Olivier Glass

La méthode du retour en contrôlabilité et ses applications en mécanique des fluides [d'après Coron et al.]

Astérisque, tome 348 (2012), Séminaire Bourbaki, exp. n° 1027, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2012__348__1_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 2010
63^{e} année, 2010-2011, n° 1027, p. 1 à 16

LA MÉTHODE DU RETOUR EN CONTRÔLABILITÉ ET SES APPLICATIONS EN MÉCANIQUE DES FLUIDES [d'après Coron et al.]

par **Olivier GLASS**

INTRODUCTION

Un système de contrôle est une équation d'évolution dépendant d'un paramètre. La théorie du contrôle cherche à déterminer comment l'on peut choisir ce paramètre en fonction du temps afin de modifier la dynamique dans un sens prescrit. Le problème de contrôlabilité s'intéresse en particulier à la possibilité de faire passer l'état du système d'un point de départ à une cible prescrite, celui de stabilisation à la possibilité de rendre un point d'équilibre stable. Dans le cas d'équations non linéaires, l'approche usuelle pour obtenir ce type de propriété est de linéariser le système, puis d'obtenir un résultat sur le linéarisé par des méthodes classiques. Cependant dans de nombreux systèmes d'origine physique, le linéarisé n'est pas nécessairement contrôlable. La méthode du retour introduite par J.-M. Coron permet de contourner cet obstacle. Dans cet exposé, nous nous intéresserons d'abord au problème pour lequel cette méthode a été introduite, qui concerne la stabilisation de certains systèmes de dimension finie ; puis nous illustrerons la méthode par deux exemples issus de la mécanique des fluides incompressibles : l'un, dû à J.-M. Coron, concernant l'équation d'Euler, l'autre, dû à J.-M. Coron et S. Guerrero, concernant l'équation de Navier-Stokes.

1. SYSTÈMES DE CONTRÔLE

1.1. Définition et exemples

DÉFINITION 1.1. — *Un système de contrôle est une équation d'évolution munie d'un paramètre u appelé contrôle. Un tel système s'écrit généralement de manière formelle :*

$$\dot{y} = f(t, y, u), \tag{1}$$

où t désigne la variable temporelle, et où

- *y désigne l'état du système, appartenant pour chaque t à l'espace des états $\mathcal{Y}$,*
- *u désigne le contrôle qui représente un moyen d'influencer celui-ci, à choisir pour chaque t dans l'espace des contrôles admissibles $\mathcal{U}$.*

Deux cas principaux se distinguent dans la théorie. Dans le premier, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{U}$ sont des espaces vectoriels ou des variétés de dimension finie, réels ou complexes, et l'équation (1) est une équation différentielle ordinaire. Dans le second, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{U}$ sont des espaces fonctionnels ou des parties d'espaces fonctionnels, et l'équation (1) est une équation aux dérivées partielles, dans laquelle le contrôle peut apparaître de différentes manières (au second membre de l'équation, dans les conditions aux limites, etc.).

La théorie du contrôle cherche à décrire dans quelle mesure on peut influencer l'état du système par une utilisation appropriée de la fonction de contrôle. Cela est motivé à la fois par les applications, par exemple le contrôle de systèmes en provenance de la mécanique des fluides, et par la théorie : on cherche à comprendre comment l'information se propage dans le système, pour permettre au contrôle de maîtriser la dynamique de celui-ci.

Donnons quelques exemples remarquables de systèmes de contrôle, dont il sera question dans la suite. Le premier est un exemple de système de contrôle de dimension finie.

Exemple 1.2. — *Systèmes de contrôle affines sans dérive.* On considère ici m champs de vecteurs de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. Le système considéré est le suivant :

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{m} u_i \, f_i(y), \tag{2}$$

où le contrôle est $u = (u_i)_{i=1\dots m} \in \mathbb{R}^m$ et l'état $y \in \mathbb{R}^n$. Cet exemple est naturellement relié à la géométrie sous-riemannienne.

Les deux exemples suivants de systèmes de contrôle de dimension infinie proviennent de la mécanique des fluides. Les questions relatives au contrôle en mécanique des fluides ont été soulevées en particulier par J.-L. Lions [**11**].

Exemple 1.3. — *Contrôle frontière de l'équation d'Euler.* On considère l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles, posée dans un domaine Ω borné et régulier du plan $\mathbb{R}^2$. Pour un temps $T > 0$ donné, le champ de vitesse du fluide $v : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^2$ et son champ de pression $p : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ satisfont :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(t,x) + (v(t,x).\nabla) v(t,x) + \nabla p(t,x) = 0 \text{ pour } (t,x) \text{ dans } [0,T] \times \Omega, \\ \operatorname{div} v(t,x) = 0 \text{ pour } (t,x) \text{ dans } [0,T] \times \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

