int g(x_1, x_2)dx_2$; il s'agit de deux densités sur $\mathbb{R}$ et on peut considérer le transport monotone T_1 envoyant f_1 sur g_1 ; ensuite on peut considérer pour tout x_1 le transport monotone T_{x_1} relatif aux densités (de variable x_2) données par $f(x_1, \cdot)/f_1(x_1)$ et $g(T(x_1), \cdot)/g_1(T(x_1))$. On a construit de cette manière une application qui réarrange de manière croissante la coordonnée x_1 et, x_1 étant fixé, fait de même pour x_2. Pour $n > 2$ la construction est analogue et itérative : les densités $f(x_1, \cdot)/f_1(x_1)$ et $g(T(x_1), \cdot)/g_1(T(x_1))$ sont des densités sur $\mathbb{R}^{n-1}$, on en prend les marges sur leur première variable, x_2, on les réarrange de manière monotone...

L'application de transport obtenue de cette manière est de la forme

$$T_K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (T_1(x_1), T_2(x_1, x_2), \ldots, T_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

et toutes les fonctions $T_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot)$ sont croissantes, ce qui signifie que la matrice jacobienne de T_K (si elle existe, ou alors la jacobienne au sens des distributions) est triangulaire, et tous les termes sur la diagonale sont positifs.

Si l'application T_K est une manière naturelle de définir une application « monotone croissante » en dimension supérieure, celle qui est obtenue grâce au théorème suivant l'est aussi.

PROPOSITION 1.1 (Brenier ([**3**])). — *Étant données les deux densités f et g, il existe une fonction convexe $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que l'application $T = \nabla\phi$ (définie presque partout) envoie f sur g. Ce transport T est également le transport optimal dans la théorie de Monge-Kantorovitch avec coût quadratique.*

Quant à la matrice jacobienne du transport de Brenier, elle est symétrique (puisque T est un gradient) et ses valeurs propres sont positives (puisque ϕ est convexe).

1.2. L'inégalité et l'unicité

L'idée principale, due à Gromov (voir à ce propos [**12**]), est de considérer l'un de ces transports monotones, envoyant la densité $\frac{1}{|E|}I_E$ sur $\frac{1}{|K|}I_K$. Un transport de ce type, avec toutes les valeurs propres positives, satisfait la condition $\det(DT) = |K|/|E|$, sans la valeur absolue au déterminant. On peut donc écrire

(4)
$$n|K|^{\frac{1}{n}}|E|^{1-\frac{1}{n}} = n\int_E (\det(DT))^{\frac{1}{n}} \leq \int_E \nabla\cdot T = \int_{\partial E} T\cdot\nu_E \leq \int_{\partial E} ||T||_K^* ||\nu_E||_K \leq P_K(E),$$

où les inégalités sont obtenues grâce à l'inégalité arithmético-géométrique $\frac{1}{n}\sum_i \lambda_i \geq (\lambda_1 \ldots \lambda_n)^{\frac{1}{n}}$ appliquée aux valeurs propres de DT, ce qui donne une inégalité entre le déterminant et la trace (donc, la divergence de T), et grâce au fait que $T : E \to K$, d'où $||T||_K^* \leq 1$.

Ces inégalités, qui sont vraies à la fois pour le transport de Knothe et pour celui de Brenier, et qui sont présentées ici de manière formelle pour E et T réguliers, peuvent être rendues rigoureuses dans des cas moins réguliers à l'aide de la frontière réduite, en démontrant ainsi l'inégalité cherchée.

Il est intéressant de voir comment elles peuvent être utilisées pour prouver l'unicité des ensembles optimaux. Supposons que l'on a l'égalité dans l'inégalité. Cela implique, entre autres, $n(\det(DT))^{\frac{1}{n}} = \nabla \cdot T$ p.p.. En connaissant les cas d'égalité pour les moyennes arithmétiques et géométriques, cela impose que les valeurs propres de DT soient toutes égales. La condition sur le déterminant impose qu'elles soient toutes égales à $r = (|K|/|E|)^{\frac{1}{n}}$. Dans le cas du transport de Brenier, ceci conclut : la matrice DT étant symétrique, si elle a n valeurs propres égales à r, alors $DT = rI$ et $T(x) = rx + x_0$. Le transport étant une dilatation composée avec une translation, on en déduit que E est obtenu à partir de K par translation et dilatation, ce qui correspond à ce que l'on attendait.