On rappelle la notation classique $(v.\nabla) = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. La première équation rend compte de la conservation de la quantité de mouvement, la seconde de l'incompressibilité. En général, le système d'Euler est clos par la condition d'imperméabilité de la frontière

$$v(t,x).n(x) = 0 \text{ pour } (t,x) \text{ sur } [0,T] \times \partial\Omega, \tag{4}$$

où n est la normale unitaire extérieure sur $\partial\Omega$. Mais ici, on considère qu'une partie des données au bord peut être utilisée comme un contrôle. Plus précisément, on introduit Σ un ouvert non vide de $\partial\Omega$, et on considère que l'on dispose comme contrôle des données au bord sur Σ, tandis que la contrainte

$$v(t,x).n(x) = 0 \text{ pour } (t,x) \text{ sur } [0,T] \times (\partial\Omega \setminus \Sigma), \tag{5}$$

demeure sur le reste du bord. D'après V. Yudovich **[13]**, on sait que les données que l'on peut imposer sur Σ pour déterminer le système, c'est-à-dire ici le contrôle, sont les suivantes :

- la vitesse normale sur $[0,T] \times \Sigma$:

  $$v(t,x).n(x) = h(t,x) \text{ sur } [0,T] \times \Sigma,$$

  avec la contrainte que h doit être de moyenne nulle pour chaque temps afin d'être compatible avec l'incompressibilité du modèle,
- et le tourbillon sur la partie « entrante » de Σ :

  $$\operatorname{rot} u = \omega(t,x) \text{ sur } \Sigma_T^- := \{(t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega \ / \ v(t,x).n(x) < 0\}.$$

L'état du système est le champ de vitesse v. Comme il est classique en mécanique des fluides incompressibles, la pression n'est pas ici une réelle inconnue du système.

Exemple 1.4. — Contrôle interne de l'équation de Navier-Stokes. On se place ici dans le tore de dimension 2, où l'on pose l'équation de Navier-Stokes incompressible :

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) + (v(t,x).\nabla)v(t,x) - \Delta v(t,x) + \nabla p(t,x) = f(t,x) \text{ dans } [0,T] \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div} v(t,x) = 0 \text{ pour } (t,x) \text{ dans } [0,T] \times \mathbb{T}^2, \end{cases} \tag{6}$$

où, comme dans l'exemple précédent, $v : [0,T] \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^2$ désigne le champ de vitesse du fluide et $p : [0,T] \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ son champ de pression. Ici, f désigne un champ de force réparti dans le domaine. Le système de contrôle interne consiste à considérer comme un contrôle une telle force, localisée dans une partie du domaine. Soit donc ω un ouvert non vide de $\mathbb{T}^2$; le système de contrôle interne de l'équation de Navier-Stokes s'obtient en introduisant le contrôle $u : [0,T] \times \omega \to \mathbb{R}^2$ dans l'équation précédente sous la forme

$$f(t,x) = \chi_\omega(x) u(t,x), \tag{7}$$

c'est-à-dire avec un léger abus de notation que $f = 0$ dans $[0,T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus \omega)$ et $f = u$ dans $[0,T] \times \omega$. Cette écriture est destinée à rappeler que u est supporté dans ω ; cela n'empêche pas de chercher un contrôle f régulier.

Là encore, l'état du système est le champ v.

Ces deux derniers exemples ne sont que des cas particuliers de systèmes de contrôle gouvernés par des EDP. Bien sûr, les systèmes de contrôle interne et frontière peuvent être étudiés pour beaucoup d'autres équations d'évolution ; par ailleurs il existe beaucoup de modèles où le contrôle apparaît de manière différente dans le système, comme par exemple dans les coefficients de l'opérateur différentiel lui-même.

1.2. Deux questions classiques en théorie du contrôle

Beaucoup de questions mathématiques différentes peuvent être soulevées à propos d'un système de contrôle. Nous nous intéresserons à deux d'entre elles en particulier. La première question est celle de contrôlabilité.

DÉFINITION 1.5. — *Soit $T_0 < T_1$. On dira que le système* (1) *est exactement contrôlable entre T_0 et T_1 lorsque, quel que soit le couple d'états possibles $(y_0, y_1) \in \mathcal{Y}^2$, il existe un contrôle $u : [T_0, T_1] \to \mathcal{U}$ tel que la solution $y : [T_0, T_1] \to \mathcal{Y}$ de* (1) *associée à u et partant de $y_{|t=T_0} = y_0$ satisfasse :*

$$y_{|t=T_1} = y_1.$$

Exemple 1.6. — Un résultat classique, dû à W.-L. Chow et P. Rashevski, dit que pour le système (2), si en tout point $x \in \mathbb{R}^n$

$$\{g(x),\ g \in \mathrm{Lie}\{f_1, \ldots, f_m\}\} = \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

alors le système (2) est exactement contrôlable en temps arbitraire.

Une autre notion de contrôlabilité est fréquente, en particulier quand on considère le contrôle d'équations aux dérivées partielles paraboliques. L'effet régularisant de ces dernières empêche en général la contrôlabilité exacte d'avoir lieu. Le problème de zéro-contrôlabilité soulève la question, non contredite par cet effet régularisant, de la possibilité de ramener le système à un état d'équilibre fixé. Dans le cas des exemples 1.3 et 1.4, la question est la possibilité de ramener le fluide au repos.

DÉFINITION 1.7. — *On suppose que $\mathcal{Y}$ est un espace vectoriel. Soit $T_0 < T_1$. On dira que le système* (1) *est zéro-contrôlable entre T_0 et T_1 lorsque, quel que soit $y_0 \in \mathcal{Y}$, il existe un contrôle $u : [T_0, T_1] \to \mathcal{U}$ tel que la solution $y : [T_0, T_1] \to \mathcal{Y}$ de* (1) *associée à u et partant de $y_{|t=T_0} = y_0$ satisfasse :*

$$y_{|t=T_1} = 0.$$

Remarque 1.8. — Bien sûr, pour des systèmes autonomes comme ceux donnés en exemple précédemment, ces notions ne dépendent que de $T_1 - T_0$.

Signalons que l'on peut distinguer pour ces questions la version *globale*, telle qu'indiquée ci-dessus, et la version *locale*, où l'on demande que la propriété soit valable au moins pour des états proches entre eux ou proches de l'état d'équilibre.

Un autre problème classique est la question de stabilisation, motivée par la recherche de la robustesse du contrôle. Considérons pour simplifier un système autonome :

$$\dot{y} = f(y, u). \tag{9}$$

Dans le problème de contrôlabilité, la fonction de contrôle est calculée en fonction des états y_0 et y_1 du système et du temps. Mais si l'état du système dévie de la trajectoire prévue (du fait de l'imprécision du modèle, des erreurs de calcul, de perturbations extérieures par exemple), il se peut que le contrôle qui avait été calculé ne soit plus adapté à la situation. Une façon de chercher de la robustesse au contrôle est de le chercher sous forme de retour d'état :

$$u(t) = \overline{u}(y(t)). \tag{10}$$

Dans (10), le contrôle est calculé uniquement en fonction de l'état du système au temps t ; en particulier un tel contrôle peut prendre en compte d'éventuelles déviations de la trajectoire. On peut également élargir la classe des contrôles en retour d'état décrite par (10) aux retours d'états dits instationnaires :

$$u(t) = \overline{u}(t, y(t)), \tag{11}$$

où l'on se permet une dépendance supplémentaire du contrôle en fonction du temps. Par opposition, on appelle alors stationnaire un retour d'état du type (10).

Lorsqu'on est muni d'un retour d'état comme (10) ou (11), l'équation

$$\dot{y} = f(y, \overline{u}(t, y(t)))$$

devient alors un système dynamique où le contrôle n'est plus à choisir, et est appelé *système en boucle fermée.* Soit (y_e, u_e) tel que $f(y_e, u_e) = 0$ un point d'équilibre de (9).

DÉFINITION 1.9. — *On dira que le système* (1) *est globalement (respectivement localement) asymptotiquement stabilisable au point* (y_e, u_e) *lorsque l'on peut trouver un retour d'état* $\overline{u}$ *tel que* $\overline{u}(t, y_e) = u_e$ *et qui rende le système en boucle fermée globalement (resp. localement) asymptotiquement stable au point* (y_e, u_e).

1.3. La méthode du retour

L'approche la plus commune pour attaquer les problèmes de contrôlabilité des systèmes non linéaires, en particulier en ce qui concerne les systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, consiste à linéariser le système, puis prouver un résultat de contrôlabilité sur le système linéarisé, et enfin à en déduire un résultat sur le système non linéaire (au moyen par exemple d'un théorème de point fixe ou d'inversion locale). Et l'on dispose d'une méthode classique pour prouver la contrôlabilité d'un système linéaire (voir J.-L. Lions **[10]** et D. L. Russell **[12]**), qui consiste à ramener la preuve de la contrôlabilité à la preuve d'une inégalité, dite d'observabilité, sur le système dual. Cela est proche de l'idée qui ramène la preuve de la surjectivité d'un opérateur à celle d'une inégalité sur l'opérateur adjoint.

Mais, outre qu'en général les inégalités d'observabilité sont difficiles à prouver, cette approche ne permet pas de résoudre complètement les questions soulevées par les systèmes non linéaires. En effet, deux difficultés peuvent se présenter. D'une part, il se peut que le système linéarisé ne soit pas toujours contrôlable. Par exemple, l'équation d'Euler linéarisée autour de la trajectoire nulle est :

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) + \nabla p(t,x) = 0 \text{ dans } [0,T] \times \Omega, \\ \operatorname{div} v(t,x) = 0 \text{ dans } [0,T] \times \Omega. \end{cases}$$

Pour ce système, les états initial et final ne diffèrent que d'un champ de gradient (harmonique), quel que soit le contrôle. Ce système n'est donc pas contrôlable.

D'autre part, l'autre difficulté qui se présente est que, même lorsque le linéarisé est contrôlable, le résultat qui s'en déduit sur le système non linéaire est en général seulement local.

La *méthode du retour*, introduite par J.-M. Coron dans **[2]**, est une approche des questions de contrôle non linéaire, qui cherche à contourner la difficulté de systèmes n'ayant pas un linéarisé contrôlable. Elle permet en outre parfois d'obtenir des résultats qui sont globaux. On peut la voir comme une approche qui repose vraiment sur la non linéarité du système et cherche à exploiter celle-ci.

Comme fréquemment en théorie des équations aux dérivées partielles, on ne dispose pas d'un théorème très général qui s'adapterait à toutes les situations des systèmes de contrôle gouvernés par des EDP. Mais il se trouve que cette approche s'applique dans beaucoup de situations différentes, en particulier aux problèmes de contrôle de certains systèmes physiques. Cela ne se limite pas à la mécanique des fluides d'où l'on tire ici des exemples. On se référera par exemple au livre **[6]** pour trouver des études différentes en provenance d'autres contextes.