Plus dur est le raisonnement avec le transport de Knothe, puisque DT ne serait pas symétrique dans ce cas. Ceci dit, on peut arriver quand même à prouver que $K = x_0 + rE$, et ceci en opérant comme suit. Pour le raconter plus facilement, on supposera que E et K ont le même volume (ce qui est possible à une dilatation près) et le même barycentre (à une translation près). On considère d'abord ce qui se passe pour la coordonnée x_1 ; la condition $T_1'(x_1) = 1$, avec celle sur les barycentres, est suffisante pour dire que les marginales des deux densités sont égales. En particulier, les projections sur la coordonnée x_1 de E et K coïncident et E doit être contenu dans la même bande $a < x_1 < b$ que K. Le même raisonnement peut être répété en choisissant une autre base pour la construction du transport de Knothe, et en particulier une autre coordonnée x_1. Ceci force finalement E à être contenu dans une intersection de bandes, les mêmes que K. Par convexité de K, qui est donc égal à l'intersection de ces bandes, ceci entraîne $E \subset K$, et la condition du volume implique $E = K$.

Malheureusement, dans cette procédure, on a eu besoin d'appliquer une infinité de fois le même raisonnement, ce qui suggère que des éventuelles estimations de stabilité pourraient facilement dégénérer, avec des constantes qui risquent de devenir infinies au fur et à mesure des itérations.

Les inégalités quantitatives seront donc établies en partant de l'approche avec le transport de Brenier. Par simplicité, on les examinera sous l'hypothèse $|E| = |K| = 1$, qui n'est de toute manière pas restrictive du tout.

1.3. Des idées pour quantifier

Les ingrédients principaux pour quantifier l'inégalité entre $n|E|^{1-\frac{1}{n}}|K|^{\frac{1}{n}}$ et $P_K(E)$ sont les estimations qu'on a faites pour établir (4). Dans (4) il y a deux inégalités principales : $||T||_K^* \leq 1$ et $n(\det(DT))^{\frac{1}{n}} \leq \nabla \cdot T$. Si on indique λ_G et λ_A les moyennes géométriques et arithmétiques, respectivement, des valeurs propres de DT, on a évidemment

(5)
$$\delta(E) \approx P_K(E) - n|E|^{1-\frac{1}{n}}|K|^{\frac{1}{n}} \geq \int_{\partial^* E} 1 - ||T(x)||_K^* d\mathcal{H}^{n-1}, \int_E (\lambda_A(x) - \lambda_G(x))\, dx.$$

La deuxième inégalité pourrait, dans le cas du transport de Brenier, être utile pour établir une inégalité entre $\delta(E)$ et $\int |DT(x) - I| dx$. Il est par contre évident qu'elle ne pourrait pas donner le même résultat pour le transport T_K, puisque la borne sur $\lambda_A - \lambda_G$ ne concerne que les valeurs propres de DT : or, comme précédemment, imposer que ces valeurs propres soient égales à 1 ou proches de 1 est suffisant pour déduire que cette matrice est égale ou proche de l'identité *dans le cas d'une matrice symétrique*, mais pas pour DT_K.

Comme on le verra dans la prochaine section, la bonne inégalité qu'on peut obtenir est en effet, pour $T = \nabla\phi$,

(6)
$$C\sqrt{\delta(E)} \geq \int |DT(x) - I| dx.$$

Comme suite de cette inégalité, les auteurs proposent d'utiliser une inégalité de Sobolev qui permette d'estimer une norme de $T - I$ avec l'intégrale $\int |DT(x) - I| dx$. Par exemple, on pourrait avoir

$$\left(\int ||T(x) - x - x_0||^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \int |DT(x) - I| dx,$$

où l'exposant p serait l'exposant maximal de l'injection de BV dans L^p ($p = n/(n-1)$) et la présence de la constante x_0 serait due au fait que la norme de la dérivée ne pourrait estimer $T - I$ qu'à une constante près, mais ceci ne serait pas un problème puisqu'il ne ferait que réintroduire la translation.