On peut résumer la méthode de la manière suivante. Pour obtenir de la contrôlabilité près de 0, au lieu de linéariser autour de la trajectoire nulle, il s'agit de linéariser autour d'une trajectoire non triviale du système non linéaire (avec contrôle), disons

$\overline{y}$, qui part de 0 et revient à 0 au temps final. On peut ensuite espérer obtenir une solution au problème de contrôle non linéaire, qui soit proche de $\overline{y}$.

Dans les sections qui suivent, nous donnons quelques exemples illustratifs d'emploi de cette méthode. Comme indiqué plus haut, elle a eu des conséquences nombreuses et variées ; nous renvoyons encore à **[6]**.

2. ORIGINES DE LA MÉTHODE : STABILISATION DES SYSTÈMES AFFINES DE DIMENSION FINIE SANS DÉRIVE

Le problème qui a amené J.-M. Coron à introduire cette méthode est celui de la stabilisation asymptotique par retour d'état du système (2) à l'origine $(0, 0)$, en supposant, ce qui est naturel, que la condition (8) sur les champs de vecteurs $f_1, \dots, f_m$ soit satisfaite en tout point de $\mathbb{R}^n$.

Si l'on considère uniquement la classe des retours d'états stationnaires, il n'est pas possible en général de stabiliser ces systèmes. En effet, R. W. Brockett a démontré le résultat suivant, qui repose sur des arguments topologiques (voir **[1]**).

THÉORÈME 2.1. — *Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ tel que $f(0,0) = 0$. Si le système $\dot{y} = f(y,u)$ est localement asymptotiquement stabilisable à l'origine par un retour d'état stationnaire continu, alors l'image par f d'un voisinage de l'origine est un voisinage de l'origine.*

Le système classique donné par

$$\dot{y}_1 = u_1, \quad \dot{y}_2 = u_2, \quad \dot{y}_3 = u_2 y_1 - u_1 y_2,$$

satisfait la condition (8) en tout point. Il est en revanche simple de voir que l'image de $(y_1, y_2, y_3, u_1, u_2) \mapsto (u_1, u_2, u_2 y_1 - u_1 y_2)$ ne contient pas de point de la forme $(0, 0, \varepsilon)$, $\varepsilon \neq 0$. Ce système n'est par conséquent pas stabilisable par retour d'état stationnaire continu. Restait alors le problème de la possibilité de stabilisation par un retour d'état instationnaire. Dans **[2]**, J.-M. Coron montre le résultat suivant.

THÉORÈME 2.2. — *Supposons que $f_1, \dots, f_m$ vérifient la condition (8) en tout point $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Alors pour tout $T > 0$, il existe $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, T-périodique de la première variable, tel que :*

$$\forall t, \ u(t, 0) = 0,$$

et tel que le point 0 soit globalement asymptotiquement stable pour le système en boucle fermée

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t, y) f_i(y).$$

PREUVE (esquisse) — La preuve de ce résultat mériterait un exposé à elle seule. Donnons-en juste quelques notions. Le point de départ est de construire un contrôle de référence $\overline{u}(t,y) = (\overline{u}_i)_{i=1\ldots m}$ satisfaisant $\overline{u}(t,0) = 0$ pour tout temps et tel que la solution de

$$\dot{\overline{y}} = \sum_{i=1}^{m} \overline{u}_i(t,\overline{y}) f_i(\overline{y})$$

satisfasse $\overline{y}(T) = \overline{y}(0)$, quelle que soit la donnée initiale. Cette propriété s'obtient facilement, puisqu'il suffit que

$$\overline{u}(T-t,y) = -\overline{u}(t,y).$$

Mais la difficulté vient de ce qu'on cherche à obtenir de plus la propriété :

pour $\overline{y}(0) \neq 0$, le système linéarisé autour de la trajectoire $\overline{y}$ est contrôlable.

Ensuite, sous cette condition (à vrai dire, sous une condition un peu plus forte), on peut corriger la loi de retour d'état $\overline{u}$ en

$$u(t,y) = \overline{u}(t,y) + \varepsilon v(t,y),$$

où v est un contrôle permettant d'ajouter de la « dissipation » au système et ε est un petit paramètre positif. Le but est d'obtenir des trajectoires du système en boucle fermée qui satisfont

$$y(T) \simeq (1 - \varepsilon\eta[y(0)])y(0),$$

où η est une fonction strictement positive en dehors de l'origine ; cela donne le résultat.