Malheureusement, il est possible de compléter cette inégalité en estimant par le bas $||T - I - x_0||_p$ par une puissance de $A(E)$ (ce qui est raisonnable, vu que cette norme représente combien T, dont l'image est K, s'éloigne de la translation $I + x_0$, dont l'image est une translation de E), mais avec le mauvais exposant, ce qui permettrait d'obtenir seulement $A(E) \leq C\delta(E)^{\frac{1}{4}}$.

La bonne inégalité de Sobolev à utiliser est plutôt une inégalité à trace, du type

(7)
$$\int_{\partial^* E} ||T(x) - x - x_0||_K^* ||\nu_E||_K d\mathcal{H}^{n-1} \leq C \int |DT(x) - I| dx.$$

Ces inégalités à trace existent dans l'espace BV, et font intervenir la frontière réduite $\partial^* E$, aussi bien que la valeur que les fonctions concernées ont sur cette frontière « en arrivant du côté de E » (les fonctions BV sont loin d'être continues, elles admettent des sauts, et elles pourraient très bien avoir un saut sur le bord de E).

En effet, il est possible d'exploiter cette inégalité (en ignorant par simplicité la translation x_0) et de la coupler avec (5), pour obtenir

$$(8)\quad \int_{\partial^* E} |1 - ||x||_K^*|||\nu_E||_K d\mathcal{H}^{n-1}$$
$$\leq \int_{\partial^* E} ||T(x) - x||_K^* ||\nu_E||_K d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial^* E} (1 - ||T(x)||_K^*)||\nu_E||_K d\mathcal{H}^{n-1} \leq C\sqrt{\delta(E)}.$$

Nous allons voir comment le terme $\int_{\partial^* E} |1 - ||x||_K^*|||\nu_E||_K d\mathcal{H}^{n-1}$ est la dernière brique pour arriver à l'inégalité souhaitée, mais avant tout il reste encore un problème : toutes les constantes dans ces inégalités de type Poincaré-Sobolev (qu'il s'agisse de traces sur le bord ou d'intégrales à l'intérieur) sont censées dépendre du domaine, c'est-à-dire dans ce cas de E !

2. L'INÉGALITÉ QUANTITATIVE : LES INGRÉDIENTS

La démonstration rigoureuse de la version quantitative de l'inégalité isopérimétrique anisotrope, c'est-à-dire de (3), passe par les étapes suivantes :

- une démonstration dans un cadre BV de l'inégalité (6) appliquée au transport T ;
- une démonstration du fait que l'asymétrie $A(E)$ est dominée par l'intégrale de bord $\int_{\partial^* E} |1 - ||x||_K^*|||\nu_E||_K d\mathcal{H}^{n-1}$;
- l'identification de la manière dont la constante de l'inégalité de Sobolev de (7) dépend de l'ensemble E ;
- la preuve que tout ensemble E admet un sous-ensemble $G \subset E$ bien choisi, tel que la constante de Sobolev associée à G est bornée de manière uniforme et que démontrer (3) pour G suffit à le démontrer pour E ;
- un argument final pour montrer qu'en fait la constante C de l'inégalité (3) ne dépend pas de K mais seulement de la dimension n.

Il est important de remarquer que l'introduction d'un nouvel ensemble $G \subset E$, choisi à cause des propriétés de son inégalité de Sobolev, empêche d'appliquer tout raisonnement se basant sur la régularité éventuelle de E. En effet, il serait possible de se restreindre, dans la démonstration de l'inégalité (3), aux ouverts réguliers, et de déduire la même inégalité par densité pour tout ensemble de périmètre fini. Ceci permettrait d'appliquer la théorie de la régularité du transport optimal établie par Caffarelli (voir [4]), ce qui rendrait inutile de chercher la version BV des inégalités fonctionnelles dont on a besoin, puisque T serait alors C^∞. Mais, malheureusement, l'ensemble à utiliser ne sera finalement pas E mais cet ensemble G dont la régularité est inconnue, et les auteurs sont alors forcés de considérer toute inégalité fonctionnelle dans un cadre vraiment peu régulier...