L'idée pour construire v est d'utiliser l'équation linéarisée autour de $\overline{y}$:

$$L(z,w) := \frac{\partial z}{\partial t} - \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(\overline{y}(t)) - \sum_{i=1}^{m} \overline{u}_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial y}(\overline{y}(t))z = 0. \tag{12}$$

On introduit $\hat{z}$ comme une application qui près du temps initial suit la solution nulle de (12), et qui près du temps final suit l'orbite de (12) sans contrôle w et atteignant $-\eta(y(0))\,y(0)$ au temps T. Donc $(\hat{z},\hat{w}) = (\hat{z},0)$ ne satisfait pas (12), mais $r := L(\hat{z},0)$ est supporté à l'intérieur de $(0,T)$. Il s'agit alors de « corriger » $\hat{z}$ en trouvant un antécédent de r par L, lui-même supporté à l'intérieur de $(0,T)$. Un tel antécédent n'existe généralement pas pour $\overline{u} = 0$, mais il existe si le système linéarisé autour de $\overline{y}$ est contrôlable. J.-M. Coron montre que cette construction est possible pour des $\overline{u}$ génériques, et la preuve repose sur des techniques d'inversion des opérateurs différentiels sous-déterminés dues à M. Gromov [**9**, Section 2.3.8]. Puis le contrôle résultant est mis sous forme de retour d'état par un argument d'inversion locale.

3. CONTRÔLABILITÉ FRONTIÈRE DE L'ÉQUATION D'EULER BIDIMENSIONNELLE

La méthode du retour s'est ensuite appliquée en théorie du contrôle des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, en particulier au cas de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 2. Soient Ω un domaine borné et régulier du plan $\mathbb{R}^2$, et Σ une partie ouverte de son bord. On s'intéresse à la contrôlabilité de l'équation d'Euler dans un cadre d'états C^∞ (la régularité n'ayant ici que peu d'importance, tant que l'espace des états est par exemple un espace de Hölder ou de Sobolev inclus dans l'espace des fonctions lipschitziennes). On considère donc l'espace des états suivants (qui prend en compte les conditions de compatibilité) :

$$\mathcal{Y} := \left\{ v \in C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2) \ / \ \mathrm{div}\,(v) = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } v.n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Sigma \right\}.$$

On dira que le système (3) est exactement contrôlable en temps $T > 0$ lorsque, quels que soient v_0 et v_1 de $\mathcal{Y}$, il existe une solution $v \in C^\infty([0,T] \times \overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$, solution de (3), satisfaisant (5), et telle que

$$v(0,\cdot) = v_0 \text{ et } v(T,\cdot) = v_1 \text{ dans } \Omega.$$

On remarquera que cette notion ne fait pas apparaître explicitement le contrôle. Celui-ci peut se retrouver en prenant les traces adéquates au bord. Cela permet d'avoir un énoncé ne faisant pas appel aux conditions au bord sur $[0,T] \times \Sigma$, qui ont ici une forme assez compliquée, reliée au résultat de V. Yudovich mentionné plus haut.

Dans [**3, 5**], J.-M. Coron a obtenu le résultat suivant.

THÉORÈME 3.1. — *L'équation d'Euler* (3) *est globalement exactement contrôlable en temps $T > 0$ si et seulement si la zone de contrôle Σ rencontre toutes les composantes connexes du bord. En particulier, si elle est contrôlable, elle l'est pour tout temps.*

PREUVE (esquisse) — La nécessité de la condition sur Σ est une conséquence du théorème de Kelvin : dans un fluide incompressible, la circulation de vitesse le long d'une courbe fermée est constante dans le temps, lorsque la courbe suit le flot de vitesse. Comme une composante connexe du bord ne rencontrant pas la zone de contrôle Σ est laissée invariante par le flot, l'évolution a un invariant indépendant du contrôle si Σ ne satisfait pas la condition.

La partie principale du théorème précédent est la suffisance de la condition. Esquissons la preuve dans le cas plus simple où Ω est simplement connexe. Comme constaté plus haut, l'équation linéarisée autour de la solution nulle n'est pas contrôlable. Il s'agit donc de déterminer une solution de l'équation d'Euler (avec la contrainte (5)), qui parte de 0 et y retourne au temps T, et autour de laquelle l'équation linéarisée soit contrôlable.

On est donc amené à trouver une solution particulière à l'équation non linéaire, problème en général épineux. Mais ici, il est connu depuis très longtemps que des solutions particulières de l'équation d'Euler sont données par les *écoulements potentiels* :

$$v(t,x) = \nabla\theta(t,x) \text{ où } \Delta_x\theta = 0 \text{ dans } (0,T)\times\Omega. \tag{13}$$

La pression est alors $p = -\partial_t\theta - |\nabla\theta|^2/2$ et la condition (5) se traduit par la condition de Neumann au bord :

$$\frac{\partial\theta}{\partial n} = 0 \text{ sur } (0,T)\times(\partial\Omega\setminus\Sigma).$$

Nous disposons ainsi d'une grande quantité de solutions particulières de (3).

Il nous faut maintenant trouver, au sein de cette famille, une solution de référence $\overline{y} = \nabla\theta$ telle que le linéarisé autour de $\overline{y}$ soit contrôlable. Le point de départ pour cela est de réécrire, comme il est classique, l'équation d'Euler sous la forme d'un couplage d'une équation de transport portant sur la vorticité, et d'une équation elliptique permettant de retrouver la vitesse à partir de celle-ci :

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (v.\nabla)\omega = 0, \quad \operatorname{div} v = 0 \text{ et } \operatorname{rot} v = \omega.$$

On considère alors l'équation linéarisée autour de $\overline{y}$ sous forme de vorticité :

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (\overline{y}.\nabla)\omega = 0. \tag{14}$$

Une solution ω de (14) est constante le long du flot de $\overline{y}$. Si l'on souhaite pouvoir passer d'un ω_0 initial quelconque à $\omega_1 = 0$ (par exemple), il est donc nécessaire d'obtenir la propriété suivante : dans le flot de $\overline{y}$, les points de Ω au temps T proviennent de Σ.