2.1. La constante dans l'inégalité de Sobolev à trace

Il est donc très important, dans la discussion faite par les auteurs, d'identifier précisément comment la constante de l'inégalité (7) dépend du domaine (en considérant, d'ailleurs, que ce domaine pourrait être très irrégulier), et sa relation avec la quantité suivante est cruciale : pour tout ensemble E de périmètre fini, définissons la constante $\tau(E)$ par

$$\tau(E) := \inf\left\{\frac{P_K(F)}{\int_{\partial * E\cap\partial^* F}||\nu_E||_K d\mathcal{H}^{n-1}} \,:\, F\subset E, 0<|F|<\frac{|E|}{2}\right\}.$$

On a évidemment $\tau(E)\geq 1$, et $\tau(E)=1$ à chaque fois que E admet, par exemple, deux composantes connexes disjointes. Il n'est pas étonnant que l'existence d'une inégalité de Sobolev non-triviale soit liée au fait que $\tau(E)>1$, et en effet on a exactement, comme il est prouvé dans le papier ([**6**], Lemme 3.1) :

PROPOSITION 2.1. — *Pour toute fonction $f\in BV\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et pour tout ensemble de périmètre fini E, on a*

$$||Df||_K(E)\geq \frac{m_K}{M_K}(\tau(E)-1)\int_{\partial^* E}|f-m(f,E)|||\nu_E||_K d\mathcal{H}^{n-1},$$

où $m(f,E)$ est la valeur médiane de f sur E, m_K et M_K sont les constantes définies dans l'introduction, qui font que $||\cdot||_K$ est équivalent à la norme euclidienne, $||Df||_K$ est la mesure K-variation totale de Df et l'ensemble E sur lequel elle est calculée est en effet l'ensemble des points de densité 1 de E (précision nécessaire puisque $||Df||_K$ pourrait avoir une partie singulière et il est nécessaire de fixer l'ensemble sur lequel on intègre sans oublier des ensembles Lebesgue-négligeables).

Ce qui est très utile est que, bien que l'ensemble E puisse avoir une valeur de $\tau(E)$ très faible, il est toujours possible de remplacer tout E qui a un déficit $\delta(E)$ suffisamment petit par un nouvel ensemble G satisfaisant des bornes inférieures sur $\tau(G)$. En effet on a ([**6**], Lemme 3.2) :

LEMME 1. — *Soient $E\subset\mathbb{R}^n$ de périmètre fini et $\lambda>1$. Il existe alors un sous-ensemble $F\subset E$ maximal parmi ceux qui satisfont $0<|F|<\frac{|E|}{2}$ et $P_K(F)\leq \lambda\int_{\partial * E\cap\partial^* F}||\nu_E||_K d\mathcal{H}^{n-1}$.*

Avec ce lemme, il est enfin possible d'établir ce qui suit ([**6**], voir le théorème 3.4 et une partie de la démonstration du théorème 1.1, dans la section 3.5) :

PROPOSITION 2.2. — *Il existe une constante $k(n)$ suffisamment petite (calculée explicitement dans le théorème 3.4 de [**6**]) telle que, pour tout ensemble de périmètre et de mesure finis E avec $\delta(E)\leq k(n)$, en prenant $\lambda=1+\frac{m_K}{M_K}k(n)$ et en considérant* *l'ensemble $F \subset E$ maximal provenant du lemme précédent, son complément $G = E\setminus F$ satisfait :*

$$\tau(G) \geq \lambda, \quad \delta(G) \leq \frac{\delta(E)}{k(n)}, \quad A(E) \leq \frac{\delta(E)}{k(n)} + A(G).$$

Ceci montre évidemment que l'inégalité $A(G) \leq C\sqrt{\delta(G)}$ est suffisante pour démontrer (3). En effet, $A(E)$ étant bornée (on a $A(E) \leq 2$), (3) est évident si $\delta(E) \geq k(n)$ (il suffit de choisir une constante $C(n) \geq \frac{2}{\sqrt{k(n)}}$) et, pour $\delta(E) \leq k(n)$, on aurait

$$A(E) \leq \frac{\delta(E)}{k(n)} + A(G) \leq \frac{1}{\sqrt{k(n)}}\sqrt{\delta(E)} + C\sqrt{\delta(G)} = \frac{C'}{\sqrt{k(n)}}\sqrt{\delta(E)}.$$

2.2. Les autres ingrédients

Tout d'abord il faut revenir sur le transport $T = \nabla\phi$, qui est le gradient d'une fonction convexe. Or, le théorème d'Alexandrov dit que toute fonction convexe admet un développement à l'ordre deux presque partout, donc une matrice hessienne dite *au sens d'Alexandrov.* Le terme $\det(DT) = \det(D^2\phi)$ dans le changement de variable fait intervenir exactement cette matrice hessienne. On sait aussi que la matrice hessienne *au sens des distributions* d'une fonction convexe est positive, et elle est donc une mesure positive (localement finie). Ceci implique en particulier que T est une fonction (vectorielle) BV. De plus, il se trouve que la hessienne au sens d'Alexandrov, qu'on notera $D^2_A\phi$, coïncide avec la partie absolument continue de la hessienne au sens des distributions. Ceci permet également de dire que $D^2_A\phi \leq D^2\phi$ (et, en prenant les traces, $\Delta_A\phi \leq \Delta\phi$), et cette inégalité est extrêmement utile puisque dans l'intégration par partie qui fait passer de $\int \nabla\cdot T$ à $\int_{\partial^* E} T\cdot\nu_E$ la divergence qui doit apparaître est bien celle au sens des distributions... ; on a donc

$$\begin{aligned}
n|K|^{\frac{1}{n}}|E|^{1-\frac{1}{n}} &= n\int_E (\det(D^2_A\phi))^{\frac{1}{n}} \leq \int_E \Delta_A\phi \\
&\leq \int_E \Delta\phi = \int_{\partial E} T\cdot\nu_E \leq \int_{\partial E} ||T||^*_K||\nu_E||_K \leq P_K(E), \\
\delta(E) &\geq \int_{\partial^* E} 1-||T(x)||^*_K d\mathcal{H}^{n-1} + ||(\Delta-\Delta_A)\phi||(E) + \int_E (\lambda_A(x)-\lambda_G(x))\,dx.
\end{aligned}$$

Cette inégalité montre les trois termes estimés par $\delta(E)$. Le premier sert dans l'inégalité (8). Le deuxième et le troisième servent à préciser l'inégalité (6) dans un cadre BV, pour l'utiliser ensuite dans la proposition 2.1. En effet, dans cette proposition, c'est toute la mesure correspondant à la dérivée distributionnelle de T qui apparaît, et le deuxième terme gère sa partie singulière (et la nécessité de faire apparaître une norme $||\cdot||_K$ donne lieu à d'autres coefficients m_K/M_K). Le troisième gère sa partie absolument continue, et ce grâce à ce lemme ([**6**], Lemme 2.5).

LEMME 2. — *Étant donnés n nombres réels* $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, *on a*

$$7n^2(\lambda_A - \lambda_G) \geq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_G)^2,$$

où λ_G *et* λ_A *indiquent les moyennes géométriques et aritmétiques des* λ_i, *respectivement.*

En prenant comme λ_i les valeurs propres de $DT = D_A^2\phi$, avec $\lambda_G = 1$, et en considérant la norme matricielle $|M| = \sqrt{Tr(M^t M)}$, qui peut être exprimée, quand $M^t = M$ (ce qui est le cas pour DT, et ceci est une autre raison de préférer le transport de Brenier au transport de Knothe) comme la norme euclidienne du vecteur des valeurs propres, ceci permet d'établir

$$\int_E |DT - I| \leq \sqrt{7n^2 \int_E \lambda_n(x)dx \int_E (\lambda_A(x) - \lambda_G(x))dx},$$

et la conclusion suit, à des calculs près, si on remarque que $\lambda_n(x) - 1 \leq |DT(x) - I|$.