PROPOSITION 3.2. — *Il existe $\theta \in C^\infty([0,T]\times\overline{\Omega};\mathbb{R})$, satisfaisant* (13) *et la propriété précédente.*

Il y a plusieurs méthodes pour prouver ce résultat, qui est relativement simple quand Ω est simplement connexe (voir **[3]**). On peut par exemple, par un argument d'analyse complexe, trouver $\overline{\theta} \in C^\infty(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ harmonique et sans point critique dans $\overline{\Omega}$; alors $\theta(t,x) = K\overline{\theta}(x)$ convient pour K assez grand.

Une fois cette solution de référence $\overline{y}$ obtenue, on voit que l'équation (14) est zéro-contrôlable : il suffit essentiellement de prescrire la vorticité entrante égale à 0 (ce qui pose en fait des problèmes de régularité), et l'état final ainsi obtenu satisfait :

$$\operatorname{div} v(T) = 0 \text{ et } \operatorname{rot} v(T) = 0.$$

Le domaine étant simplement connexe, et comme on peut prescrire $v(T).n = 0$ sur le bord (puisque cette donnée fait partie du contrôle), on obtient que l'état final est nul.

Puis un argument perturbatif montre que l'équation (14) est encore zéro-contrôlable lorsque l'on remplace $\overline{y}$ par y qui est assez proche. On peut alors utiliser une stratégie de point fixe pour déduire que l'équation est *localement* zéro-contrôlable.

Le résultat complet s'en déduit, en utilisant le fait que l'équation d'Euler a une invariance d'échelle particulière, ne faisant intervenir que la variable de temps : si $(v(t,x), p(t,x))$ est solution de (3) dans $[0,T] \times \Omega$, alors (v_λ, p_λ) est donné par :

$$v_\lambda(t,x) := \lambda v(\lambda t, x) \text{ et } p_\lambda(t,x) = \lambda^2 p(\lambda t, x) \text{ est solution dans } [0, T/\lambda] \times \Omega. \tag{15}$$

On déduit de ce fait que, si l'on sait ramener des petits états à l'équilibre en temps T, on sait ramener des états plus grands en temps plus *court*! Cela établit la zéro-contrôlabilité globale. Enfin, la contrôlabilité exacte globale suit par réversibilité de l'équation ($\lambda = -1$ dans l'expression précédente) : compte tenu de cette réversibilité, on sait passer de y_0 à y_1 en temps T, en recollant deux solutions, passant respectivement de y_0 et de $-y_1$ à 0 en temps $T/2$, où l'on inverse le sens du temps dans la seconde.

4. CONTRÔLABILITÉ LOCALE DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES AU MOYEN D'UN CONTRÔLE À UNE SEULE COMPOSANTE

Dans ce paragraphe, nous donnons une autre illustration de l'utilisation de la méthode du retour en mécanique des fluides. Il s'agit du système de contrôle décrit dans l'exemple 1.4. L'équation de Navier-Stokes présentant un effet régularisant, le problème de zéro-contrôlabilité est une question naturelle.

A. Furiskov et O. Imanuvilov ont prouvé la zéro-contrôlabilité *locale* de ce système (voir [**8**]). D'un autre côté, J.-M. Coron a prouvé dans [**4**] un résultat global de contrôlabilité *approchée* (qui permet de conduire le système à un état arbitrairement proche de 0), qui complète le précédent et permet d'obtenir la zéro-contrôlabilité globale du système vers 0. Ce résultat repose sur la contrôlabilité de l'équation d'Euler (donc sur la méthode du retour), et sur le fait que le changement d'échelle (15) permet de se ramener à un petit coefficient de viscosité. Notons ici que le fait que le système soit posé dans le tore est essentiel ; dans le cas d'un domaine où l'on impose au bord la condition usuelle pour l'équation de Navier-Stokes de non-glissement $v = 0$ sur $\partial\Omega$, le problème de zéro-contrôlabilité globale est ouvert.

Mais une question naturelle se pose lorsqu'un résultat de contrôlabilité a été obtenu. Elle consiste à réduire l'espace des contrôles possibles, et ce à des fins de modélisation mais aussi de meilleure compréhension de la transmission de l'information dans le système. Les questions de contrôlabilité de systèmes couplés d'EDP à l'aide d'un contrôle ne portant que sur une partie des équations est une question de recherche actuelle importante.

Dans [7], J.-M. Coron et S. Guerrero se sont intéressés à la contrôlabilité de l'équation (6), au moyen d'un contrôle ne portant que sur la première composante, c'est-à-dire où le contrôle prend ici la forme :

$$f(t,x) = \chi_\omega(x) \begin{pmatrix} u_1(t,x) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

où u_1 est une application de $[0,T] \times \omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et où l'on utilise le même abus de notation que dans l'exemple 1.4. Ils obtiennent le résultat suivant. Soit l'espace

$$H_0 := \left\{ v \in L^2(\mathbb{T}^2;\mathbb{R}^2) \ / \ \mathrm{div}\,(v) = 0 \text{ et } \int_{\mathbb{T}^2} v_2\, dx = 0 \right\}.$$

On notera que lorsque le contrôle est sous la forme (16), l'espace H_0 est un sous-espace invariant du système de contrôle (6).