2.3. Comment conclure et comment obtenir $C(n)$ plutôt que $C(n, K)$

Si on reprend l'ensemble G construit dans la section 2.1, et si on applique les résultats de la section 2.2 à G plutôt qu'à E, on obtient

$$\begin{aligned} \delta(G) &\geq \int_{\partial^* G} (1 - ||T||_K^*)||\nu_G||_K d\mathcal{H}^{n-1}, \\ C(n)\sqrt{\delta(G)} &\geq ||DT_{sing}||(E) + \int_E |DT(x) - I|dx. \end{aligned}$$

Si dans cette dernière inégalité on remplace, composante par composante, les normes euclidiennes par des normes $||\cdot||_K$ (ce qui « coûte » un facteur m_K/M_K) et que l'on applique la proposition 2.1, on obtient

$$C\left(n, \frac{m_K}{M_K}\right) \sqrt{\delta(G)} \geq \int_{\partial^* G} ||T(x) - x - x_0||_K^* ||\nu_G||_K d\mathcal{H}^{n-1}.$$

On applique ensuite l'inégalité (8) et la proposition suivante ([**6**], Lemme 3.5) :

PROPOSITION 2.3. — *Pour tout ensemble de perimètre et de mesure finis G, on a*

$$\frac{m_K}{M_K} A(G) \leq \int_{\partial^* G} |1 - ||x||_K^*| \, ||\nu_G||_K d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Ceci donne l'inégalité cherchée pour G. Comme on l'a fait remarquer à la fin de la section 2.1, ceci implique la même inégalité pour E, c'est-à-dire (3), dans la forme

$$A(E) \leq C\left(n, \frac{m_K}{M_K}\right) \sqrt{\delta(E)}, \tag{9}$$

où en effet la constante ne dépend pas seulement de la dimension n, mais aussi du convexe K, par voie du ratio m_K/M_K (son élongation).

Il est cependant possible de se débarrasser de cette dépendance en K en utilisant le célèbre lemme de Fritz John :

PROPOSITION 2.4 (John ([**10**])). — *Pour tout convexe K, borné et d'intérieur non vide, il existe une application affine $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et un nombre $r > 0$ tels que*

$$B(0,r) \subset L(K) \subset B(0,nr).$$

En appliquant l'inégalité (9) à $L(E)$ à la place de E et $L(K)$ à la place de K, en remarquant que $m_{L(K)}/M_{L(K)} \geq 1/n$ et que $P_K(E) = P_{L(K)}(L(E))$, l'inégalité (3) est enfin démontrée.

RÉFÉRENCES

[1] F. BERNSTEIN – Über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene, *Math. Ann.* **60** (1905), p. 117–136.

[2] T. BONNESEN – Über das isoperimetrische Defizit ebener Figuren, *Math. Ann.* **91** (1924), p. 252–268.

[3] Y. BRENIER – Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions, *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991), p. 375–417.

[4] L. A. CAFFARELLI – The regularity of mappings with a convex potential, *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), p. 99–104.

[5] L. ESPOSITO, N. FUSCO & C. TROMBETTI – A quantitative version of the isoperimetric inequality : the anisotropic case, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* **4** (2005), p. 619–651.

[6] A. FIGALLI, F. MAGGI & A. PRATELLI – A mass transportation approach to quantitative isoperimetric inequalities, *Invent. Math.* **182** (2010), p. 167–211.

[7] B. FUGLEDE – Stability in the isoperimetric problem for convex or nearly spherical domains in $\mathbf{R}^n$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **314** (1989), p. 619–638.

[8] N. FUSCO, F. MAGGI & A. PRATELLI – The sharp quantitative isoperimetric inequality, *Ann. of Math.* **168** (2008), p. 941–980.

[9] R. R. HALL, W. K. HAYMAN & A. W. WEITSMAN – On asymmetry and capacity, *J. Analyse Math.* **56** (1991), p. 87–123.

[10] F. JOHN – Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, in *Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948*, Interscience Publishers, Inc., New York, N. Y., 1948, p. 187–204.

[11] H. KNOTHE – Contributions to the theory of convex bodies, *Michigan Math. J.* **4** (1957), p. 39–52.

[12] V. D. MILMAN & G. SCHECHTMAN – *Asymptotic theory of finite-dimensional normed spaces*, Lecture Notes in Math., vol. 1200, Springer, 1986.

[13] G. WULFF – Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Kristallflächen, *Z. Kristallogr.* **34** (1901), p. 449–530.

Filippo SANTAMBROGIO

Laboratoire de Mathématiques
Université Paris-Sud
Bâtiment 425
F–91405 Orsay Cedex
E-mail : `filippo.santambrogio@math.u-psud.fr`