THÉORÈME 4.1. — *Pour tout temps $T > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $v_0 \in H_0$ tel que $\|v_0\|_{L^2} < \eta$, il existe un contrôle $u_1 \in L^2((0,T) \times \omega)$ satisfaisant $\|u_1\|_{L^2} < \varepsilon$ et tel que l'unique solution de* (6) *et* (16) *de donnée initiale v_0 satisfasse :*

$$v(T) = 0 \ \textit{dans}\ \mathbb{T}^2.$$

PREUVE (esquisse) — Il est ici encore naturel de tenter d'établir la contrôlabilité du système linéarisé autour de zéro :

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + \nabla p = \chi_\omega(x) \begin{pmatrix} u_1(t,x) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dans } [0,T] \times \mathbb{T}^2, \\ \mathrm{div}\, v = 0 \text{ dans } [0,T] \times \mathbb{T}^2. \end{cases} \tag{17}$$

Lorsque l'on dispose des deux composantes du contrôle, la zéro-contrôlabilité de ce système a été établie par A. Fursikov et O. Imanuvilov [8]. Mais lorsque le contrôle prend la forme ci-dessus, la zéro-contrôlabilité de (17) est fausse. En effet, en identifiant $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ et en considérant pour $k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{T}^2$:

$$\zeta(x_1,x_2) = \alpha \sin(2k\pi x_1) + \beta \cos(2k\pi x_1),$$

on vérifie simplement que la deuxième composante d'une solution de (17) satisfait

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^2} \zeta v_2\, dx = -4\pi^2 k^2 \int_{\mathbb{T}^2} \zeta v_2\, dx.$$

En particulier, il est impossible en général de ramener ces quantités à 0.

Pour répondre à cette difficulté, l'idée est là encore de chercher à linéariser l'équation, non autour de la solution nulle, mais autour d'une solution de référence $\overline{y}$ qui part de 0 pour y retourner en temps T.

La solution de référence prend ici une forme bien particulière, car elle est supportée dans $[0,T] \times \omega$. S'il n'y avait pas de contrainte sur le contrôle, n'importe quelle fonction

$y \in C^\infty([0,T] \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$, supportée dans $[0,T] \times \omega$, serait une solution du système pour un certain contrôle ; ce n'est bien sûr plus vrai en général pour un contrôle de la forme (16). Cependant, on peut introduire une fonction $\overline{y} : [0,T] \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^2$ par :

$$\overline{y}(t,x_1,x_2) = \delta \exp\left(-\frac{\mu}{t(T-t)}\right)(\partial_{x_2}\varphi, -\partial_{x_1}\varphi),$$

pour un $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ de la forme

$$\varphi(x_1,x_2) = a_1(x_1)b_1(x_2) + a_2(x_1)b_2(x_2),$$

les termes étant supportés dans des rectangles disjoints disposés l'un au-dessus de l'autre dans ω ; on impose aussi la forme $a_1 = x_1$ et $a_2 = 1$ dans une partie de ces rectangles ; dans un troisième rectangle superposé et inclus dans ω, $\varphi = 0$. Les paramètres δ et μ ci-dessus sont strictement positifs et à déterminer. Choisir les fonctions b_i de moyenne nulle permet de construire $\overline{y}$, avec la pression $\overline{p}$ et le contrôle $\overline{u}_1$.

Il s'agit alors d'établir la contrôlabilité vers 0 dans l'espace des états H_0 pour le système linéarisé autour de $\overline{y}$:

$$\partial_t v + (\overline{y}.\nabla)v + (v.\nabla)\overline{y} - \Delta v + \nabla p = \chi_\omega(x)\begin{pmatrix} u_1(t,x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cela s'opère en deux étapes. Dans un premier temps, J.-M. Coron et S. Guerrero partent du résultat de A. Fursikov et O. Imanuvilov **[8]** qui prouve que le système avec second membre

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} \partial_t v - \Delta v + \nabla p = h + \chi_\omega(x)\begin{pmatrix} u_1(t,x) \\ u_2(t,x) \end{pmatrix} \text{ dans } [0,T] \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div} v = 0 \text{ dans } [0,T] \times \mathbb{T}^2, \end{cases}$$

est zéro-contrôlable lorsque h appartient à un certain espace à poids

$$\left\{h \in L^2((0,T) \times \mathbb{T}^2) \ / \ \exp\left(\frac{C}{T-t}\right) h \in L^2((0,T) \times \mathbb{T}^2)\right\}.$$

La preuve de ce résultat de zéro-contrôlabilité est constructive : la solution v et son contrôle apparaissent comme les solutions d'un certain problème variationnel. L'argument principal, de coercitivité de la fonctionnelle, repose sur la preuve très délicate d'une certaine inégalité dite de Carleman.

À partir de ce résultat de zéro-contrôlabilité de (18) avec deux contrôles, les auteurs déduisent la zéro-contrôlabilité de l'équation

$$\text{(19)} \qquad \partial_t v + (\overline{y}.\nabla)v + (v.\nabla)\overline{y} - \Delta v + \nabla p = \chi_\omega(x)\begin{pmatrix} u_1(t,x) \\ u_2(t,x) \end{pmatrix},$$

avec la contrainte supplémentaire sur u_2 :

$$\int_\omega u_2(t,x)\,dx = 0. \tag{20}$$

Pour obtenir (20), ils ajoutent à la solution v de la solution du problème de zéro-contrôlabilité associé à (18) un terme de type

$$f(t)\mathscr{P}(Z(x_1,x_2)),$$

où $Z : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^2$ est supporté dans ω et $\mathscr{P}$ est le projecteur de Leray, c'est-à-dire le projecteur orthogonal sur les champs de divergence nulle dans L^2. Une telle fonction est solution de (18) et permet de réaliser la contrainte (20). La prise en compte des termes additionnels $(\overline{y}.\nabla)v+(v.\nabla)\overline{y}$ est assurée par un argument perturbatif, utilisant les paramètres δ et μ.

La seconde étape consiste ensuite à éliminer complètement le second contrôle. C'est ici que la présence des termes invoquant $\overline{y}$ est décisive. Soit $\hat{v}$ une solution du problème de zéro-contrôlabilité de (19) avec la contrainte (20) sur le contrôle. Les auteurs montrent que, partant de $\hat{v}$, on peut construire explicitement une fonction ψ, supportée dans $[0,T]\times\omega$, s'annulant en $t=T$, et telle qu'en ajoutant

$$\tilde{v} = (\partial_{x_2}\psi, -\partial_{x_1}\psi)$$

à la fonction $\hat{v}$, la somme résultante $v = \hat{v}+\tilde{v} = (v_1,v_2)$ ne fasse plus apparaître la deuxième composante du contrôle, ou plutôt que ce qui reste de celle-ci puisse être incorporé dans le terme de pression. Pour cela, il est nécessaire et suffisant que v satisfasse la relation suivante, quels que soient t et x_1 :

$$\int_0^1 \left[\partial_t v_2 + (\overline{y}.\nabla)v_2 + (v.\nabla)\overline{y}_2 - \Delta v_2 - \chi_\omega u_2\right](t,x_1,x_2)\,dx_2 = 0. \tag{21}$$

La fonction ψ est alors recherchée sous la forme

$$\psi(t,x) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(t,x_1)\beta_i(x_2),$$

où les supports des α_i et β_i sont adaptés à la forme de la fonction $\overline{y}$ (en particulier aux trois rectangles introduits plus haut). La contrainte (21) se traduit en une équation intégro-différentielle sur les fonctions α_i et β_i, faisant intervenir $\overline{y}$. Le fait qu'il existe une solution à cette équation provient alors de la forme spécifique de $\overline{y}$ et de (20) ; la preuve s'inspire de nouveau des techniques de M. Gromov **[9]** sur l'inversion algébrique des systèmes différentiels sous-déterminés.

Enfin, un théorème d'inversion locale permet d'obtenir la contrôlabilité locale du système non linéaire.

RÉFÉRENCES

[1] R. W. BROCKETT – Asymptotic stability and feedback stabilization, in *Differential geometric control theory (Houghton, Mich., 1982)*, Progr. Math., vol. 27, Birkhäuser, 1983, p. 181–191.

[2] J.-M. CORON – Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift, *Math. Control Signals Systems* **5** (1992), p. 295–312.

[3] ______, Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **317** (1993), p. 271–276.

[4] ______, On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions, *ESAIM Contrôle Optim. Calc. Var.* **1** (1995/96), p. 35–75.

[5] ______, On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids, *J. Math. Pures Appl.* **75** (1996), p. 155–188.

[6] ______, *Control and nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 136, Amer. Math. Soc., 2007.

[7] J.-M. CORON & S. GUERRERO – Local null controllability of the two-dimensional Navier-Stokes system in the torus with a control force having a vanishing component, *J. Math. Pures Appl.* **92** (2009), p. 528–545.

[8] A. V. FURSIKOV & O. Y. IMANUVILOV – *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes Series, vol. 34, Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Research Center, 1996.

[9] M. GROMOV – *Partial differential relations*, Ergebnisse Math. Grenzg. (3), vol. 9, Springer, 1986.

[10] J.-L. LIONS – *Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbations de systèmes distribués*, tomes 1 & 2, RMA 8 & 9, Masson, 1988.

[11] ______, Are there connections between turbulence and controllability ?, in *Analysis and optimization of systems* (A. Bensoussan & J.-L. Lions, éds.), Lecture Notes Control and Inform. Sci., vol. 144, 1990.

[12] D. L. RUSSELL – Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions, *SIAM Rev.* **20** (1978), p. 639–739.

[13] V. I. Yudovich – The flow of a perfect, incompressible liquid through a given region, *Soviet Physics Dokl.* **7** (1962), p. 789–791.

Olivier GLASS

Ceremade
Université Paris-Dauphine
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny
F–75775 Paris Cedex 16
E-mail : glass@ceremade.dauphine.fr